This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

NYPL RESEARCH LIBRARIES
3 3433 06907960 0

510
K89

Lehrbuch

der

reinen Mathematik

von

Friedrich Kries,

Professor am Gymnasium zu Gotha,
der naturforschenden Ges. zu Halle, und der Ges. der Künste und Wiss. zu Utrecht ordentlichem, ingleichen der Königl. Akad. d. Wiss. zu München, der Frankf. Ges. zur Beförd. der nützl. Künste, und der naturforsch. Ges. des Osterlandes zu Altenburg
correspondirendem Mitgliede.

Sechste sorgfältig durchgesehene und verbesserte Auflage.

Mit 220 eingedruckten Holzschnitten.

Jena,
Friedrich Frommann.

1836.

THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
60114A
ASTOR, LENOX AND
TILDEN FOUNDATIONS
R

510
K89

Vorrede

zur sechsten Auflage.

Obgleich die Seitenzahl bey dieser Auflage durch eine etwas veränderte Einrichtung des Druckes etwas kleiner geworden ist, als bey der vorigen, so sind doch mehrere ganze Paragraphen und andere Zusätze neu hinzugekommen. Die ältern Vorreden sind hier weggelassen worden, um dasselbe nicht noch einmal zu wiederholen. Ich habe darin die Ursachen angedeutet, aus denen es begreiflich wird, warum der Unterricht in der Mathematik auf Schulen noch immer nicht den Erfolg hat, welchen er haben könnte und sollte. Es steht nicht in der Gewalt des Lehrers diese zu entfernen; deßwegen aber seinem Vortrage den Vorwurf „des alten Schlendrians, der Unverständigkeit und des Mangels an aller Methode" zu machen — wie unlängst in einem öffentlichen Blatte geschehen ist — ist eben so unverständig, als ungerecht. Man muß nichts von dem wissen oder verstehen, was seit geraumer Zeit in vielen

APR 10 1922

148

Schulen unſers Vaterlandes zur Aufnahme des mathematiſchen Unterrichts geſchehen iſt, wenn man behaupten kann, daß er noch in dem alten Schlendrian begriffen und hinter den andern Unterrichtsgegenſtänden zurückgeblieben wäre. Die nicht unbeträchtliche Anzahl brauchbarer Lehrbücher, die jährlich erſcheinen, ſind ein Beweis, daß geſchickte Lehrer in dieſer Wiſſenſchaft jetzt nicht ſo ſelten, als ſonſt, ſind. Wenn daher die Tauſende der beſſern Köpfe, die, nach der Meinung jenes Eiferers, durch den ſchlechten Unterricht in der Mathematik abgeſchreckt würden, nur ihre Köpfe brauchen wollten, ſo würden ſie auch etwas lernen; aber freylich, wenn ſie die Anſtrengung ſcheuen, welche das Studium derſelben erfordert und erfordern ſoll — ſo mag ein Engel vom Himmel kommen und Mathematik dociren, wenn er nicht einen himmliſchen Trichter mitbringt, durch welchen die Lehren der Weisheit zur Noth auch im Schlaf eingenommen werden können, ſo wird ſein Unterricht keinen beſſern Erfolg haben.

Unſtreitig ſind mathematiſche Aufgaben, welche den Schülern zur Auflöſung gegeben werden, ein vortreffliches Mittel ihren Scharfſinn zu üben und ſie in ihren Kenntniſſen zu befeſtigen und weiter zu bringen. An Stoff dazu kann es den Lehrern nicht fehlen, da es jetzt eine Menge *gedruckter* Sammlungen ſolcher Aufgaben, nach

dem verschiedensten Bedürfnisse, gibt; und ich freue mich, in Bezug auf die Geometrie, bey welcher die Wahl derselben mehr Schwierigkeit hat, als bey der Arithmetik, ihnen ein Buch nennen zu können, das neben einer ausführlichen und gründlichen Darstellung dieser Wissenschaft, einen reichen Schatz von Aufgaben enthält, der ihnen die beste Hülfe gewähren kann, nämlich:

J. H. van Swinden's Elemente der Geometrie aus dem Holländischen übersetzt und vermehrt von E. F. A. Jacobi. Mit 21 Tafeln. Jena. Fr. Frommann 1834. 8.

Noch bemerke ich, daß bey der gegenwärtigen Auflage nicht nur mehrere neue Figuren, die durch die neuen Zusätze nöthig wurden, hinzugekommen, sondern daß auch viele der ältern, welche mangelhaft geworden waren, mit neuen vertauscht worden sind. So haben Verleger und Verfasser sich bemüht das Buch einer so guten Aufnahme, als es bisher gefunden hat, auch ferner nicht unwerth zu machen.

Gotha, im Januar 1836.

Fr. Kries.

Druckfehler.

S. 9 Z. 5 v. u. fehlt am Anfange der Zeile „den“.
— 48 — 1 v. u. lies $\frac{10}{5}$ statt $\frac{6}{12}$.
— 92 — 3 l. $\frac{a}{a+b}$ st. $\frac{a}{a+c}$
— 113 — 1 l. in einigen Exemplaren $\left(a^{\frac{1}{nm}}\right)^n$ st. $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n$
— 116 — 1 l. $(ab)^m : b^m$ st. $(ab)b^m : m$
— 145 — 6 v. u. l. $3(a+b+c+d)e^2$ st. $3(a+b+c+d)c^2$
— 156 — 2 l. $a-(a \mp d)$ st. $a-(a \pm d)$
— 344 — 15 l. AC : AB st. AC : AC
— 368 — in der Figur fehlt der Buchstabe a zur Bezeichnung der untersten geraden Linie.
— 399 — in der Figur fehlen die Sehnen BG u. BH
— 404 — 13 v. u. ist vor GH „auf“ ausgelassen
— 548 — 2 fehlt am Anfange der Zeile „ist“
— 596 — 6 l. in einigen Exemplaren Ap st. A p
— 605 — in der Figur muß das Perpendikel von P nach M, nicht nach n gehen
— 618 — 19 v. u. l. FE st. DE

Inhalt.

Seite

Einleitung 1

Erster Haupttheil. Arithmetik.

Erster Abschnitt. Von den Zahlen überhaupt und ihrer Bezeichnungsart 11

Zweyter Abschnitt. Von den vier Species . . 19

Dritter Abschnitt. Von den Brüchen 34

Vierter Abschnitt. Von den entgegengesetzten Größen 53

Fünfter Abschnitt. Vom Gebrauch der Einschließungszeichen in den Rechnungen 64

Sechster Abschnitt. Buchstaben-Rechnung . . 76

Siebenter Abschnitt. Von den Potenzen . . 96

Achter Abschnitt. Vom dekadischen Zahlensystem. 116

Neunter Abschnitt. Von der Ausziehung der Wurzeln 130

Zehnter Abschnitt. Von den Verhältnissen . . 153

Eilfter Abschnitt. Von den Progressionen . . 178

Zwölfter Abschnitt. Von den Logarithmen . . 188

Dreyzehnter Abschnitt. Von der Rechnung zusammengesetzter Interessen 203

Vierzehnter Abschnitt. Von den Gleichungen. 209

Von der Auflösung einfacher Gleichungen . . . 212

Von der Auflösung quadratischer Gleichungen . 250

Funfzehnter Abschnitt. Vom binomischen Lehrsatze 267

Seite

Anhang 283

Zweyter Haupttheil. Geometrie.

Vorerinnerungen 287

Erste Abtheilung. Planimetrie.

Erster Abschnitt. Von den Winkeln und Parallellinien 297

Zweyter Abschnitt. Von der Gleichheit der Dreyecke und einigen damit verwandten Gegenständen 309

Dritter Abschnitt. Von der Aehnlichkeit der Dreyecke und einigen damit zusammenhängenden Gegenständen 334

Vierter Abschnitt. Von der Ausmessung der Dreyecke und anderer geradlinigen Figuren . 350

Fünfter Abschnitt. Vom Kreise 381

Sechster Abschnitt. Planimetrische Aufgaben 435

Zweyte Abtheilung. Stereometrie . . . 454

Dritte Abtheilung. Trigonometrie . . 532

Erster Abschnitt. Von den trigonometrischen Linien 533

Zweyter Abschnitt. Von der Ausmessung ebener Dreyecke 540

Dritter Abschnitt. Von der Ausmessung sphärischer Dreyecke 564

Vierte Abtheilung. Von den Kegelschnitten . 579

Erster Abschnitt. Von der Parabel . . . 581

Zweyter Abschnitt. Von der Ellipse . . 594

Dritter Abschnitt. Von der Hyperbel . . 609

Einleitung.

1. Die Mathematik wird nicht übel mit dem allgemeinen Namen der Größenlehre benannt, da ihr Gegenstand, überhaupt genommen, die Größen sind.

2. Eine Größe ist alles, was wir uns als einen Inbegriff von Theilen denken können, oder was in die Zusammensetzung einer Größe als Theil eingehet.

Es ist schwer, einen allgemeinen Begriff der Größe zu geben. Man hat mancherley Erklärungen derselben. Gewöhnlich nennt man eine Größe dasjenige, was einer Vermehrung oder Verminderung fähig ist. Allein da hierunter auch die Kräfte begriffen sind, so hat man wieder einen Unterschied zwischen intensiven und extensiven Größen gemacht. Kräfte aber können nur uneigentlich als Größen angesehen, und die eigentlichen Größen nicht insgesamt durch das Prädikat extensiver Größen bezeichnet werden.

3. Die Art, wie man sich die Theile einer Größe verbunden denken kann, ist doppelt: entweder wir denken sie uns neben einander, gleichsam äußerlich zusammenhängend; oder, ohne Zusammenhang unter einander, unmittelbar in der Größe enthalten. Im ersten Fall ist die Größe ausgedehnt, oder nimmt einen Raum ein; im zweyten hat sie nichts, was auf den Raum Beziehung hat, an sich, und stellt sich uns durch den Begriff der Vielheit dar, oder wird durch eine Zahl ausgedrückt. Jene heißen stetige, diese discrete Größen (quantitates continuae — discretae).

4. Diese beyden Arten der Größen bestimmen die beyden *Haupttheile der Mathematik*: die discreten Grö-

ßen machen den Gegenstand der Arithmetik, die stetigen den Gegenstand der Geometrie aus.

5. Der Begriff der Zahl schließt nicht den Begriff irgend einer Art von Dingen mit ein, wenn er sich gleich auf jede derselben übertragen läßt; und die Vorstellung ausgedehnter Gegenstände nicht die Vorstellung physischer Körper, wenn gleich alle physischen Körper ausgedehnt sind. Daher Zahl und Ausdehnung sowohl unabhängig von der physischen Welt, als in Beziehung auf dieselbe betrachtet werden können. Dieß macht, daß Arithmetik und Geometrie wiederum in reine und angewandte unterschieden werden können (mathesis *pura* — *applicata*).

6. Der Gegenstand der reinen Mathematik liegt, wie der einer jeden reinen Wissenschaft, nicht in der Sinnenwelt, sondern in uns selbst — er ist uns durch die Natur unsers Vorstellungsvermögens gegeben. Die Sätze, die wir von ihm aufstellen, gründen sich also nicht auf Erfahrung, sondern auf unser eigenes Bewußtseyn; sie sind allgemein gültig und absolut nothwendig. Daher die Gewißheit, die diesem Theil der Mathematik eigen ist.

7. Es läßt sich aber den rein-mathematischen Gegenständen etwas Entsprechendes in der Anschauung unterlegen; daher es möglich ist, den mathematischen Sätzen die Anschaulichkeit zu geben, die ihre Deutlichkeit in so hohem Grade befördert.

Die reine Mathematik wird eben dadurch ein so vorzügliches Bildungsmittel des Verstandes, daß sie ihm die Auffassung der allgemeinsten Wahrheiten durch sinnliche Darstellung individueller Gegenstände erleichtert.

8. Diese Beschaffenheit der Mathematik hat eine eigene Behandlungsart derselben hervorgebracht, die man *die mathematische Methode* nennt. Diese besteht

darin, daß man die mathematischen Lehren nicht in einer fortlaufenden Rede verschmilzt und wohl gar durch rednerischen Schmuck unterstützt, sondern sie, von einander abgesondert, so einfach und bestimmt als möglich abfaßt, und jedem Satze das, was zur Begründung desselben erforderlich ist, eben so einfach und deutlich beyfügt; übrigens sie in eine solche Ordnung bringt, daß sie unter einander in einem systematischen Zusammenhange stehen.

Man hat die mathematische Methode ehemals auch auf andere Wissenschaften angewandt, aber ohne Erfolg, weil der Gegenstand derselben nicht eben so anschaulich gemacht werden kann, als die mathematischen. Heutzutage hat man dagegen angefangen, ihre Zweckmäßigkeit, die sich seit Jahrtausenden bewährt hat, auch in Absicht der Mathematik zu bestreiten — mit eben so wenigem Grund.

9. So groß das Gebiet der Mathematik ist, und so tiefes Studium erfordert wird, um es ganz zu umfassen, so läßt sich doch in diesem Gebiet wiederum ein Theil absondern, der nicht nur von mäßigem Umfang, sondern auch so beschaffen ist, daß man mit einem mäßigen Aufwand von Zeit und Kräften eine Kenntniß desselben erlangen kann. Dieser Theil ist gerade derselbe, der theils wegen seines Zusammenhangs mit andern Wissenschaften, theils wegen seiner Anwendbarkeit auf Gegenstände des gemeinen Lebens auch von denenjenigen gekannt zu werden verdient, die das Studium der Mathematik nicht zu ihrem eigentlichen Geschäfte machen. Man unterscheidet ihn gemeiniglich durch den Beynamen der niedern oder Elementar-Mathematik; und im Gegensatz desselben heißt der andere Theil die höhere Mathematik.

Die Grenzen beyder Theile lassen sich nicht scharf bestimmen. Was hier zur Elementar-Mathematik gerechnet ist, zeigt der Inhalt dieses Lehrbuchs.

10. *Die Mathematik* hat die Menschen schon in den

frühesten Zeiten beschäftigt. Einige Gegenstände derselben sind von der Art, daß die ersten Grade der menschlichen Cultur darauf hinleiteten, und schon die Bildung eines Zahlensystems in der Sprache war ein Anfang von Mathematik. Dieser Ursprung verliert sich in Zeiten, zu welchen unsere Geschichte nicht hinaufreicht. Indessen kann man diese unzusammenhängenden, mechanischen Beschäftigungen nicht für wissenschaftliche Bearbeitung der Mathematik ansehen. Von dieser muß der Anfang in viel spätern Zeiten gesucht werden. Allein die Geschichte läßt uns auch darüber in Ungewißheit, und wir können weder sagen, unter welchem Volk, noch zu welcher Zeit die Mathematik zuerst ein Gegenstand wissenschaftlicher Beschäftigung wurde.

11. Die Griechen, die am meisten unter allen Völkern des Alterthums Künste und Wissenschaften bearbeiteten und vervollkommneten, haben auch um die Mathematik sich große Verdienste erworben; und es ist eben nicht wahrscheinlich, daß sie andern Völkern viel darin zu verdanken gehabt hätten. Doch sind nicht alle Theile derselben von ihnen mit gleichem Glücke bearbeitet worden. Die Arithmetik blieb, besonders aus Mangel einer schicklichen Zahlen-Bezeichnung, bey ihnen sehr unvollkommen; in der Geometrie hingegen sind sie unsre Lehrer und Muster geworden.

12. Schon in den frühesten Schulen der Philosophen — der ionischen und italischen — wurde Mathematik gelehrt, und die Stifter derselben, Thales und Pythagoras, werden ihrer mathematischen Einsichten wegen gerühmt. Auch späterhin blieb sie ein Theil der Philosophie, und mehrere Philosophen zeichneten sich durch ihre Liebe zu ihr und durch ihre Kenntniß derselben aus. Besonders verdient in dieser Rücksicht Plato, und aus seiner Schule Eudoxus, Menächmus und

Dinostratus genannt zu werden. Doch sonderte sich die Mathematik um so mehr von der eigentlichen Philosophie ab, je mehr sie ausgebildet und erweitert wurde.

In diese frühere Periode gehört auch Hippocrates aus Chios, zwar eigentlich ein Kaufmann, aber den Mathematikern durch die nach ihm benannte lunula bekannt.

13. Das goldene Zeitalter der Mathematik unter den Griechen war die Periode der alexandrinischen Schule vor Christi Geburt. In diese Zeit gehören Euclides, Aristäus, Timocharis, Aristyllus, Aratus, Aristarchus, Archimedes, Eratosthenes, Apollonius, Conon, Dositheus, Nicomedes, Hero, Hipparchus, Geminus, Diocles, Posidonius, Theodosius.

14. Auch nach Christi Geburt fehlte es unter den Griechen nicht ganz an geschickten Mathematikern. Besonders verdienen erwähnt zu werden: Menelaus, Nicomachus, Ptolemäus, Diophantus, Pappus, Theon und seine Tochter Hypatia, Proclus, Isidorus, Eutocius. Die spätern griechischen Mathematiker sind unbedeutend.

15. Unter den Römern hat die Mathematik nie sonderlichen Eingang gefunden, und kein römischer Schriftsteller hat sich durch Bearbeitung irgend eines Theils derselben ein eigenthümliches Verdienst erworben — etwa den Vitruvius ausgenommen, der über einige Gegenstände der angewandten Mathematik geschrieben hat. Ein paar römische Astronomen werden genannt: Sulpicius Gallus, anderthalb hundert Jahre vor Christo, und Manlius zu Augusts Zeiten; doch mußte sich Cäsar zu seiner Kalender-Reform eines alexandrinischen Astronomen, des Sosigenes, bedienen.

Zu Augusts Zeiten lebte auch der Dichter M. Manilius, der *ein Lehrgedicht, Astronomicon*, verfertigt hat, *das größtentheils auf uns gekommen ist.*

16. Dagegen wurde die Mathematik von einem Volke, das anfangs durch seine Barbarey und Rohheit allen Wissenschaften gefährlich zu werden drohte, mit besonderer Vorliebe aufgenommen und bearbeitet. Die Araber waren eine geraume Zeit hindurch fast die einzigen, bey welchen Mathematik anzutreffen war. Vorzüglich blühte sie vom 10ten bis zum Ende des 12ten Jahrhunderts unter ihnen, während unter den europäischen Nationen Künste und Wissenschaften im größten Verfall lagen. Sie übersetzten nicht nur die Werke griechischer Mathematiker in ihre Sprache, sondern verfertigten auch selbst eine Menge eigener mathematischer Werke. Besonders bearbeiteten sie die Sternkunde mit großem Eifer, woher es gekommen ist, daß noch jetzt viele arabische Benennungen in dieser Wissenschaft üblich sind. Sie sind die Erfinder der heutigen Trigonometrie und der eigentlichen Algebra, so wie wir ihnen die Kenntniß unserer noch heutzutage gebräuchlichen Ziffern verdanken.

17. Mit der Wiederherstellung der Wissenschaften fing auch die Mathematik an wieder in Aufnahme zu kommen. Um die Mitte des 13ten Jahrhunderts versammelte Alphonsus, König von Kastilien, mehrere Astronomen (doch meistens arabische und jüdische) bey sich, welche die Alphonsinischen Tafeln verfertigten. Um eben diese Zeit lebte Roger Bacon in England, der die Mathematik aufs eifrigste studirte. Indessen dauerte es doch bis ins 15te Jahrhundert, in welchem Johann von Gmünden, Peurbach, Regiomontan u. a. lebten, ehe die Mathematik eigentlich emporkommen konnte. Sie machte nun schnelle Fortschritte, und wurde fast in allen ihren Theilen verbessert und erweitert. Im 16ten Jahrhundert fing man *an die griechischen Mathematiker herauszugeben, zu übersetzen und zu erläutern.* Fast alle europäische Nationen

hatten vorzügliche Mathematiker aus ihrer Mitte aufzuweisen. Cardanus, Maurolycus, Vieta, Ludolph van Ceulen, Peter Nunnez, Justus Byrg, Peter Apianus und viele andere gehören in diesen Zeitraum. Am astronomischen Himmel glänzten als Sterne erster Größe Copernicus, Tycho Brahe, Kepler.

18. Noch höher hob sich die Mathematik im 17ten Jahrhundert. Der reine und angewandte Theil derselben wurde mit gleichem Eifer und ausgezeichnetem Glück bearbeitet. Es wurden eine Menge mathematischer Erfindungen und Entdeckungen gemacht, unter denen die Erfindung der Logarithmen, ingleichen der Differenzial- und Integral-Rechnung oben an steht. Die Namen eines Galilei, Toricelli, Pascal, Descartes, Fermat, l'Hospital, Cassini, Huyghens, Neper, Harriot, Wallis, Barrow, Newton, Halley, Leibnitz, Jacob und Johann Bernoulli, Hevelius, Römer und noch vieler andern zeichnen dieses Jahrhundert als das mathematische aus.

19. Das 18te Jahrhundert blieb in der Ausbildung und Vervollkommnung der Mathematik nicht hinter seinem Vorgänger zurück. War vielleicht die Anzahl ausgezeichneter Mathematiker in demselben nicht so groß, als in dem vorhergehenden, so war dafür das Studium der Mathematik allgemeiner, und es fehlte nicht an Männern, durch welche die Wissenschaft weiter gebracht wurde. Dieß war besonders der Fall in der letztern Hälfte dieses Jahrhunderts. In der erstern war man mehr bemüht, den neu erfundenen Differenzial-Calcul weiter auszudehnen und anzuwenden; in der letztern suchte man ihn genauer *zu begründen.* Es wurden zugleich neue *Rechnungsarten erfunden,* wodurch das Gebiet der Ma-

thematik sich erweiterte — die combinatorische Analytik, die Variations- und Derivations-Rechnung. Die Hülfsmittel des mathematischen Studiums, die Ausgaben logarithmischer Tafeln und andere Tabellen-Sammlungen vermehrten sich beträchtlich, so wie die Methoden ihrer Berechnung sich verbesserten. Unter den Theilen der angewandten Mathematik wurde besonders die Astronomie — sowohl der theoretische als praktische Theil derselben — zu einer bewundernswürdigen Höhe gebracht. Zu den vorzüglichsten Mathematikern dieses Jahrhunderts sind zu rechnen: Eustachius und Gabriel Manfredi, Ricati, Nicolaus und Daniel Bernoulli, Leonh. Euler, Fuß, Maclaurin, Taylor, Bradley, Maskelyne, Hutton, Moivre, de la Caille, Clairaut, Bouguer, d'Alembert, de la Lande, Lagrange, Monge, de Lambre, Laplace, Wolf, Lambert, Tob. Mayer, Karsten, Kästner, Hindenburg, Klügel, Melanderhielm, Bugge u. a. m.

20. In dem gegenwärtigen Jahrhundert hat das Studium der Mathematik sich unstreitig noch mehr, als in dem vorhergehenden ausgebreitet. Man hat den großen Nutzen, den diese strenge Wissenschaft bey dem Unterricht der Jugend leisten kann, mehr anerkannt, und sie daher nicht nur fast allgemein in die Schulen eingeführt, sondern auch die Grenzen des mathematischen Unterrichts daselbst beträchtlich erweitert. Dieß hat die Folge gehabt, daß eine große Anzahl von Lehrbüchern sowohl über die ganze Elementar-Mathematik, als über einzelne Theile derselben erschienen sind, und noch jährlich erscheinen. Hat aber auch dadurch die Mathematik selbst keinen Zuwachs erhalten, so ist doch dieser Theil derselben sorgfältiger bearbeitet und gemeinnütziger gemacht worden. Aber auch das Studium der höhern Mathema-

tik ist mit großem Eifer und dem glücklichsten Erfolg betrieben worden. Zur Auflösung numerischer Gleichungen von höhern Graden hat man eine sichrere Methode, als die bisher bekannten, aufgefunden; die Wahrscheinlichkeits-Rechnung hat eine neue Gestalt gewonnen; die Methode der kleinsten Quadrate bietet, bey Untersuchung von Gegenständen der Natur, da wo selbst die sorgfältigsten Beobachtungen eine Ungewißheit übrig lassen, ein neues Hülfsmittel der Wahrheit am nächsten zu kommen dar; durch die Theorie der elliptischen Funktionen ist ein neues Feld der Untersuchung eröffnet, und durch den barycentrischen Calcul für die analytische Behandlung der Geometrie ein neuer Weg gebahnt worden; auch die Differenzial- und Integralrechnung hat mannigfache Bereicherungen erhalten. Eben so ist die angewandte Mathematik mit vieler Sorgfalt behandelt, und namentlich sind mehrere schwierige Gegenstände der Physik und Astronomie ganz neu bearbeitet und aufgeklärt worden. Als verdienstvolle Mathematiker dieses Jahrhunderts, die ihre irdische Laufbahn bereits vollendet haben, verdienen außer denen, welche aus dem vorigen Jahrhundert in dieses übergegangen und schon am Ende des vorhergehenden Paragraphen namhaft gemacht worden sind, genannt zu werden: Legendre, Fourier, Fresnel, Herschel der ältere, Young, Piazzi, Pasquich, von Zach, Schubert, Bode, Tralles, Pfaff, Pfleiderer, Bohnenberger, Thibaut, Mollweide, Brandes, Langsdorf, Abel u. a. m. — und die Zahl der noch lebenden ist nicht geringer, und verspricht mathematischen Wissenschaften einen immer höhern Flor.

Das Hauptwerk zur Geschichte der Mathematik ist von *Montucla: Histoire des Mathématiques etc.* 2 Tom. à Paris. 1758. 4. — *eine zweyte sehr* vermehrte und verbesserte *Ausgabe 1798. In diesen beyden* Bänden geht die Geschich-

den wir uns auch der verschiedenen Grade derselben bewußt, und indem wir diese Grade bestimmen, bilden wir die Begriffe der Zahlen. Zahlen sind also Ausdrücke eines bestimmten Grades der Mannigfaltigkeit unserer Vorstellungen oder Ausdrücke bestimmter Mengen.

24. Da wir es aber bey Bestimmung dieser Mannigfaltigkeit nur mit unsern Vorstellungen zu thun haben, und selbst von dem Inhalte derselben abstrahiren, so kann auch der Begriff der Zahlen kein Object der äußern Anschauung darstellen. Noch weniger können wir uns eine Zahl, und wenn sie noch so groß ist, als etwas Ausgedehntes oder Räumliches vorstellen. Denn sie drückt kein äußerliches Verhältniß der Dinge, sondern ein Phänomen in uns aus.

25. Indessen sind die Vorstellungen sinnlicher Gegenstände auch Vorstellungen. Die Mannigfaltigkeit derselben muß folglich ebenfalls durch Zahlen ausgedrückt werden. Daher wenden wir die Zahlen auch zur Bezeichnung der Mannigfaltigkeit sinnlicher Gegenstände an; und umgekehrt, gebrauchen wir wohl solche Gegenstände, um uns die Vorstellung einer Zahl zu versinnlichen, z. B. Striche oder Zahlpfennige. Aber diese Dinge sind nicht das Object der Vorstellung der Zahl selbst.

Daß die Vorstellung der Zahlen nicht durch die sinnlichen Gegenstände in uns erzeugt wird, sondern daß das Object derselben in unserm Gemüthe selbst liegt, zeigt sich schon daraus, daß wir Zahlen nicht bloß bey sinnlichen Gegenständen, sondern bey allen Arten unserer Vorstellungen auf gleiche Weise gebrauchen, welches bey andern, von sinnlichen Gegenständen abgezogenen, Begriffen nicht möglich ist.

26. Die Vorstellung eines Mannigfaltigen begreift *die Vorstellung* dessen, woraus das Mannigfaltige zusam-

mengesetzt ist, oder des Einzelnen, als integrirenden Theils des Mannigfaltigen, in sich. In so ferne sich nun das Mannigfaltige uns als Zahl darstellt, stellt das, woraus das Mannigfaltige besteht, sich uns als Einheit dar. Hiernach kann die Einheit selbst nicht eine Zahl genannt werden; sondern sie ist das, woraus die Zahl zusammengesetzt wird. Allein da alles, was die Mannigfaltigkeit der Vorstellungen betrifft, zu den Zahlenbegriffen gehört, und die Größe dieser Mannigfaltigkeit unendlich verschieden seyn kann, folglich in die unendliche Reihe dieser Größen auch der Fall gehören muß, wo das Mannigfaltige = 1 ist, oder wo es aufhört ein Mannigfaltiges zu seyn; ja selbst der Fall, wo gar nichts vorhanden ist, was ein Mannigfaltiges erzeugen könnte, oder wo das Mannigfaltige = 0 ist: so kann man in dieser Rücksicht nicht nur Eins, sondern sogar Null in die Reihe der Zahlen rechnen.

27. Von der andern Seite hat die Reihe der Zahlen keine Grenzen. Denn da die Zahlen die Mannigfaltigkeit der Vorstellungen ausdrücken, diese aber desto größer wird, je mehr die Vorstellungen selbst sich vermehren, und in der Möglichkeit der Vermehrung derselben keine Grenze statt findet: so müssen auch die Zahlen immer mehr wachsen können, und in der Möglichkeit ihres Wachsthums keine Grenze erreichen.

28. Auf diese Art ist eigentlich eine Zahl von der andern unabhängig, indem eine jede für sich eine gewisse Menge ausdrückt. Es ist aber möglich eine Verbindung zwischen ihnen anzuknüpfen, und einen Zusammenhang in sie zu bringen. Dieß geschieht schon einigermaßen dadurch, daß man sie in einer gewissen Ordnung auf einander folgen läßt; und die einfachste Ordnung ist unstreitig die, daß sie von Eins anfangen, und in ununterbrochener Folge, immer um eins wachsend, fort-

gehen. Man nennt daher die daraus entstehende Reihe die natürliche Reihe oder natürliche Ordnung der Zahlen.

Die Zahlen nach ihrer natürlichen Ordnung angeben, heißt zählen.

29. Durch die natürliche Reihe der Zahlen wird jedoch nur ein lockerer Zusammenhang zwischen ihnen hervorgebracht, indem sie zwar dadurch neben einander gestellt, aber nicht eigentlich mit einander verbunden werden. Sie ist daher auch nicht sehr geschickt, uns eine Uebersicht der Zahlen zu gewähren. Eine genauere Verbindung zwischen ihnen bringen wir dadurch zu Stande, daß wir die einen aus den andern ableiten, oder als aus ihnen zusammengesetzt darstellen. Denn so gut wir die Zahlen aus Einheiten zusammensetzen, so können wir sie auch wieder in ihre Einheiten auflösen, und die Einheiten der einen mit denen der andern verbinden. Dadurch lassen sich die mannigfaltigsten Verbindungen zu Stande bringen, und die größern Zahlen aus den kleinern zusammensetzen. Eine solche Zusammensetzung drückt unsere Sprache in den Zahlwörtern aus, indem sie nur für wenige Zahlen eigenthümliche Ausdrücke hat, und die meisten durch Wörter, die aus diesen zusammengesetzt oder von ihnen abgeleitet sind, bezeichnet. Durch die Ordnung, die auf diese Art in die unendliche Masse der Zahlen gebracht wird, wird uns die Uebersicht derselben, so weit sie möglich ist, überaus erleichtert.

1. Hätte unsere Sprache für jede Zahl ein eignes Wort, so würde nicht nur das Zählen die mühsamste Erlernung erfordern, sondern auch sehr beschränkt bleiben müssen, weil die Menge der Zahlen die Anzahl der Worte unendlich übertreffen müßte. — Kindern fällt das Zählen bis zehn gewöhnlich am schwersten.

2. In der Art, die Zahlen auszusprechen, stimmen, *kleine Abweichungen* nicht gerechnet, die übrigen europäi-

schen und selbst die alten bekannten Sprachen mit der unsrigen überein.

30. Durch die Art, wie die Zahlen aus einander zusammengesetzt werden, entstehen gewisse Klassen derselben, von denen mehrere wiederum eine Hauptklasse bilden. Die erste und niedrigste Klasse begreift diejenigen Zahlen, welche aus einfacher Zusammensetzung der Einheiten entstehen — die Einer. Die zweyte Klasse enthält diejenigen Zahlen, welche das Zehnfache der Einer ausmachen — die Zehner; die dritte diejenigen, welche das Hundertfache der Einer ausmachen — die Hunderter; so die vierte die Tausender; die fünfte die Zehntausender; die sechste die Hunderttausender. Die sechs Klassen machen die erste Hauptklasse der Zahlen aus, die jedoch durch keine besondere Benennung bezeichnet ist. Die zweyte Hauptklasse ist die der Millionen, die eben so wie die erste sechs verschiedene Ordnungen begreift: Einer, Zehner, Hunderter u. s. w. Dann folgt die Hauptklasse der Billionen u. s. w.

1. Hier verdient bemerkt zu werden, daß die südlichen Völker Europens, die Franzosen, Italiener, Spanier, Portugiesen, schon eine Billion nennen, was wir erst tausend Millionen nennen; ferner eine Trillion, was bey uns erst eine Billion ist u. s. w. Sie rechnen zu einer jeden solchen Hauptklasse von Zahlen nur Einer, Zehner und Hunderter. Da aber eine Million bey ihnen, wie bey uns, tausendmal tausend ist, so ist es wohl der Analogie gemäßer, auch tausendmal tausend Millionen erst eine Billion, tausendmal tausend Billionen eine Trillion u. s. w. zu nennen. — Mit unserer Art zu zählen stimmen dagegen die nordischen Völker von Europa überein.

2. Einheit und Einer sind nicht zu verwechseln. Ein Einer aus der Klasse der Millionen hat einen millionenmal größern Werth als der gleichnamige Einer aus der untersten Klasse; und eine ähnliche Bewandtniß hat es mit

den andern Arten von Zahlen, den Zehnern, Hundertern u. s. w. und den höhern Hauptklassen.

3. Da die Zehner, Hunderter u. s. w. ein Vielfaches der Einer ausdrücken, so ist ihre Anzahl der Anzahl der Einer gleich: jede dieser Klassen begreift neun Zahlen. Die übrigen Zahlen werden aus Einern, Zehnern, Hundertern u. s. w. zusammengesetzt.

31. Das Gesetz, nach welchem die Sprache die Zahlen zusammensetzt, ist einfach und leicht anzuwenden. Man erlangt daher bald eine Fertigkeit im Zählen, und wird dadurch in Stand gesetzt, so weit zu zählen, als man nur immer will. Die wissenschaftliche Darstellung dieses Gesetzes aber und des Systematischen in der Zahlenordnung erfordert einige Kenntniß der Potenzen und wird weiter unten folgen (im achten Abschnitt).

32. Da man Zahlen nicht äußerlich anschauen kann, so kann man sich von ihrer Größe nicht durch den unmittelbaren Anblick einen Begriff machen. So lange wir noch das Verhältniß einer Zahl zur Einheit selbst oder zu andern kleinern Zahlen, deren Verhältniß zur Einheit sich leicht übersehen läßt, deutlich erkennen, haben wir wenigstens eine klare Vorstellung von der Größe der Zahl. Bey großen Zahlen aber können wir uns dieses Verhältniß nicht anschaulich genug vorstellen, und daher faßt unsere Einbildungskraft die Größe derselben nicht so leicht oder gar nicht. In vielen Fällen können wir ihr alsdann dadurch zu Hülfe kommen, daß wir die Größe der Zahlen mit andern Arten von Größen vergleichen, z. B. den Raum bestimmen, den eine gleiche Anzahl gewisser Arten von Dingen einnehmen würde; oder die Zeit, welche erforderlich wäre, eine gewisse Menge von Dingen zu zählen.

Einige solche Vergleichungen findet man in meiner Anweisung zur Rechenkunst §. 7.

33. Ein wichtiger Umstand für den Gebrauch, den

wir von den Zahlen zu machen haben, war eine schickliche Bezeichnung derselben, d. h. eine solche, welche die Zahlen nach der nämlichen Ordnung und Zusammensetzung darstellte, welche in unsrer Sprache ausgedrückt ist. Unsre heutzutage gewöhnlichen Ziffern haben wirklich diesen Vorzug, und sind daher die passendsten Zeichen der Zahlen. Auch sind sie von allen europäischen Völkern angenommen, ob sie gleich nicht europäischen, sondern morgenländischen Ursprungs sind.

1. Es haben mehrere behauptet, daß unsere Ziffern eine griechische Erfindung wären, und sich dabey vornehmlich auf die Aehnlichkeit derselben mit den griechischen Buchstaben gestützt. Allein da sie hierzu theils der Uncial-Buchstaben, die eigentlich allein in Betrachtung kommen dürften, theils der kleinen Schrift nöthig haben, und überdieß demohngeachtet die Unähnlichkeit bey den meisten größer als jene Aehnlichkeit ist, so will dieser Grund wenig sagen. Indessen hat Mannert neuerlich wahrscheinlich zu machen gesucht, daß die Pythagoräer sich im Besitz unserer Ziffern und unserer Rechnungsart befunden — wenn sie auch nicht die Erfinder derselben gewesen wären — und daß die Araber, denen wir die Ueberlieferung derselben verdankten, sie aus pythagoräischen Schriften genommen hätten. (Mannert de numerorum, quos arabicos vocant, vera origine pythagorica. Norimb. 1801. 8.) Da jedoch hier alles auf dem Zeugniß des Boethius beruht, und sonst in den Schriften und Arbeiten der griechischen Mathematiker keine Spur davon vorkommt, so bleibt die Sache zweifelhaft. — Eine schätzbare Abhandlung über die Arithmetik der Griechen von de Lambre findet sich in dem Anhange zu der französischen Uebersetzung der Werke des Archimedes von Peyrard, wovon die zweyte Ausgabe zu Paris 1808 erschienen ist. Er führt darin wirkliche Beyspiele mehrerer Rechnungen, vornehmlich aus dem Eutocius an, woraus sich zwar zeigt, daß die Griechen mit ihren Buchstaben und einigen andern Zeichen die Zahlen auf eine ähnliche Art, wie wir mit unsern Ziffern, zusammensetzten, daß aber doch ihre Bezeichnungsart viel unvollkommner und ihre Rechnungsart viel mühsamer war, als die unsrige.

2. Die Zeit, wenn wir unſre Ziffern durch die Araber erhalten haben, läßt ſich nicht genau beſtimmen. Man findet ſchon Spuren derſelben aus dem 10ten Jahrhundert. Die Einführung geſchah nach und nach und gleichſam von ſelbſt, ohne irgend eine öffentliche Verordnung.

34. Der eigentliche Vorzug unſerer Ziffern liegt darin, daß ſie nicht immer einerley Werth haben, ſondern daß dieſer, bey einer Verbindung mehrerer Ziffern, von der Stelle oder Ordnung einer jeden abhängig iſt, und ſich nach einem gleichförmigen und einfachen Geſetze ändert. Dieſelbe Ziffer zeigt zwar immer dieſelbe Menge von Einheiten an, aber der Werth der Einheiten ſelbſt iſt als verſchieden zu betrachten. In der unterſten Stelle hat jede Einheit den einfachen, in der zweyten den zehnfachen, in der dritten den hundertfachen Werth u. ſ. w. Folglich drücken die Ziffern in der unterſten Stelle die Einer, in der zweyten die Zehner, in der dritten die Hunderter u. ſ. w. aus (30).

Die allgemeinen Grundſätze, auf welchen die Einrichtung unſerer Ziffern, und ähnlicher, die ein Zahlenſyſtem ausdrücken, beruht, werden weiter unten erklärt werden.

35. Um Zahlen, die mit unſern Ziffern geſchrieben ſind, richtig zu leſen, und die Ziffern ſelbſt zur Bezeichnung der Zahlen richtig zu gebrauchen — eine Sache, die unter dem Namen des Numerirens begriffen wird — iſt es nicht genug, den Werth der Ziffern in den verſchiedenen Stellen zu kennen, ſondern man muß auch wiſſen, wie der Sprachgebrauch ſie zu verbinden erfordert. Denn es wird nicht jede Ziffer allein ausgeſprochen. Zu dem Ende pflegt man beym Ausſprechen einer Zahl die bekannten Abtheilungen unter den Ziffern zu machen; und eben dieſe muß man beym Schreiben der Zahlen ſich durch die Einbildungskraft vergegenwärtigen.

4 *Ein bequemes* Hülfsmittel beym Schreiben der Zah-

len ist, sich die verschiedenen Stellen im voraus durch Punkte zu bezeichnen. S. mein Rechenbuch für Bürger- und Land-Schulen §. 14.

2. Da jede Hauptklasse der Zahlen sechs Unterabtheilungen begreift, die durch eben so viel verschiedene Stellen der Ziffern unterschieden werden, so kann man den Werth einer Ziffer außer der Ordnung dadurch finden, daß man in die Zahl, welche die Stelle derselben angibt, mit 6 dividirt; der Quotient zeigt alsdann an, in welche Hauptklasse der Zahlen — Millionen, Billionen, Trillionen u. s. w. — die Ziffer gehört, und der Rest, die wievielste Stelle sie in dieser Klasse einnimmt. Ist z. B. der Quotient 4 und der Rest 3, so gehört die Zahl in die dritte Stelle oder in die Hunderter der Quadrillionen. Geht die Division ohne Rest auf, so gehört die Zahl nicht in die Klasse, welche der Quotient anzeigt, sondern in die höchste Stelle der nächst niedrigern Klasse.

Zweyter Abschnitt.

Von den vier Species.

---

36. So wie wir schon bey dem bloßen Zählen eine Zahl aus der andern erzeugen, und durch die Benennungen der meisten Zahlen eine Zusammensetzung derselben aus andern andeuten, so können wir überhaupt jede beliebige Zahl mit einer andern verbinden und dadurch eine neue herausbringen. Wir denken uns die eine Zahl in ihre Einheiten aufgelöst, und fügen diese der Reihe nach zu der andern Zahl hinzu. Dadurch erhalten wir eine Zahl, die so groß ist, als jene beyden zusammengenommen. Und auf diese Art lassen sich so viele Zahlen zusammen verbinden, als man nur will. Dieses *Verfahren macht das* Addiren aus.

37. Sind die Zahlen, die man auf diese Art mit einander verbindet, einander gleich, so übertrifft die dadurch erzeugte Zahl eine von jenen so vielmal an Größe, als deren zusammen verbunden worden sind. Hierin besteht das Multipliciren.

38. Wenn wir uns ein paar Zahlen in ihre Einheiten aufgelöst vorstellen, so können wir sie in Absicht der Menge ihrer Einheiten mit einander vergleichen; und diese Vergleichung kann auf doppelte Art geschehen: entweder wir sehen, wie viele Einheiten die eine mehr enthält als die andere — und dieses findet sich, wenn wir so viele Einheiten, als die andre in sich fasst, von ihr abnehmen und den Ueberrest betrachten —; oder wir untersuchen, wie vielmal sich so viele Einheiten, als die eine enthält, von den Einheiten der andern wegnehmen lassen; mit andern Worten: die Vergleichung geht entweder dahin, zu bestimmen, um wie viel, oder, wie vielmal die eine Zahl größer als die andere ist. Das eine gibt die Subtraction, das andre die Division.

39. So lassen sich die vier einfachsten Rechnungsarten auf ein Hinzuthun und Abnehmen der Einheiten zurückführen. Gleichwohl unterscheiden wir nicht mit Unrecht vier Rechnungsarten. Denn dadurch, daß bey dem Multipliziren dieselbe Zahl wiederholentlich addirt, und beym Dividiren subtrahirt wird, bekommen beyde Rechnungsarten einen von der Addition und Subtraction verschiedenen Charakter: es ist bey ihnen ein wesentlicher Umstand, wie vielmal die Handlung des Addirens oder Subtrahirens wiederholt werden müsse; worauf bey der Addition und Subtraction selbst nichts ankommt. Daher liefern auch diese Rechnungsarten bey einerley Zahlen, wenige Fälle ausgenommen, *iede ein verschiedenes* Resultat. Z. B. es ist

$$6 + 2 = 8$$
$$6 - 2 = 4$$
$$6 \cdot 2 = 12$$
$$6 : 2 = 3.$$

40. Bey zweyen dieser Rechnungsarten, der Addition und Multiplikation, ist es in Absicht auf das Resultat einerley, in welcher Ordnung die Zahlen verbunden werden: $6 + 2$ ist $= 2 + 6$ und $6 \cdot 2 = 2 \cdot 6$. Denn die Summe faßt die Einheiten der summirenden Zahlen zusammen in sich, wobey es nur auf die Menge, nicht auf die Ordnung derselben ankommt; und das Produkt enthält jede Einheit des einen Factors so vielmal, als der andere Factor Einheiten hat; folglich auch den letztern so vielmal, als jener Einheiten hat.

1. Warum ist bey den beyden andern Rechnungsarten eine ähnliche Verwechselung der Zahlen nicht anwendbar?

2. Da jede Summe zweyer Zahlen wieder als summirende Zahl betrachtet und zu andern addirt; und jedes Produkt zweyer Zahlen wieder als Factor mit andern Zahlen multiplizirt werden kann: so macht es bey diesen beyden Rechnungsarten keinen wesentlichen Unterschied, wie groß die Anzahl der summirenden Zahlen oder der Factoren sey.

41. Bey der Subtraction kann der Unterschied in der Menge der Einheiten zweyer Zahlen auch dadurch gefunden werden, daß man der einen Zahl so viele Einheiten zusetzt, als erforderlich ist, sie der andern gleich zu machen. Ueberhaupt muß man unter dem Unterschiede zweyer Zahlen diejenige Zahl verstehen, die, zu der einen hinzugethan, diese der andern gleich macht; und die Zahl, zu welcher man den Unterschied hinzuthun muß, damit sie der andern gleich werde, macht den Subtrahendus, die andre den Minuendus aus.

1. Man kann *sich auch* den Unterschied als diejenige *Größe denken, die, von dem* Minuendus abgenommen, ihn

dem Subtrahendus gleich macht. So gibt es einen dreyfachen Weg, den Unterschied zweyer Zahlen zu finden.

2. Die Natur der Subtraction gestattet eigentlich nicht, daß mehr als eine Zahl von einer andern abgezogen werde. Sind gleichwohl mehrere gegeben, die von einer abgezogen werden sollen, so hat man entweder so viel verschiedene Rechnungen zu machen, als Zahlen abzuziehen sind; oder man muß die Summe von diesen auf einmal abziehen.

42. Wenn die Division lehrt, wie vielmal eine Zahl größer, als eine andre sey, so zeigt sie zugleich, was für einen Theil jene von dieser ausmache. Denn wenn z. B. 6 3mal so groß als 2 ist, so kann 2 als der dritte Theil von 6 betrachtet werden. Da ferner 3mal 2 eben so viel ist, als 2mal 3, so kann man den Quotienten 3 auch als die Zahl betrachten, die in 6 2mal enthalten ist, oder den 2ten Theil, d. i. die Hälfte von 6 ausmacht. Man findet also durch die Division ebensowohl, den wie vielsten Theil eine Zahl (der Divisor) von einer andern (dem Dividendus) ausmache, als, wie groß ein (durch den Divisor) bestimmter Theil einer Zahl (des Dividendus) sey. Daher die Benennung dieser Rechnungsart.

1. Es läßt sich bey der Division ein doppelter Gesichtspunkt auffassen: entweder ist die Frage, wie vielmal der Divisor im Dividendus stecke; oder, welches diejenige Größe sey, die im Dividendus so vielmal enthalten ist, als der Divisor anzeigt.

2. Je größer, bey gleichem Dividendus, der Divisor ist, desto kleiner wird der Quotient; und je kleiner der Divisor, desto größer der Quotient.

3. Auch die Division gestattet nicht, daß der Divisor aus mehreren Zahlen bestehe. Ist er gleichwohl durch mehrere Zahlen ausgedrückt, so müssen diese erst auf eine einzige gebracht werden. Z. B. er sey $= 5 + 3$, so muß dafür 8 gebraucht werden. Soll aber eine Zahl durch mehrere der Reihe nach dividirt werden, und zwar so, daß der Quotient der einen durch die nächstfolgende Zahl, dieser *Quotient wieder* durch die folgende u. s. w. dividirt werde-

so hat man so viel verschiedene Rechnungen, als Divisoren gegeben sind. Dafür kann man auch die gegebene Zahl durch ein Produkt aller Divisoren auf einmal dividiren. Es soll z. B. 60 erst durch 5, und der Quotient wieder durch 3 dividirt werden, so dividire man dafür 60 durch 5 . 3, d. i. durch 15. Denn den fünften Theil einer Größe in 3 gleiche Theile zu theilen, heißt, solche Theile angeben, deren 3 auf jedes Fünftel der Größe, folglich 15 auf die ganze Größe gehen.

43. Aus dieser Darstellung der vier Species erhellet, in wie fern die zu einer Rechnung derselben gehörigen Zahlen getheilt werden können oder nicht.

a) Bey der Addition ist es in Absicht auf die Summe einerley, ob die summirenden Zahlen vorher getheilt werden oder nicht, wofern alle Theile zusammen addirt werden; weil es nur darauf ankommt, daß die Summe alle in den summirenden Zahlen enthaltenen Einheiten in sich fasse. Es ist z. B. $9 + 2 = 5 + 3 + 1 + 2 = 11$.

b) Wird bey der Subtraction der Minuendus getheilt, der Subtrahendus aber nicht, so kann man diesen von dem einen Theil des Minuendus abziehen, muß aber zu dem Unterschiede den andern ganzen Theil addiren. Z. B. $12 - 7$ ist $= 8 - 7 + 4 = 1 + 4 = 5$.

Wird dagegen der Subtrahendus getheilt und der Minuendus nicht, so muß man die Theile der Reihe nach von dem Minuendus und dem jedesmaligen Reste abziehen. Z. B. anstatt $15 - 8 = 7$ kann man 8 in 5, 2, 1 zertheilen und setzen: $15 - 5 = 10$; $10 - 2 = 8$; $8 - 1 = 7$. (Vergl. 41, 2.)

Man kann aber auch beyde, den Minuendus und Subtrahendus, zertheilen, und die Theile des letztern von den Theilen des erstern abziehen, — wofern beyde in gleichviel Theile getheilt sind — und die Differenzen addiren, so erhält man die Differenz der unge-

theilten Zahlen. Z. B. 20 — 12 ist = 11 — 8 + 9 — 4 = 3 + 5 = 8. Wären beyde nicht in gleichviel Theile zertheilt, so kann man dem einen noch so viel Theile = 0 geben, daß seine Anzahl der des andern gleich wird.

c) Die Multiplikation gestattet gleichfalls eine Zertheilung ihrer Factoren; und zwar kann man entweder den Multiplikandus allein, oder den Multiplikator allein, oder beyde zugleich zertheilen; in jedem Fall aber muß jeder Theil des einen Factors mit dem andern ganzen Factor, oder, wenn auch dieser zertheilt ist, mit jedem Theil desselben multiplizirt, und die Produkte müssen addirt werden. Z. B. 12 . 5 ist = 8 . 5 + 4 . 5 = 40 + 20 = 60; oder 12 . 5 = 12 . 3 + 12 . 2 = 36 + 24 = 60; oder 12 . 5 = 8 . 3 + 4 . 3 + 8 . 2 + 4 . 2 = 24 + 12 + 16 + 8 = 60.

d) Bey der Division endlich darf nur der Dividendus, aber nicht der Divisor zertheilt werden. Denn ein Theil des Divisors muß einen größern Quotienten geben, als der ganze Divisor (42. 2). Zertheilt man aber den Dividendus und dividirt jeden Theil durch den ganzen Divisor, so machen die partiellen Quotienten zusammengenommen wieder den ganzen Quotienten aus. Z. B. 24 : 6 ist = 18 : 6 + 6 : 6 = 3 + 1 = 4.

44. Wenn die Zahlen in einer Rechnung, die zu einer dieser 4 Species gehört, mit mehr als einer Ziffer geschrieben werden müssen, so lehrt die gemeine Arithmetik eine Abkürzungs-Methode, wobey man nicht nur die gegebenen Zahlen theilweise in Rechnung nimmt, und die einzelnen Theile derselben als Einer betrachten darf, sondern auch die gesuchten Zahlen theilweise findet. Bey der Addition und Subtraction müs-

sen zu diesem Ende Einer unter Einer, Zehner unter Zehner, u. s. w. gesetzt werden; bey der Multiplikation und Division kommt es nur darauf an, daß die einzelnen Theile des Produkts und des Quotienten in ihre gehörige Stelle zu stehen kommen. Die ganze Methode aber gründet sich darauf, daß die Zehner, Hunderter u. s. w. sich als Einer betrachten lassen, deren Einheiten einen zehnmal, hundertmal ꝛc. größern Werth haben, als die Einheiten der eigentlichen Einer.

1. Bey der Addition, Subtraction und Multiplikation fängt man die Rechnung bey den Einern an — warum ist es vortheilhaft sie in der Division bey den höchsten Zahlen anzufangen?

2. Ein nothwendiges Hülfsmittel zu dieser künstlichen Multiplikation ist das Einmaleins, welches alle Produkte je zweyer Einer in sich begreift, aber auch nicht mehr zu enthalten braucht, da diese zu einer jeden noch so großen Multiplikations-Rechnung hinreichen.

3. Für die Division gibt es kein so directes Verfahren, als für die drey übrigen Rechnungsarten; man hat, zumal bey größern Zahlen, öfters ein Probiren dabey nöthig.

45. Die verschiedenen Theile einer jeden Rechnungsart stehen in einer solchen Verbindung unter einander, daß sie einander gegenseitig bestimmen, d. h. daß die Größe des einen von der Größe der übrigen abhängig ist.

a) Wenn $6 + 2 = 8$ ist, so ist $6 = 8 - 2$; und $2 = 8 - 6$. Ueberhaupt ist jede der summirenden Zahlen gleich der Summe aller weniger der Summe der übrigen summirenden Zahlen.

Hierauf gründet sich eine sehr gewöhnliche Probe der Addition. S. meine Anweis. z. Rechenk. 23.

b) Aus $6 - 2 = 4$ folgt, daß $6 = 4 + 2$; und $2 = 6 - 4$ ist. Denn der Unterschied ist eben *diejenige Größe, die, zu dem* Subtrahendus hinzuge-

than, ihn dem Minuendus; und von dem Minuendus abgezogen, diesen dem Subtrahendus gleich macht.

In dem erstern liegt der Grund der gewöhnlichen Probe der Subtraction.

c) Aus $6 \cdot 2 = 12$ ergibt sich, daß $6 = 12 : 2$; und $2 = 12 : 6$ ist. Denn wenn 12 noch einmal so viel ist als 6, so muß die Hälfte von $12 = 6$ seyn; und wenn 12 6mal so groß als 2 ist, so muß der 6te Theil von $12 = 2$ seyn. Man erhält also jedesmal den einen Factor, wenn man das Produkt durch den andern dividirt.

Dieß gibt ebenfalls die gewöhnliche Probe der Multiplikation.

d) Wenn endlich $6 : 2 = 3$ ist, so ist $6 = 2 \cdot 3$; und $2 = 6 : 3$. Denn man mag sich vorstellen, daß 2 in 6 3mal, oder 3 in 6 2mal stecke, so folgt immer, daß $2 \cdot 3 = 6$ sey; und hieraus ergibt sich wieder (nach der vorhergehenden Nummer), daß $2 = 6 : 3$ ist. Der Quotient und Divisor geben also zusammen multiplizirt den Dividendus, und der Dividendus durch den Quotienten dividirt gibt den Divisor.

1. Hieraus erklärt sich die Probe der Division.

2. Für die Addition und Multiplikation hat man noch eine besondere Art von Probe, die sogenannte Neunerprobe, die weniger ihres praktischen Nutzens, als der Theorie wegen merkwürdig ist. Sie gründet sich darauf, daß, da 9 der höchste Einer ist, alle Zahlen über 9 mit solchen Ziffern geschrieben werden, die, in ihrer einfachen Bedeutung genommen, zusammen eben so viel ausmachen, als die Zahl selbst über 9 oder über ein Produkt von 9 ist; daher auch alle Produkte von 9 aus solchen Zahlen bestehen, die, als Einer betrachtet, zusammen wiederum 9 oder ein Produkt von 9 ausmachen. Wenn man also bey einer Additionsrechnung 1) von den summirenden Zahlen, 2) von der Summe so vielmal 9 wegnimmt, als es darin enthalten ist, so müssen die Reste von beyden einander gleich seyn, wenn

die Rechnung richtig ist. — Bey einer Multiplikations-Rechnung muß man sowohl aus dem Multiplikandus, als aus dem Multiplikator, so vielmal 9 wegnehmen, als es darin enthalten ist; alsdann die Reste von beyden zusammen multipliciren, und von den Zahlen dieses Produkts, wenn sie mehr als 9 ausmachen, wiederum 9 abziehen, und den Rest zur Seite anmerken. Endlich muß man auch aus dem Hauptprodukte so vielmal 9 wegnehmen, als es darin enthalten ist; der Rest, der hier übrig bleibt, wird dem vorigen gleich seyn, wofern die Rechnung richtig ist. S. meine Anweisung zur Rechenk. §. 22. u. 38.

Wenn man sich bey dieser Probe gerade um 9 oder um ein Produkt von 9 verrechnet — und das geschieht schon, wenn man die Ziffern einer Zahl in einer unrichtigen Ordnung schreibt, z. B. 19 statt 91 — so zeigt die Probe den Fehler nicht an; sie ist also nicht zuverlässig genug.

3. Etwas ähnliches gilt von der sogenannten Eilfer-Probe, die einen Fehler von 11 oder einem Produkte dieser Zahl nicht anzeigt. Hierzu kommt, daß sie in der Anwendung mühsamer, als die Neuner-Probe ist, und daher kann sie noch weniger als diese zum praktischen Gebrauch empfohlen werden.

4. Auf eine genaue Kenntniß von dem Verhältniß der verschiedenen Theile einer jeden Rechnungsart unter einander kommt beym Rechnen selbst überaus viel an. Ein großer Theil unsrer Rechnungen besteht in nichts anderm, als in Entwickelung dieser Verhältnisse. Man muß sich daher bemühen, sie recht kennen zu lernen, um in allen vorkommenden Fällen die gehörige Anwendung davon machen zu können.

46. Die vier Species lehren also schon auf eine vielfache Weise, wie sich aus gewissen Zahlen andre, die von jenen abhängig sind, herausbringen lassen; und das heißt überhaupt rechnen. Die Art, wie die unbekannte oder gesuchte Zahl zu finden ist, hängt von ihrem Verhältniß zu den gegebenen ab; und dieses kann entweder willkührlich angenommen werden, oder es wird durch die Beschaffenheit des Gegenstandes, auf welchen die Rechnung angewandt werden soll,

bestimmt. Ueberhaupt aber stellen die vier Species bey weitem nicht alle möglichen Verhältnisse gegebener oder bekannter Zahlen zu den gesuchten oder unbekannten dar.

47. So wie Zahlenbegriffe sich mit allem, was Gegenstand unserer Vorstellungen werden kann, verbinden lassen, so können auch Rechnungen in Beziehung auf gewisse Gegenstände, die bey den Zahlen gedacht werden sollen, angestellt werden. In diesem Fall aber ist das Verhältniß der unbekannten zu den bekannten Zahlen nicht mehr ganz willkührlich, sondern hängt mehr oder weniger von der Beschaffenheit des Gegenstandes ab. Man muß daher bey Rechnungen dieser Art gehörig überlegen, welche Rechnungsart die Natur des Gegenstandes erfordert. Es wird also zu solchen Rechnungen ebensowohl Kenntniß der Rechnungsarten überhaupt, als des Gegenstandes, wovon die Rede, erfordert.

48. Wenn man mit dem Begriff einer Zahl noch den einer besondern Art von Dingen verbindet, so pflegt man diese Verbindung zweyer Begriffe eine benannte Zahl zu nennen; und Rechnungen, die sich auf bestimmte Arten von Dingen beziehen, heißen Rechnungen in benannten Zahlen. Streng genommen faßt diese Benennung einen Widerspruch in sich. Denn der Begriff einer Zahl schließt jeden Begriff einer besondern Art von Dingen aus; und verbindet man diesen damit, so bleiben es immer zwey verschiedene Begriffe, von denen nur der erstre in der Rechnung selbst gebraucht werden kann. Alle Rechnungen geschehen mit sogenannten unbenannten Zahlen.

49. Indessen gibt es viele Dinge des gemeinen Lebens, auf welche man oft genöthigt ist, die Rechnung der vier Species anzuwenden. Man hat es daher der

rth gehalten, in den Elementarbüchern der

Arithmetik die Anwendung der vier Species auf diese Dinge, die man vorzüglich unter die Rubriken von Münze, Maaß und Gewicht brachte, besonders abzuhandeln, und so ist die Unterscheidung dieser Species in Rechnungen mit unbenannten und in Rechnungen mit benannten Zahlen entstanden. Die letztern aber sind keine andern Rechnungen als die erstern, nur sind sie meistens zusammengesetzter, als diese.

50. Mit den Benennungen der Zahlen hat man in der Rechnung selbst nichts zu thun; sie sollen uns daher nur erinnern, welchen Arten von Größen die Zahlen untergelegt sind, um den Gang der Rechnung bestimmen zu können. Eben so wenig findet man durch die Rechnung irgend eine Benennung einer Zahl, sondern nur eine unbenannte Zahl, deren Benennung nach dem ganzen Zusammenhange der Aufgabe und der Rechnung zu bestimmen ist.

51. Uebrigens ergibt sich aus dem Begriff der Rechnungen selbst das Verfahren, welches man bey Anwendung derselben auf bestimmte Arten von Gegenständen zu beobachten hat.

a) Die Addition erfordert, daß die summirenden Größen von einerley Art sind, weil durch die Benennung der Werth der Einheit bestimmt wird, und nur Einheiten von einerley Werth in einer Zahl gedacht werden können. Enthält daher eine Aufgabe Größen von verschiedener Art — z. B. Thaler, Groschen, Pfennige — so müssen sie von einander abgesondert und jede derselben besonders addirt werden. Dadurch erhält man so viel verschiedene Summen, als verschiedenartige Größen vorhanden sind, und von denselben Benennungen, welche diese haben. Mit den Summen der kleinern Größen muß dann öfters noch eine *Reduction vorgenommen* werden, wodurch man

geht, mit einer Zahl = der gegebenen Menge von dieſen multiplizirt.

Hingegen um Groſchen in Thaler zu verwandeln, oder Größen einer kleinern Art auf größere zurückzubringen, muß man in die gegebene Menge der erſtern mit ſo viel, als von denſelben auf eine einzelne Größe der letztern Art geht, dividiren.

1. Es iſt zum mindeſten eine ſehr verkehrte Art ſich auszudrücken, wenn man, wie es oft geſchieht, ſagt, daß, um Thaler in Groſchen zu verwandeln, man die Thaler mit 24, oder wohl gar mit 24 Groſchen multipliziren müſſe. Denn das erſtere gibt zum Produkt Thaler, nicht Groſchen, und das letztere hat gar keinen Sinn.

2. Bey der Reduction der Groſchen auf Thaler muß der Diviſor benannt gedacht werden. Der Sinn iſt: ſo vielmal 24 Groſchen in der gegebenen Menge von Groſchen enthalten ſind, ſo viel Thaler können aus derſelben erhalten werden. Der Quotient iſt in dieſem Fall eigentlich unbenannt, und es wird die Benennung nur der Aufgabe gemäß auf ihn übertragen.

3. Wenn der Werth einer Größe durch mehrere Arten kleinerer Größen beſtimmt wird, z. B. der Dukaten zu 5 Gulden 30 Kr. gerechnet, ſo hat man, bey der Verwandlung der größern in die kleinern, eine zuſammengeſetzte Multiplikation — man müßte z. B. um Dukaten in Gulden und Kr. zu verwandeln, 5 G. 30 Kr. mit der Anzahl der Duk. multipliziren; ſollen hingegen die kleinern auf die größern zurückgeführt werden, ſo müſſen jene zuerſt auf eine einzige Benennung gebracht, und dann mit der erforderlichen Zahl dividirt werden. Z. B. um Gulden u. Kr. auf Duk. zu bringen, könnte man jene insgeſammt in Kreuzer verwandeln, und dann durch 330, als den Werth eines Dukatens in Kreuzern, dividiren.

4. In andern Fällen kann die Reduction der verſchiedenen Größen auf einander noch beſondere Rückſichten erfordern; z. B. wenn in Rechnungen, die ſich auf Zeitbeſtimmungen beziehen, Monate in Tage, oder Tage in Monate verwandelt werden ſollen. Hier kann man nicht immer gleich viel Tage auf einen Monat rechnen, da die Mo-

nate von ungleicher Länge sind; sondern es kommt darauf an, welcher Monat in Tage zu verwandeln ist, oder auf welchen die Tage zurückgeführt werden sollen; und dieß kann öfters auf eine doppelte Art bestimmt werden. Soll z. B. das Alter eines Menschen gesucht werden, der 1763 den 18. Sept. 4 Uhr Nachmittags gebohren, und 1816 den 8. April 3 Uhr des Morgens gestorben ist, und man macht dazu folgenden Ansatz:

1815 Jahre 3 Mon. 7 Tag. 3 St.
1762 — 8 — 17 — 16 —

so muß bey der Subtraction der Tage ein Monat geborgt werden; dies ist hier eigentlich der dritte, der März, der 31 Tage hat. Man darf aber, wenn man die von dem Menschen wirklich durchlebten vollen Monate und Tage finden will, nicht den März oder 31 Tage nehmen, sondern man muß denjenigen Monat, in welchem er gebohren ist, den September, folglich nur 30 Tage, rechnen — wobey die Differenz 19 Tage ist. Rechnet man hingegen, wie es im gemeinen Leben gewöhnlich ist, von der Mitte des einen Monats bis zur Mitte des nächsten, z. B. vom 18. Sept. bis 18. Oct., einen vollen Monat, so muß man die Tage des geborgten Monates selbst in Rechnung bringen, also hier 31 Täge; wobey die Differenz 20 Tage wird. Und da die letztre Art die Länge der Monate zu bestimmen in denjenigen Fällen angewandt zu werden pflegt, wo man nicht zu borgen nöthig hat, so kann man sie, der Gleichförmigkeit wegen, füglich in allen Fällen beybehalten.

Eben so kann man da, wo Tage auf einen Monat zurückgeführt werden sollen, auf eine verschiedene Art verfahren, indem man sich entweder nach demjenigen Monate richtet, in welchen die Geburt eines Menschen oder der Anfang eines Zeitraums fällt, oder nach demjenigen, welcher zu den übrigen hinzuaddirt werden soll.

Ueberhaupt aber erhellet hieraus, daß die Bestimmung des Alters eines Menschen oder der Größe eines Zeitraums nach Jahren, Monaten u. Tagen keine große Genauigkeit gibt, wenn man nicht weiß, welche Monate gemeint sind. Es könnte wohl seyn, daß das Alter zweyer Personen, auf diese Art ausgedrückt, gleich groß zu seyn schiene, und doch in der That um ein paar Tage verschieden wäre. Noch weniger ließ sich da eine Genauigkeit errei-

chen, wo man mehrere solcher Angaben, z. B. das Alter der verschiedenen Mitglieder einer Familie, zusammen addiren wollte. Hier könnte man weder die Tage mit Sicherheit auf Monate, noch die Monate auf Jahre zurückbringen, da nicht jede Anzahl von 12 Monaten für ein Jahr zu rechnen wäre.

53. Bey zusammengesetztern Aufgaben, die zu ihrer Auflösung mehr als eine der vier Species erfordern, muß die Ordnung, in welcher die verschiedenen Rechnungsarten anzuwenden sind, in jedem Fall durch gehörige Ueberlegung besonders bestimmt werden. Allgemeine Vorschriften lassen sich darüber nicht geben.

Beyspiele solcher vermischten Aufgaben und ihrer Behandlungsart s. im Rechenb. für B. und Landschulen §. 81. und in der Anweis. zur Rechenkunst §. 78. f.

Dritter Abschnitt.

Von den Brüchen.

54. So wie eine ganze Zahl aus Einheiten zusammengesetzt ist, so kann die Einheit selbst wieder als ein Zusammengesetztes betrachtet werden. Man kann sie sich in so viele Theile getheilt vorstellen, als man will, und sie, in Rücksicht dieser Theile, als ein Ganzes ansehen.

55. Man kann die Theile, in welche die Einheit getheilt ist, alle einander gleich annehmen; und dann läßt sich ein solcher Theil gleichsam als eine Einheit einer geringern Ordnung betrachten, aus welcher wiederum Größen als zusammengesetzt angesehen werden können. Drückt man aber eine Größe in solchen Theilen der Einheit aus, so heißt der Ausdruck ein Bruch (fractio).

56. Soll eine Größe in Theilen der Einheit ausgedrückt werden, so sind zwey verschiedene Begriffe zu bestimmen: 1) die Größe dieser Theile; 2) die Menge derselben. Beydes muß der Bruch angeben; daher ist er ein zusammengesetzter Ausdruck. Die Größe der Theile läßt sich dadurch bestimmen, daß man angibt, wie viele derselben auf die Einheit gehen, oder den wie vielsten Theil der Einheit einer derselben ausmacht; die Menge derselben wird, eben so wie eine Menge von Einheiten, durch eine ganze Zahl ausgedrückt. Daher besteht ein Bruch aus zwey Zahlen — dem Nenner (denominator), welcher die Größe der Theile; und dem Zähler (numerator), welcher die vorhandene Menge derselben bezeichnen soll.

1. Z. B. der Bruch $\frac{5}{9}$ heißt: 5 solcher Theile, deren 9 auf die Einheit gehen, oder, deren jeder ein Neuntel der Einheit ist.

2. Je größer die Anzahl der Theile ist, welche auf die Einheit geht, desto kleiner sind die Theile selbst. Je größer daher der Nenner ist, bey gleichem Zähler, desto kleiner ist der Bruch; und umgekehrt, je kleiner der Nenner, desto größer der Bruch.

57. Man kann sich von der Größe, die durch einen Bruch ausgedrückt ist, auch dadurch eine Vorstellung machen, daß man sich jede Einheit des Zählers durch den Nenner dividirt denkt. Folglich kann der ganze Bruch als ein Quotient betrachtet werden, bey welchem der Zähler den Dividendus, und der Nenner den Divisor ausmacht.

Z. B. $\frac{5}{9}$ ist $= \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = 5 \cdot \frac{1}{9} = 5 : 9$ d. h. 5 Neuntel von einem Ganzen sind eben so viel, als der neunte Theil von 5 Ganzen.

58. Wenn der Zähler eines Bruches kleiner als der Nenner ist, so wird dadurch eine Größe bezeichnet, die von solchen Theilen, *als* der Nenner angibt, weniger *enthält, als auf eine Einheit gehen* — die folglich klei-

ner als die Einheit, oder als das Ganze ist. Ein solcher Bruch heißt ein eigentlicher oder ächter Bruch (fr. vera). Ist hingegen der Zähler eben so groß oder größer als der Nenner, so wird im ersten Fall eine Größe bezeichnet, die eben so viel Theile enthält, als die Einheit selbst; und im letzten eine Größe, die mehr Theile, als die Einheit in sich faßt; jene ist folglich eben so groß, diese größer als die Einheit oder als ein Ganzes — und solche Brüche heißen uneigentliche oder unächte Brüche (fr. spuriae).

Da eine jede Zahl entweder kleiner, oder eben so groß, oder größer als die Einheit seyn muß: so können alle Zahlen durch die Form eines Bruchs ausgedrückt werden.

59. Da ein Bruch gerade ein Ganzes ist, wenn Zähler und Nenner gleich sind, so kann man aus einem Bruch, dessen Zähler größer als der Nenner ist, die Menge der in ihm enthaltenen Ganzen finden, wenn man mit dem Nenner in den Zähler dividirt.

Wie müssen Zähler und Nenner eines Bruches beschaffen seyn, wenn der Bruch gerade 2, oder 3, oder 4, oder n Ganze ausdrücken soll?

60. Umgekehrt kann man eine ganze Zahl in einen Bruch verwandeln, wenn man eine beliebige Zahl zum Nenner nimmt, und das Produkt derselben mit der ganzen Zahl zum Zähler macht. Denn dividirt man alsdann mit dem Nenner in den Zähler, so erhält man wieder die ganze Zahl.

Man kann also dieselbe ganze Zahl durch unzählige Brüche ausdrücken, da man jede beliebige Zahl zum Nenner annehmen kann.

61. Eben so kann man auch jeden eigentlichen Bruch auf unzählige Weise verändern, ohne daß die dadurch ausgedrückte Größe sich ändert: man braucht nur die Art der Theile zu verändern, und dafür so viel*mal mehr* oder weniger derselben zu nehmen, als man *sie verkleinert* oder vergrößert. Dieß läßt sich dadurch

bewerkstelligen, daß man den Zähler und Nenner mit einerley Zahl multiplizirt oder dividirt. Das letztre heißt noch besonders einen Bruch heben.

62. Das Heben gewährt den Vortheil, daß es die Brüche in kleinern Zahlen darstellt, wodurch die anderweitige Rechnung mit denselben leichter, und unsere Vorstellung ihrer Größe in vielen Fällen deutlicher wird. Es lassen sich aber nur solche Brüche heben, deren Zähler und Nenner einen gemeinschaftlichen Divisor haben, oder, wenn sie in ihre Factoren zerlegt werden, gleiche Factoren enthalten. Z. B. $\frac{45}{60} = \frac{3 \cdot 15}{4 \cdot 15} = \frac{3}{4}$.

63. Ein gewöhnliches Verfahren, den gemeinschaftlichen Divisor des Zählers und Nenners zu finden, besteht darin, daß man mit dem Zähler in den Nenner dividirt; ferner mit dem Rest in den vorhergehenden Divisor; mit dem abermaligen Rest wieder in den vorhergehenden Divisor, und so fort bis die Division ohne Rest aufgeht, welches einmal geschehen muß. Der letzte Divisor ist dann die Zahl, durch welche sich der Bruch heben läßt.

1. Dieses Verfahren gründet sich darauf, daß, wenn eine ganze Zahl, die wir a nennen wollen, in einer andern aufgeht, sie auch in jedem Produkt derselben mit einer ganzen Zahl, ingleichen in jeder Zahl, die aus einem solchen Produkt und der Zahl a selbst oder einem Vielfachen derselben zusammengesetzt ist, aufgeht. Es sey z. B. $\frac{65}{546}$ gegeben, so gibt das beschriebene Verfahren folgende Rechnung:

65) 546 | 8
520
26 | 65 | 2
52
13 | 26 | 2
26
..

wo 13 der letzte Divisor, folglich die Zahl ist, durch welc sich der Bruch heben läßt. Denn da 13 in 26 aufgeht, geht es auch in 2 . 26 d. i. 52 auf; desgleichen in 52 + = 65; folglich auch in 8 . 65 = 520; und in 520 + 2 . = 546.

2. Ist der letzte Divisor bey diesem Verfahren = 1, ist es ein Zeichen, daß sich der Bruch nicht heben läßt.

3. Daß man aber durch dieses Verfahren nicht bi überhaupt eine Zahl findet, durch welche sich der Bruch l ben läßt, sondern daß dieses auch die größte ist, dm welche es geschehen kann, beruht darauf, daß zwey Zahle von denen keine in der andern aufgeht, keinen größern g meinschaftlichen Divisor haben können, als den Rest, w cher bey der Division der größern durch die kleinere übr bleibt. (Vergl. die allgemeine Erläuterung dieses Verfa rens durch Buchstabenrechnung weiter unten §. 188.)

4. Eine Zahl, die keinen andern Divisor als sich sel und die Einheit hat, heißt eine Primzahl; und sol Zahlen, die zwar keine Primzahlen sind, aber keinen g meinschaftlichen Divisor haben, heißen relati Primzahlen oder Primzahlen unter sich (num primi inter se).

5. Mit der Theorie der Primzahlen haben sich die gr ten Analysten viel beschäftigt, und mancherley merkwürdi Eigenheiten derselben dargethan; aber es ist ihnen noch ni gelungen ein allgemeines Gesetz, nach welchem ihre Fol sich bestimmen ließe, oder nach welchem sie ohne Ausnah gefunden werden könnten, zu entdecken.

6. Für das Heben der Brüche lassen sich noch man besondere Regeln geben, dergl. meine Anweis. zur R chenk. §. 106. enthält.

7. Das Heben ist nicht ein Verfahren, das nur b gewissen Rechnungsarten anzuwenden wäre, sondern wov man überall Gebrauch machen kann, wo es die Beschaff heit eines Bruches gestattet.

64. Die Veränderungen, die sich mit den Br chen vornehmen lassen, ohne daß der Werth derselb sich ändert (61), gestatten auch, daß Brüche von u *gleichen* Nennern in andere von gleichen Ne

nern verwandelt, oder, wie man sagt, auf einerley Benennung gebracht werden können — ein Verfahren, das man in der Bruchrechnung öfters anzuwenden genöthigt ist. Um dieses zu bewerkstelligen, kommt es darauf an, den Nenner eines jeden der zu verändernden Brüche mit einer solchen Zahl zu multiplizieren, daß die Produkte gleich werden. Dieß kann geschehen, wenn man jeden Nenner mit allen übrigen Nennern d. i. mit dem Produkt derselben multiplizirt. Mit derselben Zahl aber, mit welcher man den Nenner eines Bruchs multiplizirt, muß auch der Zähler multiplizirt werden, damit die Größe des Bruches sich nicht ändere.

65. Der gemeinschaftliche Nenner wird in diesem Fall ein Produkt aus allen Nennern der gegebenen Brüche. In vielen Fällen aber kann er eine kleinere Zahl werden, wenn nehmlich die gegebenen Nenner schon gleiche Factoren enthalten. Alsdann läßt sich der kleinste gemeinschaftliche Nenner dadurch finden, daß man jeden der gegebenen Nenner in seine kleinsten Factoren zerlegt, und diesen diejenigen aus den Factoren der übrigen Nenner beyfügt, die, in Vergleich mit diesen, noch fehlen.

1. Wenn z. B. die Brüche $\frac{8}{15}\ \frac{7}{24}\ \frac{5}{18}\ \frac{3}{20}$ gegeben sind, so ist $15 = 3 \cdot 5$; $24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$; $18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$; $20 = 2 \cdot 2 \cdot 5$. Hier fehlen zu den Factoren von 15 aus den Factoren von 24 noch $2 \cdot 2 \cdot 2$, und aus den Factoren von 18 noch 3; also zusammen $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$. Diese geben mit den Factoren von 15 das Produkt $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 360$ als den kleinsten gemeinschaftlichen Nenner. Hiernach werden den Factoren von 24 noch zugesetzt $3 \cdot 5$; den Factoren von 18 noch $2 \cdot 2 \cdot 5$; den Factoren von 20 noch $2 \cdot 3 \cdot 3$ und die Brüche erhalten nun folgende Gestalt:

$$\frac{8}{15} = \frac{8 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3}{3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{8 \cdot 24}{15 \cdot 24} = \frac{192}{360}$$

$$\frac{7}{24} = \frac{7 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{7 \cdot 15}{24 \cdot 15} = \frac{105}{360}$$

$$\frac{5}{18} = \frac{5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5}{2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5} = \frac{5 \cdot 20}{18 \cdot 20} = \frac{100}{360}$$

$$\frac{3}{20} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3}{2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{3 \cdot 18}{20 \cdot 18} = \frac{54}{360}$$

2. In manchen Fällen kann die Zerlegung der Nenner in die kleinsten Factoren ihre Schwierigkeiten haben. Dann ist es gut sich sogenannter Factoren-Tafeln zu bedienen.

3. Die Methode, die Nenner in eine Reihe zu stellen und mit einer Zahl zu dividiren, die wenigstens in zweyen derselben aufgeht, u. s. w. — wodurch man gleichfalls eine Zerlegung derselben zu Stande bringt — s. in meinem Rechenb. für Bürger- und Landsch. §. 101. No. 3.

66. Brüche auf einerley Benennung zu bringen, ist ein gutes Mittel ihre Größe gegen einander zu bestimmen. Denn bey gleichen Nennern verhalten sich Brüche gegen einander wie ihre Zähler, d. h. der eine ist so vielmal größer als der andere, so vielmal sein Zähler größer als der des andern ist. Haben Brüche gleiche Zähler und ungleiche Nenner, so verhalten sie sich umgekehrt wie ihre Nenner, d. h. derjenige Bruch, welcher den kleinsten Nenner hat, ist so vielmal größer als der andere, so vielmal sein Nenner kleiner, als der Nenner des andern ist.

67. Gibt man der Einheit als dem Ganzen, worauf sich der Bruch bezieht, noch eine besondere Benennung (z. B. Thaler, Pfunde, oder 100 Thaler u. dergl.), so erhält der Bruch noch einen besondern Werth.

Will man den Werth eines Bruchs in Größen einer kleinern Art ausdrücken, so braucht man nur das Ganze, auf welches sich der Bruch bezieht, in Größen der kleinern Art zu verwandeln, diese mit dem Zähler zu multipliziren und das Produkt durch den Nenner zu dividiren. Z. B. $\frac{5}{8}$

Zentn. ist $= \frac{100 \cdot 5}{8}$ Pfund $= 62\frac{4}{8}$ Pfund $=$ 62 Pf. 16 Lth. (wenn der Zentn. zu 100 Pf. gerechnet wird).

68. Die vier Species in Brüchen lassen sich in doppelter Hinsicht betrachten, je nachdem man Brüche mit ganzen Zahlen, oder lauter Brüche mit einander in Verbindung bringt.

69. Da es bey dem Addiren und Subtrahiren darauf ankommt, daß die Größen, deren Summe oder Unterschied bestimmt werden soll, von einerley Art sind: so kann man eine ganze Zahl und einen Bruch nicht anders addiren, oder subtrahiren, als wenn man sie in Größen von einerley Art verwandelt. Dieß geschieht, wenn man die ganze Zahl in einen Bruch von dem Nenner des gegebenen verwandelt (60). Alsdann sucht man nur die Summe oder den Unterschied der Zähler, und behält den gemeinschaftlichen Nenner bey. Denn die Zähler zeigen die vorhandene Menge der Theile und die Nenner ihre Art oder Größe an. Durch die Addition oder Subtraction aber soll die Summe oder der Unterschied der vorhandenen Mengen bestimmt werden, wobey die Art der Größe unverändert bleibt.

Eine ganze Zahl und ein eigentlicher Bruch werden öfters nur so addirt, daß man sie zusammenstellt. Z. B. $5 + \frac{1}{4}$ ist $= 5\frac{1}{4}$.

70. Bey der Subtraction wird gewöhnlich nur der Bruch von der ganzen Zahl, nicht, umgekehrt, die ganze Zahl von dem Bruch abgezogen. Im letztern Fall würde der Unterschied negativ werden, wenn der Bruch ein eigentlicher oder überhaupt kleiner als die abzuziehende ganze Zahl wäre. Wie aber eine negative Größe zu betrachten sey, wird weiter unten erklärt.

Will man den Unterschied nicht in einem einzigen Ausdruck (einem *uneigentlichen* Bruch) haben, und der Subtrahendus ist ein eigentlicher Bruch, so borgt man nur 1 von

der ganzen Zahl, und verfährt damit wie vorhin mit dem ganzen Minuendus. (S. meine Anweis. 120 ff.).

71. Wenn man lauter Brüche zu addiren oder zu subtrahiren hat, so muß man sie ebenfalls erst in Größen von einerley Art verwandeln, das heißt, sie auf einerley Benennung bringen, und dann nur die Summe oder den Unterschied der Zähler suchen, und den gemeinschaftlichen Nenner ungeändert beybehalten.

72. Ein Bruch wird mit einer ganzen Zahl multiplizirt, wenn man seinen Zähler mit der ganzen Zahl multiplizirt und den Nenner unverändert beybehält. Denn durch die Multiplikation soll die vorhandene Menge der Theile so vielmal genommen werden, als der Multiplikator anzeigt; die Art derselben aber nicht geändert werden.

73. Behält man dafür die vorhandene Menge der Theile unverändert bey, ändert aber die Art derselben, und zwar so, daß man sie so vielmal vergrößert, als man vorhin ihre Menge vermehrt hat, d. i. als der Multiplikator anzeigt: so erhält man, der Größe nach, eben so viel, als vorhin. Die Art der Theile aber wird so vielmal vergrößert, als man den Nenner durch Dividiren verkleinert. Man kann also einen Bruch auch mit einer ganzen Zahl multipliziren, wenn man seinen Nenner mit der ganzen Zahl dividirt, und den Zähler ungeändert beybehält.

74. Umgekehrt, wenn eine ganze Zahl mit einem Bruch multiplizirt werden soll, so läßt sich schon erwarten, daß man auf eben die Art verfahren müsse, als wenn man einen Bruch mit einer ganzen Zahl zu multipliziren hat; weil es in Absicht auf die Factoren *einerley* ist, in welcher Ordnung sie genommen werden. *Man muß also die* ganze Zahl mit dem Zähler des Bruchs

multipliziren, und den Nenner unverändert beybehalten, d. h. das Produkt durch den Nenner dividiren.

75. Es entsteht aber hierbey die Frage: was heißt eigentlich eine Größe mit einem Bruch multipliziren? Die Antwort hierauf ergibt sich aus dem Begriff der Multiplikation: Das Produkt ist die Zahl, welche den Multiplikandus so vielmal enthalten soll, als der Multiplikator anzeigt, d. h. als der Multiplikator Einheiten hat. Ein Bruch aber drückt nur eine gewisse Anzahl von Theilen der Einheit aus. Ist also der Multiplikator ein Bruch, so muß der Multiplikandus in so viel gleiche Theile getheilt werden, als die Einheit in dem Bruch, und von diesen müssen so viele genommen werden, als der Bruch Theile der Einheit enthält; d. h. der Multiplikandus muß mit dem Nenner des Bruchs dividirt, und mit dem Zähler desselben multiplizirt werden, oder, welches einerley ist, zuerst mit dem Zähler multiplizirt, und dann mit dem Nenner dividirt werden.

1. Z. B. eine Zahl mit $\frac{3}{8}$ multipliziren, oder sie $\frac{3}{8}$ mal nehmen, heißt den achten Theil derselben 3 mal nehmen. Dieß ist eben so viel als $\frac{3}{8}$ der Zahl nehmen. Die Rechnung ist also eben dieselbe als: den Werth eines Bruchs zu bestimmen, wenn die Einheit noch eine besondere Benennung erhält (67).

2. Ist der Multiplikator ein eigentlicher Bruch, so muß das Produkt kleiner werden, als der Multiplikandus.

3. Es ist ein sehr gewöhnlicher Irrthum, zu glauben, wenn ein Theil irgend einer Größe durch einen Bruch bezeichnet wird, man müsse die Größe durch diesen Bruch dividiren, um den Werth des Theils zu finden, da sie doch mit ihm multiplizirt werden muß. Z. B. um $\frac{3}{8}$ von 1000 Rthlr. zu erhalten, müssen diese mit $\frac{3}{8}$ multiplizirt, nicht dividirt werden.

4. Man kann sich auch denken, daß, wenn man eine Zahl, die *mit einem Bruch* multiplizirt werden soll, blos *mit dem Zähler desselben* multiplizirt, das Produkt so viel-

mal zu groß wird, als der Zähler den ganzen Bruch an Größe übertrifft, d. i. so vielmal, als die Größe des Nenners bezeichnet. Um es also auf seine wahre Größe zurück zu bringen, muß es mit dem Nenner dividirt werden.

76. Setzt man an die Stelle der ganzen Zahl auch einen Bruch, und multiplizirt also einen Bruch mit dem andern, so muß der Multiplikandus ebenfalls mit dem Nenner des Multiplikators dividirt, und mit dem Zähler desselben multiplizirt werden. Nun wird ein Bruch mit einer Zahl dividirt, wenn man seinen Nenner mit derselben multiplizirt (79); und ein Bruch wird mit einer Zahl multiplizirt, wenn man seinen Zähler mit derselben multiplizirt (72). Daher die bekannte Regel, daß man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliziren müsse.

77. Ein Bruch kann aber auch durch eine Zahl dividirt werden, wenn man seinen Zähler durch dieselbe dividirt; und er kann multiplizirt werden, wenn man seinen Nenner dividirt. Wenn daher zwey Brüche zusammen multiplizirt werden sollen, so kann man auch den Zähler und Nenner des einen durch den Nenner und Zähler des andern dividiren.

1. Das letztere Verfahren läßt sich jedoch nur da anwenden, wo die Division ohne Rest aufgeht; sonst erhält man unreine Brüche (91.).

2. In manchen Fällen kann man auch blos den Zähler verändern und den Nenner ungeändert lassen; oder den Nenner verändern und den Zähler ungeändert lassen.

Z. B. $\frac{15}{16} \cdot \frac{2}{3} = \frac{30}{16} : 3 = \frac{10}{16}$.

$\frac{18}{35} \cdot \frac{5}{9} = \frac{18}{7} : 9 = \frac{18}{63}$.

3. Um das Produkt jederzeit in den kleinsten Zahlen zu finden, ist es am besten, sowohl die Zähler, als die *Nenner, jede für sich*, zusammen zu stellen, und dann jene, *so viel es angeht*, gegen diese aufzuheben.

Z. B. $\frac{55}{72} \cdot \frac{27}{35} = \frac{55 \cdot 27}{72 \cdot 35} = \frac{11 \cdot 3}{8 \cdot 7} = \frac{33}{56}$

Dieß ist besonders vortheilhaft, wenn man mehr als zwey Factoren hat.

Z. B. $\frac{4}{7} \cdot \frac{5}{12} \cdot \frac{14}{15} \cdot \frac{6}{11} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 14 \cdot 6}{7 \cdot 12 \cdot 15 \cdot 11} = \frac{4}{33}$.

4. Sind die Factoren lauter eigentliche Brüche, so wird das Produkt kleiner als jedes derselben.

78. Einen Bruch durch eine ganze Zahl dividiren heißt die in dem Bruch ausgedrückte Menge von Theilen dividiren, wobey die Art derselben ungeändert bleibt. Die Menge der Theile aber drückt der Zähler, und die Art derselben der Nenner aus. Folglich muß man den Zähler durch die ganze Zahl dividiren, und den Nenner ungeändert lassen.

79. Anstatt die Menge der Theile durch die Division zu vermindern, ohne die Art der Theile zu ändern, kann man auch die Art der Theile so vielmal verkleinern, und die Menge derselben ungeändert lassen. Dieß geschieht, wenn man den Nenner des Bruchs mit der ganzen Zahl multiplizirt und den Zähler ungeändert läßt. Daher ist dieses auch ein Mittel, einen Bruch durch eine ganze Zahl zu dividiren.

Das letztere Verfahren ist das allgemein übliche, weil es in allen Fällen anwendbar ist, das erstere hingegen meistens auf einen unreinen Bruch führen würde.

80. Es gibt also eine doppelte Art einen Bruch mit einer ganzen Zahl zu multipliziren (72 f.) und zu dividiren; und auch daraus folgt, daß ein Bruch, im Zähler und Nenner mit einerley Zahl multiplizirt oder dividirt, seine Größe nicht ändert (61). Denn durch die Multiplikation des Zählers wird er eben so vielmal vergrößert, als durch die Multiplikation des Nenners verkleinert; und durch die Division des Zählers so vielmal verkleinert, als durch die Division des Nenners vergrößert.

der Brüche angewendet werden. Es führt aber, wenn die Division nicht aufgeht, auf unreine Brüche.

1. Man kann auch bey der Division der Brüche, auf ähnliche Art wie bey der Multiplikation, blos den Zähler verändern und den Nenner ungeändert lassen; oder den Nenner verändern und den Zähler ungeändert lassen. Z. B. $\frac{12}{35} : \frac{4}{7} = \frac{3}{35} \cdot 7 = \frac{21}{35}$ ingl. $\frac{12}{35} : \frac{4}{7} = \frac{12}{140} \cdot 7 = \frac{12}{20}$.

2. Da ein Bruch in Vergleich mit einem andern sehr klein, folglich sehr vielmal in ihm enthalten seyn kann, so kann der Quotient zweyer eigentlichen Brüche eine ganze Zahl von beträchtlicher Größe seyn. Ist überhaupt der Divisor kleiner als der Dividendus, so ist der Quotient größer als 1.

86. Wenn uneigentliche Brüche in den Rechnungen vorkommen, so verfährt man mit ihnen eben so, wie mit eigentlichen — denn wesentlich sind beyde nicht von einander verschieden. In vielen Fällen kann es vortheilhaft seyn, sie aufzulösen, d. i. die in ihnen enthaltenen Ganzen von dem eigentlichen Bruch zu trennen, und die Rechnung mit den ganzen Zahlen und eigentlichen Brüchen anzustellen.

87. Bey der Addition und Subtraction kann man alsdann die ganzen Zahlen und die eigentlichen Brüche, jede für sich besonders, addiren oder subtrahiren, und braucht bey der erstern Rechnungsart nur die Ganzen, die etwa in der Summe der Brüche enthalten wären, zu der Summe der Ganzen hinzuzuthun. Bey der letztern kann es vorkommen, daß man von den Ganzen eins borgen muß.

88. Bey der Multiplikation muß man sich hüten, bloß die Ganzen und die Brüche, jede unter sich, zu multipliziren, sondern es müssen auch die Ganzen eines jeden Factors mit dem Bruch des andern multiplizirt werden.

Z. B. $3\frac{1}{2} \cdot 4\frac{1}{3} = 12 + \frac{4}{6} + \frac{3}{6} + \frac{1}{6} = 12\frac{8}{6}$.

89. In der Division ist es am wenigsten vortheilhaft, von dieser Auflösung uneigentlicher Brüche Gebrauch zu machen; wenigstens darf es nie mit dem Divisor geschehen, weil dieser überhaupt nicht zertheilt werden darf (43, d.). Dagegen geht es wohl an, erst in die ganze Zahl des Dividendus, und dann in den Bruch desselben zu dividiren, und die Quotienten zu addiren.

90. Sind statt der uneigentlichen Brüche die ganzen Zahlen und eigentlichen Brüche selbst gegeben, so beilt man entweder diese bey, oder man verwandelt, umkehrt, sie in uneigentliche Brüche. (Ein mehreres hierber s. in meiner Anweis. zur Rechenk. §. 161 ff.)

91. Wenn endlich Brüche so ausgedrückt werden, daß entweder der Zähler, oder der Nenner, oder beyde wiederum einen Bruch enthalten, so muß man diese unreinen Brüche, wie sie genannt werden, als Quotienten betrachten, die sich auf gewöhnliche Brüche zurückführen lassen, wenn man den Zähler als Dividendus und den Nenner als Divisor behandelt, und nach den Regeln der Division der Brüche verfährt.

Es ist z. B. $\frac{\frac{1}{2}}{4} = \frac{1}{2} : 4 = \frac{1}{8}$

$$\frac{5}{\frac{2}{3}} = 5 : \frac{2}{3} = \frac{15}{2} = 7\frac{1}{2}$$

$$\frac{2\frac{3}{4}}{9} = 2\frac{3}{4} : 9 = \frac{11}{4} : 9 = \frac{11}{36}$$

$$\frac{3}{8\frac{4}{5}} = 3 : (8\frac{4}{5}) = 3 : \frac{44}{5} = \frac{15}{44}.$$

Man darf unreine und uneigentliche Brüche nicht verwechseln: die unreinen können sowohl eigentliche, als uneigentliche seyn.

92. Man kann die unreinen Brüche als Brüche betrachten, die durch das Heben solcher reinen Brüche entstehen, deren Zähler und Nenner keine ganze Zahl zu

einem gemeinschaftlichen Divisor haben; die sich daher im gewöhnlichen Sinne des Wortes nicht heben lassen. Ein jeder reine Bruch kann in einen unreinen verwandelt werden, und diese Verwandlung läßt sich auf unzählige Weise zu Stande bringen. Indessen würde sie in vielen Fällen von keinem sonderlichen Nutzen seyn.

In den eben angeführten Beyspielen ist

$$\frac{11}{36} = \frac{11:4}{36:4} = \frac{2\frac{3}{4}}{9}; \text{ oder} = \frac{11:9}{36:9} = \frac{1\frac{2}{9}}{4}.$$

$$\frac{15}{44} = \frac{15:5}{44:5} = \frac{3}{8\frac{4}{5}}; \text{ oder} = \frac{15:3}{44:3} = \frac{5}{14\frac{2}{3}}.$$

93. Bisweilen kann dieses Verfahren dazu dienen, einen Bruch in ein paar kleinere zu zerlegen: wenn nehmlich der Nenner dadurch in eine ganze Zahl, der Zähler aber in eine ganze Zahl und einen Bruch verwandelt wird.

Z. B. $\frac{11}{36} = \frac{2}{9} + \frac{\frac{3}{4}}{9} = \frac{2}{9} + \frac{1}{12}$

$$= \frac{1}{4} + \frac{\frac{3}{9}}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12}$$

94. Wird dagegen der Zähler in eine ganze Zahl, und der Nenner in eine ganze Zahl und einen Bruch verwandelt, so würde man einen genäherten Bruch erhalten, wenn man den Bruch im Nenner wegließe; und zwar würde der genäherte Bruch etwas zu groß seyn, weil durch die Weglassung des Bruches der Nenner verkleinert, folglich der Bruch selbst vergrößert wird (56, 2).

Wenn z. B. $\frac{15}{44} = \frac{3}{8\frac{4}{5}} = \frac{5}{14\frac{2}{3}}$ ist, so kommen $\frac{3}{8}$ und $\frac{5}{14}$ dem Bruche $\frac{15}{44}$ nahe; und zwar $\frac{5}{14}$ näher, als $\frac{3}{8}$, weil $\frac{2}{3}$ kleiner als $\frac{4}{5}$ ist. Beyde Brüche sind indessen noch größer als $\frac{15}{44}$.

95. Man könnte aber die Annäherung an den ursprünglichen Bruch noch weiter treiben, wenn man anstatt den Bruch im Nenner wegzulassen, diesen gleichfalls

n Zähler und Nenner mit einerley Zahl dividirte, und war so, daß der Zähler eine ganze Zahl, der Nenner der eine ganze Zahl und ein Bruch würde, und wenn man diesen letzten Bruch wegließe. Z. B.

$\frac{3}{8\frac{2}{2}} = \frac{3}{8\frac{1}{2}}$, wo $\frac{2}{2}$ durch 2 gehoben ist. Wird hier der

Bruch $\frac{1}{2}$ weggelassen, so bleibt $\frac{3}{8\frac{2}{2}} = \frac{3}{\frac{18}{2}} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$; welches dem Bruche $\frac{1}{2\frac{1}{2}}$ näher kommt, als $\frac{3}{8}$, aber kleiner als derselbe ist.

96. Gestattet der letzte Bruch eine nochmalige Division, so kann man dadurch eine noch größere Annäherung erreichen; und überhaupt, wenn man fortfährt auf diese Art den jedesmaligen Bruch, so lange es angeht, in Zähler und Nenner durch einerley Zahl zu dividiren, so erhält man eine Reihe von Brüchen, die dem ursprünglichen immer näher kommen, und abwechselnd größer und kleiner als derselbe sind.

Z. B. $\frac{91}{330} = \frac{91:13}{330:13} = \frac{7}{25+\frac{5}{13}} = \frac{7}{25+\frac{1}{2+\frac{3}{5}}}$

$= \frac{7}{25+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{2}{3}}}} \qquad = \frac{7}{25+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}}}$

Hier ist $\frac{7}{25} > \frac{91}{330}$; $\frac{7}{25+\frac{1}{2}} = \frac{7}{\frac{51}{2}} = \frac{14}{51} < \frac{91}{330}$;

$\frac{7}{25+\frac{1}{2+\frac{1}{1}}} = \frac{21}{76} > \frac{91}{330}$; $\frac{7}{25+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}}$

$= \frac{35}{127} < \frac{91}{330}$. Diese Reihe von Brüchen, $\frac{7}{25}$, $\frac{14}{51}$, $\frac{1}{}$ nähert sich dem Bruch $\frac{21}{76}$ immer mehr; und zieht m bey der letzten Division übrig bleibenden Bruch $\frac{1}{}$ Betrachtung, so ist der ganze Ausdruck dem Bruch $\frac{2}{}$ gleich.

Das Zeichen $>$ bedeutet größer als; umgek bedeutet es kleiner als.

97. Solche Ausdrücke eines Bruches, die man ein fortgesetztes Dividiren der im Nenner entste Brüche erhält, werden mit einem besondern N Kettenbrüche, auch fortlaufende, oder c nuirliche Brüche genannt.

98. Gemeiniglich richtet man die Kettenbrü ein, daß die Zähler der jedesmaligen Brüche $= 1$ den; welches man dadurch erlangt, daß man den vidirenden Bruch durch seinen Zähler dividirt. Dieß auf eine gleiche Reihe von Divisionen, wie das Verfahren bey dem Heben der Brüche, wodurch der te gemeinschaftliche Divisor des Zählers und Nenne funden wird; und so wie man dort bey einem B welcher sich nicht heben läßt, am Ende immer auf Divisor $= 1$ kommt, so auch hier; und dann ist de tenbruch zu Ende. Z. B.

$$\frac{584}{1375} = \frac{1}{2 + \frac{207}{584}} = \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{170}{207}}} = \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 +}}}$$

$$= \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{22}{37}}}}} \qquad = \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 +}}}}}$$

$$= \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\frac{7}{15}}}}}}} \qquad = \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\frac{1}{7}}}}}}}}$$

99. So lange sich ein Bruch noch auf die gewöhnliche Art heben läßt, würde es unzweckmäßig seyn ihn in einen Kettenbruch zu verwandeln, da man durch das Heben den Zweck, ihn in kleinern Zahlen auszudrücken, noch vollkommner, als durch einen Kettenbruch, erreicht. Wenn er sich aber nicht heben läßt, oder, wie die irrationalen Wurzeln, von denen weiter unten die Rede ist, ins unendliche fortgeht, so kann man durch einen Kettenbruch sich genäherte Werthe in kleinern Zahlen verschaffen.

Der Gebrauch der Kettenbrüche schränkt sich aber nicht darauf ein, genäherte Werthe in kleinern Zahlen für andere Brüche zu erhalten; sondern sie gewähren einen noch größern Nutzen bey der Auflösung der Gleichungen und andern Gegenständen der höhern Rechenkunst.

Vierter Abschnitt.

Von den entgegengesetzten Größen.

100. Um sich einen Begriff von dem, was man unter entgegengesetzten Größen zu verstehen habe, machen zu können, muß man einen Blick auf die Beschaffenheit gewöhnlicher Größen, *die einander nicht entgegengesetzt sind, und die man homogene* oder übereinstim-

mende Größen nennen könnte, werfen. Denken wir uns von diesen irgend eine zu einer andern hinzugethan, so ist die dadurch entstandene Größe größer, als jede der beyden Größen einzeln genommen. Es erhält also jede dieser Größen durch die andere einen Zuwachs.

101. Wenn aber ein paar Größen so beschaffen sind, daß die eine durch die Verbindung mit der andern keinen Zuwachs ihrer eigenen Größe erhalten kann, sondern im Gegentheil eine Verminderung oder gänzliche Aufhebung erleidet: so können sie nicht als homogene Größen betrachtet werden; sondern die eine ist als das Gegentheil der andern anzusehen, und solche Größen werden daher entgegengesetzte Größen genannt.

1. Keine Größe kann an und für sich selbst eine entgegengesetzte seyn, sondern nur in Rücksicht einer andern, die ihr Gegentheil ausmacht, so genannt werden.

2. Die Annahme solcher Größen, die einander gegenseitig vermindern oder aufheben, ist nichts Ungereimtes; wir können selbst unter den Gegenständen des gemeinen Lebens Beyspiele dazu finden: 30 Schritte vorwärts und 10 Schritte auf derselben Linie rückwärts gehen, bringt uns nicht um 40, sondern nur um 20 Schritte weiter; Vermögen und Schulden sind ein anderes sehr gewöhnliches Beyspiel. Das Steigen und Fallen des Barometers; Kräfte, die in entgegengesetzter Richtung auf einen Körper wirken, verhalten sich ebenfalls wie entgegengesetzte Größen. Und so kommen häufig Beziehungen vor, in welchen sich ein paar Dinge als entgegengesetzt betrachten lassen. In manchen Fällen kann die Bestimmung ihre Schwierigkeiten haben; dieß gehört nicht hieher, wo nur im Allgemeinen von dem Verhältniß dieser Art von Größen die Rede ist.

102. Um die beyden Arten von Größen, die als entgegengesetzt betrachtet werden, von einander zu unterscheiden, nennt man die einen positive oder bejahende, und die andern negative oder verneinende Größen. Jene werden durch + (plus), diese durch — (*minus*) bezeichnet.

103. Diese Bezeichnung rührt daher, weil eine negative Größe zu einer positiven hinzugethan, sich eben so verhält, als ob sie, als positiv betrachtet, von dieser abgezogen werden sollte.

Nehmlich, wenn zu einer positiven Größe eine gleich große, aber entgegengesetzte hinzukommt, so heben beyde einander auf, oder sind = 0. Z. B. + 7 und — 7 ist zusammen = 0, also ebensoviel, als ob 7 von 7 abgezogen würde.

104. Dieses Verhalten entgegengesetzter Größen gegen einander macht die Grundlage aller Rechnungen mit ihnen aus. Gleichwohl sind die negativen Größen nicht immer als subtractive zu betrachten, indem sie oft Bedingungen oder Beziehungen ausdrücken, die denen der positiven Größen entgegengesetzt sind, ohne daß dabey an Subtraction zu denken ist.

Auch die Zeichen der positiven und negativen Größen muß man noch von den Additions- und Subtractionszeichen, denen sie gleich sind, unterscheiden.

Es soll daher im Folgenden, da wo ein Irrthum entstehen könnte, das Zeichen des positiven oder negativen Werths einer Zahl mit der Zahl selbst in Klammern eingeschlossen und das Rechnungszeichen außerhalb derselben gesetzt werden.

Wenn eine positive Größe im Anfange einer Reihe entgegengesetzter Größen steht, so pflegt man ihr kein Vorzeichen zu geben. Z. B. 7 + (— 4) ist eben so viel als + 7 + (— 4).

105. Wenn es darauf ankommt, zu bestimmen, welche von zwey entgegengesetzen Größen als positiv oder als negativ zu bezeichnen sey, so gilt darüber kein besonderes Gesetz. Die Sache ist willkührlich; oder man richtet sich dabey nach dem, was einmal bey gewissen Gegenständen gebräuchlich ist, oder nach besondern Umständen, *wenn dergleichen* vorhanden sind.

106. Es ist unrichtig, wenn man sagt, die negativen Größen wären weniger als nichts. Denn an und für sich betrachtet haben sie eben so gut einen Werth, als die positiven; und nur in Rücksicht dieser können sie etwa für weniger als nichts angesehen werden. Alsdann aber können auch die positiven in Rücksicht der negativen mit gleichem Recht für weniger als nichts gelten. So sind z. B. Schulden weniger als kein Vermögen; eben so wohl aber ist Vermögen weniger als keine Schulden.

Addition entgegengesetzter Größen.

107. Wenn man lauter positive, oder lauter negative Größen addiren soll, so verfährt man wie bey der gemeinen Addition, und die Summe ist im ersten Fall positiv, im andern negativ. Z. B. die Summe von $+5$, $+8$, $+9$ ist $= +22$; und die Summe von -4, -7, -12 ist $= -23$.

108. Wenn aber zwey entgegengesetzte Größen zusammen addirt werden sollen, so muß man die, welche die wenigsten Einheiten hat, von der andern auf die gewöhnliche Art (als wären es homogene Größen) abziehen, und der Differenz das Zeichen derjenigen Größe geben, von welcher der Abzug geschah.

Z. B. $9 + (-5)$ ist $= +(9-5) = +4$.

$8 + (-12)$ ist $= -(12-8) = -4$.

Denn $+9$ ist $= +5 + (+4)$; $+5 + (-5)$ aber ist $= 0$ (103.); folglich ist $9 + (-5) = 5 + (+4) + (-5) = 0 + 4 = +4$.

Eben so ist $-12 = -8 + (-4)$; $+8 + (-8) = 0$; folglich $8 + (-12) = 8 + (-8) + (-4) = 0 + (-4) = -4$.

109. Wenn mehrere sowohl positive, als negative Größen zusammen addirt werden sollen, so kann man

beyde Arten von einander absondern, und jede derselben besonders addiren. Mit diesen beyden Summen muß man alsdann eben so, wie bey der Addition zweyer entgegengesetzten Größen verfahren.

Z. B. um die Summe von + 7 + 12 − 18 + 14 − 6 − 21 + 4 − 8 zu finden, addire man sowohl + 7 + 12 + 14 + 4, als − 18 − 6 − 21 − 8. Die Summe der positiven Größen ist = + 37; die der negativen = − 53; und die Summe dieser beyden ist = − (53 − 37) = − 16.

Subtraction entgegengesetzter Größen.

110. Um das Verfahren bey der Subtraction entgegengesetzter Größen nicht befremdend zu finden, muß man sich erinnern, daß durch die Subtraction der Unterschied in den Einheiten oder Theilen der Einheit zweyer Zahlen bestimmt werden soll; der Unterschied aber diejenige Größe sey, die, zu dem Subtrahendus hinzugefügt, diesen dem Minuendus gleich macht (41.).

111. Sind beyde Zahlen, der Minuendus sowohl als der Subtrahendus, gleichartig, d. h. beyde positiv, oder beyde negativ, so findet der Charakter des Entgegengesetzten zwischen ihnen nicht statt, und die Subtraction geschieht daher auf eine der gemeinen Subtraction ähnliche Weise. Z. B.

+ 9 − (+ 4) ist = + 5
− 12 − (− 5) ist = − 7.

Denn zu + 4 noch + 5 hinzugethan gibt + 9; und zu − 5 noch − 7 hinzugethan gibt − 12, also sind + 5 und − 7 die gesuchten Unterschiede.

112. Soll aber eine negative Zahl von einer positiven abgezogen werden, so kann der Unterschied nicht wiederum negativ seyn; denn eine negative Zahl zu

einer andern negativen hinzugethan, gibt eine negative Summe; man verlangt aber eine Zahl, die mit der negativen zusammen eine Summe gibt, die der positiven Zahl gleich ist. Soll z. B. — 4 von + 5 abgezogen werden, so verlangt man diejenige Zahl, die mit — 4 zusammen + 5 ausmacht. Nun ist — 4 und + 4 zusammen = 0; folglich ist — 4 + (+ 4) + (+ 5) = + 5; d. h. — 4 + (+ 9) ist = + 5. Also ist + 9 der Unterschied von — 4 und + 5.

113. Der Unterschied einer negativen und positiven Zahl wird also gefunden, wenn man beyde zusammen als gleichartige Zahlen addirt, und der Summe das Zeichen des Minuendus gibt.

114. Dieselbe Regel gilt auch, wenn eine positive Zahl von einer negativen abgezogen werden soll. Es soll z. B. + 3 von — 8 abgezogen werden, so ist der Unterschied — 11; weil + 3 und — 11 zusammen — 8 ausmacht.

115. Ist der Minuendus = 0, so kann man ihn freylich weder für positiv, noch negativ ansehen; aber aus dem Gesagten folgt, daß die Differenz diejenige Größe seyn muß, die mit dem Subtrahendus zusammen Null ausmacht; also die ihm gleiche, aber entgegengesetzte. Z. B. 0 — (— 4) = + 4; 0 — (+ 4) = — 4.

116. Bey diesem Verfahren muß man sich nicht an den Begriff des Abziehens halten, sondern dieses Wort als einen Kunst-Ausdruck nehmen, der so viel heißt, als den Unterschied bestimmen. Auf welche Art der Unterschied zweyer Größen am füglichsten gefunden werde, das hängt von der Beschaffenheit der Größen selbst ab. Er muß aber desto größer seyn, je weiter die Größen gleichsam von einander entfernt sind. Er

muß also zwischen entgegengesetzten größer seyn, als zwischen gleichartigen von derselben Größe. Dieß läßt sich auch durch das Beyspiel von Vermögen und Schulden sehr gut erläutern.

Der Unterschied zwischen 7 Rthlr. und 3 Rthlr. Vermögen, ist 4 Rthlr. Vermögen; zwischen 7 Rthlr. und 3 Rthlr. Schulden ist er 4 Rthlr. Schulden; hingegen zwischen 7 Rthlr. Vermögen und 3 Rthlr. Schulden ist ein Unterschied von 10 Rthlr. Von zwey Personen, von welchen die eine 7 Rthlr. Vermögen und die andere 3 Rthlr. Schulden hat, ist jene um 10 Rthlr. reicher als diese, und diese um 10 Rthlr. ärmer als jene.

117. Um alle 4 Fälle leicht zu übersehen, nehme man folgendes Beyspiel:

Minuendus:	+	12	−	12	+	12	− 12
Subtrah.	+	5	−	5	−	5	+ 5
Unterschied:	+	7	−	7	+	17	− 17

118. Ist bey gleichen Zeichen der Subtrahendus größer als der Minuendus, so bekommt der Unterschied das entgegengesetzte Zeichen. Z. B. es ist + 5 − (+ 12) = − 7. Denn man muß zu + 12 − 7 hinzuthun, um + 5 zu erhalten.

Eben so ist − 5 − (− 12) = + 7.

119. Es ist nicht zu vergessen, daß, wenn von dem Unterschiede zweyer Größen die Rede ist, eigentlich zwey verschiedene Dinge zu verstehen sind: 1) die Größe, die man zu der einen hinzuthun muß, um sie der andern gleich zu machen; 2) die Größe, die man zu der andern hinzuthun muß, um sie der ersten gleich zu machen. Beyde sind einander gleich, aber entgegengesetzt. Z. B. die eine + 4, die andere − 4. Oder, wie man gewöhnlich die Sache betrachtet, muß dieselbe Größe, die den Unterschied zweyer Größen ausmacht, in Rücksicht auf *die eine von diesen als additiv* (positiv), und in Rück-

sicht auf die andere als subtractiv (negativ) angesehen werden.

120. Alle Fälle der Subtraction entgegengesetzter Größen lassen sich unter eine einzige allgemeine Regel bringen:

Man verwandle das Zeichen des Subtrahendus in das entgegengesetzte und addire beyde Größen.

Bey dieser Addition aber muß man nach den Regeln der Addition entgegengesetzter Größen verfahren. Z. B. wenn man, wie vorhin, + 12 von + 5 abziehen soll, und man verwandelt + 12 in — 12, so muß man — 12 + (+ 5) = — 7 setzen.

Multiplikation entgegengesetzter Größen.

121. Bey der Multiplikation entgegengesetzter Größen lassen sich vier Fälle unterscheiden, die man auf folgende Art in einem besondern Beyspiel darstellen kann:

$$+5 \cdot +3 = +15$$
$$-5 \cdot +3 = -15$$
$$+5 \cdot -3 = -15$$
$$-5 \cdot -3 = +15.$$

Die erste Zahl ist hier als Multiplikandus, die andere als Multiplikator zu betrachten.

122. Der erste Fall will so viel sagen, als: + 5 soll 3 mal genommen werden. Das Produkt ist also + 5 + (+ 5) + (+ 5) = + 15. Dieser Fall ist dem der gewöhnlichen Multiplikation gleich.

123. Im zweiten Fall soll — 5 3 mal genommen werden. Daher ist das Produkt — 5 + (— 5) + (— 5) = — 15. Dieser Fall stimmt mit dem Fall der gemeinen Multiplikation überein, wo der Multiplikandus benannt ist; das Produkt erhält alsdann dieselbe Benennung.

124. Im dritten Fall soll + 5 — 3 mal genommen werden, und hier entsteht die Frage: was heißt eine Größe — 3 mal nehmen? Da — 3 das Entgegengesetzte von + 3 ist, so heißt, eine Größe — 3 mal nehmen, so viel, als: sie auf die entgegengesetzte Art 3 mal nehmen, oder: das Entgegengesetzte von ihr 3 mal nehmen. Das Entgegengesetzte von + 5 ist — 5, und dieses 3 mal genommen, gibt — 15; folglich ist + 5 . — 3 = — 15.

125. Hieraus ergibt sich von selbst, wie im vierten Fall — 5 . — 3 = + 15 ist. Es soll nehmlich — 5 auf die entgegengesetzte Art 3 mal genommen, oder, das Entgegengesetzte von — 5 3 mal genommen werden. Das Entgegengesetzte von — 5 aber ist + 5; und dieses 3 mal genommen, macht + 15; folglich ist — 5 . — 3 = + 15.

126. Ein positiver Multiplikator bedeutet also eben so viel, als ein Factor der gemeinen Zahlen. Ein negativer Multiplikator hingegen zeigt an, daß das Entgegengesetzte des Multiplikandus genommen werden, folglich das Produkt das Entgegengesetzte desselben enthalten müsse. Er bezeichnet also nicht bloß, wie viel mal der Multiplikandus zu nehmen sey, sondern auch in welcher Art, nehmlich: auf die seiner Beschaffenheit entgegengesetzte.

127. Alle vier Fälle der Multiplikation entgegengesetzter Größen lassen sich ebenfalls auf eine einzige Regel bringen, nehmlich: gleiche Zeichen in den Factoren geben ein positives, ungleiche ein negatives Produkt.

Doch gilt diese Regel nur von den Produkten zweyer Factoren. Ist die Anzahl der Factoren größer, so muß sie erst auf zwey zurückgebracht werden. Dann findet sich, daß eine gerade Anzahl negativer Factoren stets ein positives, *eine ungerade ein negatives* Produkt gibt.

steckt, d. i. deren Entgegengesetztes in — 15 3 mal steckt. Nun ist — 5 in — 15 3 mal enthalten; und das Entgegengesetzte von — 5 ist + 5; folglich ist + 5 diejenige Größe, deren Entgegengesetztes in — 15 3 mal enthalten ist.

Der negative Divisor deutet also, wie der negative Multiplikator, nicht bloß eine gewisse Größe des Quotienten, sondern auch eine gewisse Beschaffenheit desselben an, nehmlich: daß er der Beschaffenheit des Dividendus entgegengesetzt seyn soll.

134. Auch für die Division läßt sich eine einzige allgemeine Regel geben, und zwar eine ähnliche, wie für die Multiplikation, nehmlich: gleiche Zeichen im Dividendus und Divisor geben einen positiven, ungleiche einen negativen Quotienten.

135. Da ein Bruch als ein Quotient zu betrachten ist, so kann man aus den Regeln der Division bestimmen, wie es sich mit positiven und negativen Brüchen verhalte.

Ein Bruch ist nehmlich positiv, wenn Zähler und Nenner desselben einerley Zeichen haben, entweder positiv oder negativ sind; hingegen ist er negativ, wenn die Zeichen im Zähler und Nenner ungleich sind. Z. B. es ist

$$+\frac{3}{4} = \frac{+3}{+4} = \frac{-3}{-4}$$

$$-\frac{3}{4} = \frac{+3}{-4} = \frac{-3}{+4}$$

Fünfter Abschnitt.

Vom Gebrauch der Einschließungszeichen in den Rechnungen.

136. Unter Einschließungszeichen werden hier die *Klammern* verstanden, mit welchen man Parenthe-

sen einzuschließen pflegt. Schon in dem vorhergehenden Abschnitte finden sich Größen mit ihren Vorzeichen in Parenthese gesetzt, und die Bedeutung davon ist vorausangemerkt worden. Es wird aber von diesen Zeichen überhaupt ein so häufiger Gebrauch in den Rechnungen gemacht, daß es nicht überflüssig ist, denselben etwas genauer zu erklären.

137. Im Allgemeinen kann man sagen, daß, wenn mehrere Glieder einer Rechnung zusammen als ein einziges betrachtet werden sollen, man sie in Klammern einschließt. Es setzt dieß jedoch voraus, daß außer den eingeschlossenen Gliedern noch eines oder mehrere vorhanden sind, mit welchen jene in Verbindung gesetzt werden sollen, oder daß irgend ein mathematisches Zeichen sich außerhalb der Parenthese befinde, das auf die ganze innerhalb der Einschließungszeichen befindliche Größe zu beziehen ist.

Die eingeschlossenen Glieder können durch alle Zeichen der 4 Species unter einander verbunden seyn; am häufigsten ist es wohl durch + und −.

138. Eine Parenthese auflösen, heißt, den arithmetischen Ausdruck, der durch sie angedeutet wird, mit einem andern gleichbedeutenden vertauschen, der von allen Einschließungszeichen befreyt ist; oder, die eingeschlossenen Glieder entweder in diejenige Verbindung mit den äußern Gliedern bringen, die durch das arithmetische Verbindungszeichen angedeutet ist, oder diejenige Veränderung mit ihnen vornehmen, die das arithmetische Zeichen außerhalb der Parenthese bestimmt. Wie man dabey zu verfahren habe, werden einzelne, nach den vorzüglichsten Fällen geordnete, Beyspiele zeigen können.

139. Wenn das Additionszeichen einer Parenthese vor- oder nachsteht, so ändern die eingeschlossenen Größen ihre Vorzeichen nicht durch die Auflösung der

Parentheſe, und der ganze Ausdruck hat mit und ohne Einſchließungszeichen einerley Werth. In dieſem Fall alſo haben die Einſchließungszeichen keinen Einfluß auf die Größe des Ganzen, und wenn kein beſonderer Grund vorhanden iſt, warum einige Theile deſſelben als eine einzige Größe betrachtet werden ſollen, ſo kann man das Einſchließen ganz unterlaſſen. Z. B. es iſt

$$5 + (4 + 3) = 5 + 4 + 3 = 12.$$

Denn in Abſicht auf die Summe iſt es einerley, ob $4 + 3$ als ein Ganzes betrachtet, oder ob die einzelnen Größen 4 und 3, welche die Theile dieſes Ganzen ausmachen, zu 5 hinzugethan werden.

Eben ſo iſt

$$5 + (4 - 3) = 5 + 4 - 3 = 6.$$

Man kann hier $4 - 3$ als eine einzige Größe betrachten, und dann iſt ſie $= 1$; indeſſen bleibt immer $5 + 1 = 6$. Es ändert ſich alſo durch Auflöſung der Parentheſe nicht die Größe des ganzen Ausdrucks, wohl aber die Vorſtellung, die man ſich von den einzelnen Theilen zu machen hat.

140. Da es übrigens bey der Addition in Abſicht auf die Summe überhaupt nicht darauf ankommt, in welcher Ordnung die ſummirenden Zahlen verbunden werden, ſo iſt es auch einerley, ob die eingeſchloſſenen Glieder vor oder nach dem Additionszeichen ſtehen. So iſt $5 + (4 + 3) = (4 + 3) + 5$. Es wäre alſo überflüſſig von dieſem Falle beſonders zu handeln.

141. Wenn die Parentheſe auf ein Subtractionszeichen folgt, ſo wird dadurch angedeutet, daß die ganze innerhalb der Einſchließungszeichen befindliche Größe von der vorſtehenden abgezogen werden müſſe. Sind alſo die eingeſchloſſenen Glieder alle durch Additionszeichen verbunden, ſo muß die ganze Summe derſelben abgezogen werden. Es iſt aber in Abſicht auf die

Differenz einerley, ob eine Summe auf einmal abgezogen wird, oder ob alle ihre Theile einzeln nach einander abgezogen werden. Wird daher die Parentheſe aufgelöſt, ſo muß das Additionszeichen jedes eingeſchloſſenen Gliedes in ein Subtractionszeichen verwandelt werden. Z. B. es iſt $25 - (9 + 4 + 3 + 1) = 25 - 9 - 4 - 3 - 1 = 25 - 17 = 8$. (Vgl. oben 41, 2.).

Hieraus ergibt ſich, was es für einen großen Unterſchied ausmacht, ob man nach einem Subtractionszeichen die nachfolgenden und mit + verbundenen Glieder in Klammern einſchließt oder nicht. Z. B. ob man $12 - (5 + 3)$, oder $12 - 5 + 3$ ſchreibt. Das erſtere iſt $= 4$, das letztere $= 10$.

142. Sind die eingeſchloſſenen Glieder durch Subtractionszeichen verbunden, z. B. $18 - (12 - 5)$, ſo wird dadurch angedeutet, daß nicht die ganze Zahl 12, ſondern $12 - 5$, d. i. 7, von 18 abgezogen werden ſoll, Wenn man alſo 12 von 18 abzieht, ſo zieht man um 5 zu viel ab. Man muß daher die 5 noch hinzuaddiren, um die richtige Differenz von 18 und $12 - 5$ zu erhalten. Löſt man daher die Parentheſe auf, ſo iſt $18 - (12 - 5) = 18 - 12 + 5$. Das Subtractionszeichen der eingeſchloſſenen Größen muß alſo bey der Auflöſung der Parentheſen in ein Additionszeichen verwandelt werden.

Auch hier zeigt ſich alſo, wie bey dem vorigen Fall, der große Unterſchied zwiſchen einem Ausdruck mit, und einem ohne Einſchließungszeichen, bey übrigens gleichen Zahlen und Vorzeichen. Z. B.

$20 - (9 - 7)$ iſt $= 18$.
und $20 - 9 - 7$ iſt $= 4$.

143. Man kann in jedem Fall die eingeſchloſſenen Glieder erſt für ſich allein betrachten, und die Größe, die ſie zuſammen ausmachen, beſtimmen; alsdann dieſe von der *dem Subtractionszeichen* vorgeſetzten Größe abzie-

hen. So war im ersten Beyspiel die Summe der eingeschlossenen Glieder = 17; der ganze Ausdruck also eben so viel als 25 — 17. In dem andern Beyspiel ist 12 — 5 = 7; und daher der ganze Ausdruck eben so viel als 18 — 7. Eben so ist in dem letzten Beyspiele 9 — 7 = 2; folglich 20 — (9 — 7) = 20 — 2 = 18.

144. Wechseln in der Parenthese Additions- und Subtractionszeichen ab, so müssen sie bey der Auflösung jedes in das entgegengesetzte verwandelt werden. Z. B.

28 — (15 — 9 + 7 — 10) ist = 28 — 15 + 9 — 7 + 10 = 25.

Auch hier ist es gut, den Werth der eingeschlossenen Glieder für sich zu bestimmen, und ihn dann von der außerhalb der Parenthese befindlichen Zahl abzuziehen. So ist in diesem Beyspiel (15 — 9 + 7 — 10) = 3; folglich 28 — 3 = 25.

145. Ist die Summe der zu subtrahirenden Zahlen in der Parenthese größer, als der zu addirenden, so erhält der Werth der ganzen Parenthese das Subtractionszeichen. Z. B.

16 — (9 — 12) ist = 16 — (— 3).

Da nun 16 — (9 — 12) = 16 — 9 + 12 = 19 ist, so muß auch 16 — (— 3) = 19 seyn.

146. Dasselbe aber erhält man, wenn man von der positiven Zahl 16 die negative Zahl (— 3) abziehen soll (113). Hierdurch bestätigt sich die obige Bemerkung, daß die negativen Zahlen in Rücksicht der positiven auch als zu subtrahirende betrachtet werden können.

147. Wenn die Parenthese dem Subtractionszeichen vorangeht, so ändert sie den Werth des ganzen Ausdrucks nicht, oder, die Zeichen der eingeschlossenen

Größen bleiben ungeändert, wenn die Parenthese aufgelöst wird. Z. B. es ist

$(9 - 5 + 3) - 7 = 9 - 5 + 3 - 7 = 0.$

Denn beyde Ausdrücke sagen im Grunde einerley, nehmlich: daß von der Summe der Zahlen 9 und 3 die Zahlen 5 und 7 abgezogen werden sollen; nur stellt der erstre Ausdruck die Zahlen $9 - 5 + 3$ als Theile eines Ganzen $= 7$ dar; im letztern aber sind eben diese Zahlen als Größen für sich dargestellt.

148. Wenn das Multiplikationszeichen außerhalb der Einschließungszeichen steht, so wird dadurch angedeutet, daß die ganze innerhalb derselben befindliche Größe multiplizirt werden soll. Dieß ist eben so viel, als ob jedes Glied der Parenthese multiplizirt wird. Wird daher die Parenthese aufgelöst, so muß jedes Glied derselben mit dem außerhalb befindlichen Factor multiplizirt werden. Z. B.

$4 . (9 + 3)$ ist $= 4 . 12$ oder $= 4 . 9 + 4 . 3 = 36 + 12 = 48$, und

$4 . (9 - 3)$ ist $= 4 . 6$ oder $= 4 . 9 - 4 . 3 = 36 - 12 = 24.$

Ob eine Größe der Parenthese das Zeichen + oder − hat, macht keinen wesentlichen Unterschied; und da die Ordnung der Factoren in Absicht auf das Produkt gleichgültig ist, so ist es auch einerley, ob das Multiplikationszeichen der Parenthese vor- oder nachsteht.

Wenn in den angeführten Beyspielen die Glieder $9 + 3$ und $9 - 3$ nicht in Klammern eingeschlossen wären, so würde das erstre so viel seyn, als $4 . 9 + 3$, d. i. $36 + 3 = 39$; und das andere $4 . 9 - 3$, d. i. $36 - 3 = 33$; also sehr verschieden von dem, was dieselben Zahlen, auf obige Art eingeschlossen, geben.

149. So wie in diesen Beyspielen der eine Factor als eine zusammengesetzte Größe ausgedrückt ist, und die Glieder desselben eingeschlossen sind; so kann auch zugleich der andere Factor zusammengesetzt seyn,

und die Glieder desselben in eine Parenthese verbunden werden. Alsdann muß entweder jeder Factor in eine einzige Zahl zusammengezogen, und die eine mit der andern multiplizirt werden: oder es muß jedes Glied des einen Factors mit jedem Gliede des andern multiplizirt werden. (Vergl. 43, c.) Z. B.

$(7 + 4) \cdot (9 + 5)$ ist $= 11 \cdot 14 = 154.$

oder $= 7 \cdot (9 + 5) + 4 \cdot (9 + 5)$

$= 7 \cdot 9 + 7 \cdot 5 + 4 \cdot 9 + 4 \cdot 5$

$= 63 + 35 + 36 + 20 = 154.$

150. Enthält einer von beyden Factoren negative Glieder, so wird dadurch im Wesentlichen nichts geändert. Z. B.

$(8 - 3) \cdot (5 + 4) = 5 \cdot 9 = 45.$

oder $= 8 \cdot (5 + 4) - 3 (5 + 4)$

$= 40 + 32 - (15 + 12)$

$= 40 + 32 - 15 - 12$

$= 72 - 27 = 45.$

Eben so ist $(8 + 3) \cdot (5 - 4) = 11 \cdot 1 = 11.$

oder $= 8 (5 - 4) + 3 (5 - 4)$

$= 40 - 32 + 15 - 12$

$= 55 - 44 = 11.$

151. Wenn beyde Factoren negative Glieder enthalten, so geschieht die Auflösung der Parentheſen auf eine ähnliche Art.

Z. B.

$(12 - 5) \cdot (8 - 3)$ ist $= 7 \cdot 5 = 35.$

oder $= 12 \cdot (8 - 3) - 5 (8 - 3)$

$= 96 - 36 - (40 - 15)$

$= 96 - 36 - 40 + 15$

$= 111 - 76 = 35.$

Dieser Fall ist besonders merkwürdig, indem er dasselbe darstellt, was sich oben bey der Multiplikation entgegengesetzter Größen zeigte, nehmlich:

daß gleiche Zeichen in den Factoren ein positives, ungleiche ein negatives Produkt geben.

Denn $12 \cdot 8$ ist $= 96$; $12 \cdot (- 3) = - 36$; $- 5 \cdot 8 = - 40$; und $- 5 \cdot (- 3) = + 15.$

152. Aus diesen Beyspielen mit zwey zusammengesetzten Factoren läßt sich auch abnehmen, wie man bey mehreren solchen Factoren zu verfahren habe. Auch kann die Anzahl der eingeschlossenen Glieder größer seyn, ohne daß dadurch das Verfahren bey der Auflösung der Parentheſen sich wesentlich änderte.

153. Wenn das Divisionszeichen mit einer Parentheſe in Verbindung steht, so ist wiederum zu unterscheiden, ob es ihr nachfolgt, oder vorangeht, d. h. ob die Parentheſe den Dividendus, oder den Divisor ausmacht. In beyden Fällen kann man zwar die eingeschlossenen Größen auf einen einzigen Ausdruck bringen, und diese dann in einander dividiren; will man aber die Glieder selbst beybehalten und die Parentheſe auflösen, so ist das nur im erstern Fall möglich, wenn die Parentheſe den Dividendus ausmacht. Man muß alsdann jedes Glied durch den Divisor dividiren, und dem Quotienten das Zeichen des eingeschlossenen Gliedes geben. Z. B.

$(9 + 6) : 3$ ist $= 15 : 3 = 5$

oder $= 9 : 3 + 6 : 3 = 3 + 2 = 5$;

ingleichen ist

$(8 - 2) : 2 = 6 : 2 = 3$

oder $= 8 : 2 - 2 : 2 = 4 - 1 = 3$.

154. Macht hingegen die Parentheſe den Divisor aus, so kann sie nicht in ihre einzelnen Glieder aufgelöst werden, weil es bey dem Divisor darauf ankommt, ihn im Ganzen, und nicht die einzelnen Theile desselben, mit dem Dividendus zu vergleichen (43, d.). Z. B.

$15 : (3 + 2)$ ist $= 15 : 5 = 3$.

Wollte man aber dafür nehmen $15 : 3 + 15 : 2$, so wäre dieß $= 5 + 7\frac{1}{2} = 12\frac{1}{2}$ ganz verschieden von dem ersten Resultat.

155. *Wenn daher sowohl* der Dividendus als der

Diviſor aus mehreren Gliedern beſteht, ſo können nur die des erſtern vereinzelt, die letztern aber müſſen jedesmal zuſammengenommen werden. Z. B.

$(9 + 7 - 4) : (5 - 2)$ kann ausgedrückt werden durch $12 : 3 = 4$; oder durch

$$\frac{9}{5-2} + \frac{7}{5-2} - \frac{4}{5-2} = \frac{9}{3} + \frac{7}{3} - \frac{4}{3} = \frac{12}{3} = 4.$$

Es iſt auch hier leicht zu ſehen, was es für einen groſſen Unterſchied ausmacht, ob dieſelben Zahlen mit oder ohne Einſchließungszeichen geſetzt werden. So wäre z. B. das letztre Exempel $9 + 7 - 4 : 5 \div 2$ ohne Einſchließungszeichen ſo viel als $16 - \frac{4}{5} - 2 = 14 - \frac{4}{5} = 13\frac{1}{5}$.

---

156. Außer den angeführten Fällen kommen noch viele andere vor, in welchen man von den Einſchließungszeichen Gebrauch macht, z. B. bey den Potenzen und Wurzeln, wie ſich weiter unten zeigen wird. Man kann aber ſchon aus dem bisher Geſagten ungefähr abnehmen, was ſie zu bedeuten haben. Immer müſſen die eingeſchloſſenen Glieder zuſammen als eine einzige Gröſſe betrachtet werden, und das mathematiſche Zeichen außerhalb auf die ganze Gröſſe bezogen werden. Die Auflöſung einer ſolchen Parentheſe aber iſt in den meiſten Fällen nicht ſo einfach, als in den vorhin angeführten, und der Unterſchied zwiſchen denſelben Ausdrücken mit und ohne Parentheſe ſehr viel gröſſer.

Vergleicht man z. B. die Ausdrücke $a + b^m$ und $(a + b)^m$, ſo zeigt der erſte nur die Summe der beyden Gröſſen a und b^m an, der letztere aber erfordert zu ſeiner Entwickelung die Anwendung des binomiſchen Lehrſatzes, und enthält eine unbeſtimmte Anzahl von Gliedern.

---

157. So lange man es hierbey mit beſtimmten Zahlen zu thun hat, wie in den vorhin angeführten Bey-

spielen, kann man die eingeschlossenen Glieder immer auf eine einzige Zahl bringen, und dadurch die Parenthese auflösen, oder sie entbehrlich machen. Aber bey unbestimmten Zahlen oder allgemeinen Zeichen derselben, dergleichen die Buchstaben sind, geht das nicht an; daher findet der Gebrauch der Einschließungszeichen bey diesen vorzüglich statt und wird hier ganz unentbehrlich. Die Beyspiele mit bestimmten Zahlen dienen nur, die Bedeutung der Parentheſen dem Anfänger anschaulich zu machen.

158. Wenn in den vorhergehenden Paragraphen die Bedeutung der Parentheſen und die Art ihrer Auflösung gezeigt ist, so ergibt sich zugleich daraus das Umgekehrte, nehmlich: in welchen Fällen Größen in Klammern eingeschlossen, und wie sie dabey behandelt werden müssen. Indessen wird es nicht überflüssig seyn, noch einige Anmerkungen darüber zu machen und einige Fälle besonders zu betrachten.

159. Erstens ist überhaupt zu merken, daß einzelne Größen nie eingeschlossen werden, sondern nur solche, die aus mehrern Gliedern zusammengesetzt sind. Denn die Parenthese zeigt eben an, daß die eingeschlossenen Glieder zusammen als eine einzige Größe zu betrachten sind; ist also die Größe selbst schon als eine einzige angegeben, so braucht sie nicht weiter eingeschlossen zu werden.

Eine Ausnahme kann entstehen, wenn eine einzelne Größe durch ihr Vorzeichen als positiv oder negativ bezeichnet und so mit andern Größen verbunden werden soll, wie im vorigen Abschnitt geschah.

160. Besteht aber eine Größe aus mehrern Gliedern, die alle zusammen von einer andern Größe abgezogen, oder mit derselben multiplizirt, oder durch sie dividirt werden *sollen: so müssen* sie in Klammern einge-

ſchloſſen werden, weil ſonſt das Zeichen der Subtraction, oder Multiplikation, oder Diviſion ſich nur auf den Theil der Größe, bey welchem es zunächſt ſteht, beziehen würde.

Z. B. Es ſoll 6 + 4 von 24 abgezogen werden, ſo muß man ſetzen 24 — (6 + 4) = 14; denn 24 — 6 + 4 hieße: 6 von 24 abgezogen und zu der Differenz 4 addirt; dieß wäre = 22.

Oder wenn 6 + 4 mit 3 multiplizirt werden ſoll, muß man ſchreiben (6 + 4) . 3, weil ſonſt das Multiplikationszeichen ſich nur auf die 4 bezöge, und das Produkt, 12, zu 6 addirt werden müßte.

Oder endlich es ſoll 6 + 4 durch 2 dividirt werden, ſo iſt das (6 + 4) : 2 = 5; hingegen ohne Einſchließungszeichen wäre 6 + 4 : 2 ſo viel als 6 + 2 = 6 + 2 = 8.

Dieß läßt ſich auch auf die Rechnungen in benannten Zahlen anwenden, wenn nehmlich die benannte Zahl aus mehrern Arten von Größen beſteht. Z. B. Es ſollen 5 Rthlr. 8 gl. 6 pf. mit 9 multiplizirt werden, ſo kann man ſetzen: (5 Rthlr. 8 gl. 6 pf.) . 9.

161. Dieſelbe Vorſicht, die man in Abſicht der Zeichen + und — anzuwenden hat, wenn man eine Parentheſe, die auf ein Subtractionszeichen folgt, auflöſen will, muß man im umgekehrten Fall beobachten, wenn man mehrere freiſtehende Größen in eine Parentheſe vereinigt und dieſer ein Subtractionszeichen vorangeht; man darf nehmlich nicht vergeſſen, die Zeichen der einzuſchließenden Größen in die entgegengeſetzten zu verwandeln.

Z. B. wenn man in dem Ausdruck

28 — 15 + 9 — 4

die drey letztern Größen einſchließen will, ſo verwandelt er ſich in folgenden:

28 — (15 — 9 + 4).

Der Grund hiervon ergibt ſich aus Obigem (134.).

162. Bey der Multiplikation iſt zu bemerken, daß, wenn man mehrere Produkte hat, die durch

+ oder — verbunden sind, und unter deren Factoren einer oder mehrere gleiche vorkommen: so kann man die ungleichen Factoren, mit Beybehaltung der Zeichen ihrer Produkte, in Klammern einschließen, und den oder die gleichen Factoren mit dem Multiplikationszeichen herausseßen. Z. B.

$$3 . 7 \pm 3 . 5 \text{ ist} = 3 . (7 \pm 5)$$

oder

$$4 . 5 . 8 - 4 . 5 . 6 + 4 . 5 . 2 \text{ ist} = 4 . 5 . (8 - 6 + 2).$$

Denn nach obiger Regel (148.) deutet eben die Parentheſe an, daß jedes der darin enthaltenen Glieder mit den außerhalb ſtehenden Factoren multiplizirt werden müſſe.

163. Bisweilen kann man dieſe Regel bey denſelben Produkten mehr als einmal anwenden, und dadurch den arithmetiſchen Ausdruck derſelben immer mehr zuſammenziehen. Wenn, z. B. die Produkte

$$5 . 6 - 2 . 5 + 4 . 6 - 2 . 4.$$

gegeben ſind, ſo kann man

1) die beyden erſten Produkte auf die Factoren $5 . (6 - 2)$, und die beyden letztern auf die Factoren $4 . (6 - 2)$ bringen.

2) Da dieſen beyden Produkten der Factor $(6 - 2)$ gemein iſt, ſo kann man ſie auf ein einziges Produkt bringen, wenn man ihre ungleichen Factoren 5 und 4 hinwiederum in Parentheſe ſetzt. Auf dieſe Art erhält man

$$(5 + 4) . (6 - 2).$$

Man könnte in einem Fall, wie der letztre, auch zuerſt die Produkte $5 . 6 + 4 . 6$ combiniren, und daraus $(5 + 4) . 6$ machen. Alsdann wären noch die Produkte $- 2 . 5$ und $- 2 . 4$ übrig. Dieſe dürfte man nicht in $- 2 . (5 - 4)$ verwandeln, ſondern ſie müſſen durch $- 2 . (5 + 4)$ ausgedrückt werden. Denn der gemeinſchaftliche Factor beyder

Produkte iſt — 2, und die andern beyden, 5 und 4, ſind als poſitiv zu betrachten.

Beyde zuſammengeſetzte Produkte haben nun den Factor (5 + 4) gemein; man kann alſo die ungleichen Factoren 6 und — 2 in Klammern einſchließen, und ſo beyde auf das Produkt (5 + 4) . (6 — 2), wie vorhin, zurückführen.

164. Wenn mehrere Größen mit einerley Zahl zu dividiren ſind, ſo kann man die Größen mit ihren Vorzeichen einſchließen und den gemeinſchaftlichen Diviſor herausſetzen. Z. B.

12 : 3 + 8 : 3 — 5 : 3 iſt = (12 + 8 — 5) : 3.

Hingegen wenn der Dividendus mehrerer Quotienten gleich, die Diviſoren aber ungleich ſind, ſo darf man ſo wenig die ungleichen Diviſoren einſchließen, und den gleichen Dividendus herausſetzen, als man einen in Klammern eingeſchloſſenen Diviſor in ſeine einzelnen Glieder auflöſen kann (154.). Z. B. wenn die Quotienten

20 : 4 + 20 : 5 — 20 : 3

gegeben ſind, ſo darf man nicht dafür ſetzen

20 : (4 + 5 — 3).

Denn die Größe der Zahlen 4 + 5 — 3 zuſammengenommen hat zu 20 ein ganz anderes Verhältniß, als die Zahlen 4, 5 und 3 jede allein haben.

Sechster Abſchnitt.

Buchſtaben-Rechnung.

---

165. Die Buchſtaben-Rechnung iſt eine Erfindung der neuern Zeit, wodurch die Arithmetik unglaublich gewonnen hat, und wodurch es ihr allein möglich geworden iſt, zu dem Grade der Vollkommenheit zu gelangen,

den sie bis jetzt erreicht hat. Sie besteht nicht in einer besondern Rechnungsart, sondern in einer Methode, besondre Fälle auf eine allgemeine Weise darzustellen, oder jede besondre Rechnungsart so allgemein zu behandeln, daß der Gang der Rechnung oder das Gesetz, nach welchem die gesuchte Größe gefunden wird, deutlich ausgedrückt wird. Sie kann daher auf alle Rechnungsarten angewandt werden.

166. Die Buchstaben sind nehmlich allgemeine Zeichen der Zahlen überhaupt, oder Zeichen unbestimmter Zahlen. Ein Buchstabe drückt irgend eine Zahl aus, wobey es unbestimmt bleibt, was für eine; denn jeder Buchstabe kann alle möglichen Zahlen bedeuten. Dabey ist ihr Werth weder von ihrer alphabetischen Ordnung, noch von ihrer Stellung gegen einander abhängig. Ein Buchstabe ist so gut als der andre.

So wie eine Zahl eine bestimmte Menge anzeigt, ohne Bestimmung eines besondern Gegenstandes, so drückt ein Buchstabe eine Menge überhaupt aus, ohne Bestimmung ihrer Größe.

167. Wenn also in einer Rechnung zwey oder mehrere verschiedene Buchstaben gebraucht werden, so werden dadurch eben so viele verschiedene Zahlen, gleichviel welche es seyn mögen, angedeutet. Uebrigens aber ist der Werth eines Buchstabens in einer und eben derselben Rechnung immer derselbe.

168. Die Buchstaben, deren man sich in den Rechnungen am meisten bedient, sind die kleinen lateinischen. Die großen lateinischen, oder die Buchstaben anderer Sprachen werden seltener gebraucht, und ihre Bedeutung, die übrigens eben so wie die der kleinen lateinischen ganz allgemein ist, wird in jedem Falle besonders bestimmt.

Es ist leicht einzusehen, wie sehr dieser Gebrauch der Buchstaben in den Rechnungen von demjenigen verschieden ist, den man z. B. sonst von den griechischen Buchstaben

machte, wenn man bestimmte Zahlen dadurch bezeichnete, z. B. durch α die Zahl 1, durch ια 11. In diesem Fall waren die Buchstaben nichts anders als Ziffern; in der Buchstaben-Rechnung aber sind sie allgemeine Ausdrücke der Zahlen selbst.

169. Mit so allgemeinen Zeichen, als die Buchstaben sind, kann man freylich keine Rechnungen machen, die auf ein bestimmtes Resultat führen, wie die gewöhnlichen Rechnungen mit bestimmten Zahlen; sondern man kann nur allgemeine Resultate oder Ausdrücke dadurch erhalten, die alle zu einer Rechnungsart gehörigen besondern Fälle unter sich begreifen.

170. Man bedient sich dabey derselben arithmetischen Zeichen, die man bey den Ziffern gebraucht, nehmlich des stehenden Kreuzes (+) zur Bezeichnung der Addition, des Queerstrichs (—) zur Bezeichnung der Subtraction u. s. w.

Das Punktum, als Zeichen der Multiplikation, wird gemeiniglich weggelassen, und ein Factor ohne alles Zeichen neben den andern gesetzt.

Hiernach drückt

a + b die Summe,
a — b die Differenz,
ab das Produkt,

und a : b oder $\frac{a}{b}$ den Quotienten

irgend zweyer Zahlen aus.

Ueberdieß werden auch die Zeichen der entgegengesetzten Größen bey den Buchstaben gebraucht, da auch diese Arten von Größen im Allgemeinen durch Buchstaben vorgestellt werden können.

171. Meistens kommen in den Buchstaben-Rechnungen auch bestimmte Zahlen vor. Werden diese als *Factoren* mit den Buchstaben verbunden, so heißen sie die

Coefficienten derselben. Z. B. in den Ausdrücken 3 a, 5 ab sind 3 und 5 Coefficienten von a und ab.

1. Die Coefficienten pflegen ihren Buchstaben vorgesetzt zu werden.

2. Wenn ein Buchstabe allein da steht, so kann man immer 1 für seinen Coefficienten ansehen; denn es ist z. B. a so viel als 1 a. Daher wird dieser Coefficient gemeiniglich weggelassen.

3. Den Namen der Coefficienten führen bisweilen auch solche Factoren, die selbst wieder durch Buchstaben ausgedrückt sind.

Addition.

172. Es lassen sich hierbey zwey Fälle unterscheiden: 1) wenn die zu addirenden Buchstaben gleich, 2) wenn sie verschieden sind.

173. Im ersten Fall erhält man die Summe, wenn man die Anzahl der Buchstaben, oder die Summe ihrer Coefficienten, zum Coefficienten macht, und diesen dem Buchstaben selbst beyfügt. Z. B.

$a + a$ ist $= 2a$; $3a + 4a = 7a$; $-5b + (-3b) = -8b$.

Hierbey wird vorausgesetzt, daß die Zeichen gleich sind. Wenn aber diese verschieden sind, so muß man den Coefficienten der Summe aus den Coefficienten der summirenden Größen nach den Regeln der Addition entgegengesetzter Größen bestimmen. Z. B.

$+7a + (-3a)$ ist $= +4a$.

174. Sind die Buchstaben verschieden, so läßt sich ihre Summe nicht in einen derselben zusammenziehen, sondern man muß sich begnügen, die gegebenen Größen mit dem Additionszeichen zu verbinden. Soll z. B. 3a und 2b addirt werden, so ist die Summe

$3a + 2b$.

Man könnte zwar auch setzen

$$3a + 2b = c,$$

und dann wäre c die Summe von 3 a und 2 b. Allein das wäre nur eine willkührlich angenommene, nicht aus den summirenden Größen selbst abgeleitete Größe.

175. Wenn mehrere, sowohl gleiche als ungleiche, Buchstaben gegeben sind, so sondere man die ungleichen von einander ab, ordne bloß die gleichen mit ihren Coefficienten in eine Reihe unter einander, und addire alsdann jede Reihe besonders. Z. B.

$$\begin{array}{r} +5a - 3b + 7c \\ -8a + 9b + 6c \\ -4a + 6b - 4c \\ \hline -7a + 12b + 9c \end{array}$$

Subtraction.

176. Auch hier hat man, wie bey der Addition, darauf zu sehen, ob die Buchstaben gleich oder ungleich sind.

177. Im ersten Fall zieht man die Coefficienten von einander ab, und behält den Buchstaben unverändert bey. Z. B. $5a - 3a = 2a$; $-7b - (-3b) = -4b$. Sind die Zeichen verschieden, so muß man die Coefficienten nach den Regeln entgegengesetzter Größen subtrahiren. Z. B. $8a - (-3a) = +11a$; $-5b - (+3b) = -8b$.

178. Sind aber die Buchstaben selbst verschieden, so kann man sie nur mit dem Subtractionszeichen verbinden. Wenn z. B. 5 b von 3 a abgezogen werden soll, so ist dieses =

$$3a - 5b.$$

179. Wenn Größen, die aus gleichen Buchstaben ammengesetzt sind, von einander abgezogen werden len, so kann man die gleichen Buchstaben unter ein- der ordnen und nach der eben gegebenen Vorschrift a einander abziehen. Z. B. es soll von

$+ 13a - 18b + 12c - 19d$ abgezogen erden $+ 7a - 12b - 16c + 15d$ so ist die ifferenz $+ 6a - 6b + 28c - 34d$.

180. Als ein Beyspiel, wie durch Buchstabenrech- ng allgemeine Sätze aufgefunden werden können, drü- man die Summe zweyer Zahlen durch $a + b$, ren Unterschied durch $a - b$ aus, und addire ydes, so erhält man

$$\begin{array}{r} a + b \\ a - b \\ \hline 2a \end{array}$$

Wird hingegen das letztre vom erstern subtra- irt, so erhält man $2b$. Folglich macht die Sum- e zweyer Zahlen und ihr Unterschied zu- ammenaddirt das Doppelte der größern on beyden Zahlen; und der Unterschied on der Summe abgezogen das Doppelte er kleinern aus.

Man kann daher aus der Summe zweyer Zahlen und rem Unterschiede die Zahlen selbst finden, wenn man 1) n halben Unterschied zu der halben Summe addirt, 2) je- n von dieser subtrahirt; das erstere gibt die größere, das tztere die kleinere Zahl.

Multiplikation.

181. Die Produkte von Buchstaben werden da- rch ausgedrückt, daß man die Buchstaben ohne wei- res Verbindungs-Zeichen neben einander setzt (170.),

wobey es einerley ist, ob die Buchstaben gleich oder ungleich sind. Z. B. a mit a multiplizirt, gibt aa; und a mit b multiplizirt, ab.

182. Haben die Buchstaben noch Coefficienten, so muß man diese besonders multipliziren und das Produkt derselben zum Coefficienten des Produkts der Buchstaben machen. Z. B. 3 a mit 4 b multiplizirt ist = 12 ab.

183. Endlich muß man auch darauf sehen, ob die Zeichen der Factoren gleich oder ungleich sind, um zu bestimmen, ob das Produkt positiv oder negativ werde (127.). Z. B. + 5 a multiplizirt mit + 3 b ist = + 15 ab; — 4 a multiplizirt mit + 2 b ist = — 8 ab.

184. Ist der Multiplikandus sowohl als der Multiplikator aus mehrern Gliedern zusammengesetzt, so muß man jedes Glied des erstern mit jedem Gliede des letztern multipliziren. Hierbey kann man auf eine ähnliche Weise, wie bey dem gewöhnlichen Multipliziren mit Zahlen, wenn der Multiplikator aus mehr als einer Ziffer besteht, verfahren. So wie man nehmlich da so viele verschiedene Reihen von Produkten erhält, als der Multiplikator Ziffern hat, so kann man hier so viel verschiedene Reihen von Produkten formiren, als der Multiplikator verschiedene Glieder hat. Dabey muß man diejenigen Produkte unter einander ordnen, die in ihren Buchstaben ganz übereinstimmen. Endlich addirt man die verschiedenen Reihen zusammen, und bringt alles auf eine einzige Reihe. Einige Beyspiele werden diese Vorschrift am besten erläutern können.

5a + 3	6a — 4
a + 2	2a — 3
5aa + 3a	12aa — 8a
+ 10a + 6	— 18a + 12
5aa + 13a + 6	12aa — 26a + 12

— 2a + 2	a + b
+ 3	a — b
a — 6aa + 6a	aa + ab
+ 12aa — 6a + 6	— ab — bb
a + 6aa + 6	aa — bb

Das letztere Beyſpiel iſt ein Beweis, daß die Summe zweyer Zahlen mit ihrer Differenz multiplizirt zum Produkt die Differenz ihrer Quadrate gibt.

3aa — 6ab + 3bb	
a + 2b	
3aaa — 6aab + 3abb	
+ 6aab — 12abb + 6bbb	
3aaa — 9abb + 6bbb	
4aa + 6ab + 9bb	
2a — 3b	
8aaa + 12aab + 18abb	
— 12aab — 18abb — 27bbb	
8aaa — 27bbb.	
a + b + c	
a — b + c	
aa + ab + ac	
— ab — bb — bc	
+ ac + bc + cc	
aa — bb + 2ac + cc.	
aa + ab + bb	
aa — ab + bb	
aaaa + aaab + aabb	
— aaab — aabb — abbb	
+ aabb + abbb + bbbb	
aaaa + aabb + bbbb.	

— xy + yy — xz — yz + zz
+ y + z

— xxy + xyy — xxz — xyz + xzz
+ xxy — xyy + yyy — xyz — yyz + yzz
+ xxz — xyz — xzz + yyz — yzz + zzz

+ yyy — 3xyz + zzz

Division.

185. Alle Fälle der Division lassen sich zwar auf die allgemeine Regel zurückführen, daß der Quotient immer die Größe seyn müsse, die mit dem Divisor multiplizirt den Dividendus gibt. Indessen, um den Quotienten zu finden oder ihn gehörig auszudrücken, ist es nicht überflüssig, verschiedene Fälle zu unterscheiden.

1) Wenn der Dividendus aus andern Buchstaben besteht als der Divisor, so läßt sich der Quotient nicht anders als durch diese Buchstaben selbst, vermittelst des Divisionszeichens ausdrücken. Z. B. a dividirt durch b ist $= a : b$ oder $\frac{a}{b}$; a dividirt durch $(b \pm c)$ ist $= a : (b \pm c) = \frac{a}{b \pm c}$.

Dieß ändert sich auch nicht, wenn die Buchstaben Coefficienten bey sich haben. Z. B. $3a : 5b$ ist $= \frac{3a}{5b}$.

Lassen sich aber die Coefficienten in einander ohne Rest dividiren, oder auch nur heben, so dividirt man diese für sich und die Buchstaben bleiben unverändert. Es ist z. B. $12a : 3b = \frac{4a}{b}$; $6a : 12b = \frac{a}{2b}$; $15a : 10b = \frac{3a}{2b}$.

Hieher gehört auch der Fall, wo eine Zahl durch einen Buchstaben dividirt werden soll. Z. B. 1 dividirt durch a ist $= 1 : a = \frac{1}{a}$.

Daß man auch setzen könne $a : b = c$ versteht sich von selbst, da c jede Zahl, ganze oder gebrochne, ausdrücken kann; nur ist die Größe c nicht aus a und b abgeleitet, sondern angenommen.

2) Wenn Dividendus und Diviſor zum Theil eierley Buchſtaben enthalten, ſo kann man aus beyden inen Bruch bilden, und dieſen den Regeln der Brüche emäß behandeln. Dadurch erhält man oft einen bequenern Ausdruck für den Quotienten. Z. B. (ab ± bc): b iſt $= \frac{ab \pm bc}{ab} = \frac{ab}{ab} \pm \frac{bc}{ab} = 1 \pm \frac{c}{a}$; (ab ± cd) : bc iſt $= \frac{ab \pm cd}{bc} = \frac{ab}{bc} \pm \frac{cd}{bc} = \frac{a}{c} \pm \frac{d}{b}$.

Wollte man im letztern Fall die beyden Brüche auf eierley Benennung bringen und addiren oder ſubtrahiren, ſo würde man wieder den erſtern Bruch erhalten.

3) Wenn der Diviſor und Dividendus ſo beſchaffen ind, daß man den Buchſtaben des erſtern nur einen oder ehrere Buchſtaben als Factoren hinzuzuſetzen braucht, m den Dividendus zu erhalten: ſo iſt es ein Zeichen, aß der Diviſor im Dividendus aufgeht; und dann maen eben die Buchſtaben, welche man dem Diviſor hinuſetzen muß, um den Dividendus zu erhalten, den Quoienten aus. Es iſt z. B.

aaa : aa = a; ab : a = b; abb : b = ab.

Kommen in dieſem Fall noch Coefficienten hinzu, ſo ird der Quotient derſelben der Coefficient des Quotienm. Z. B.,

16 aab : 2 a = 8 ab; 5 abc : 3 b = $\frac{5}{3}$ ac.

4) Beſteht der Dividendus aus mehrern Gliedern, er Diviſor aber nur aus einem Gliede, ſo muß auch er Quotient ſo viele Glieder enthalten, als der Divindus hat; und ein jedes derſelben wird gefunden, inm man die Glieder des Dividendus der Reihe nach einln dividirt. Z. B.

(aa + ab — b) : a = a + b — $\frac{b}{a}$.

(12 aab — 6 abb) : 3 ab = 4 a — 2 b.

5) Enthält auch der Divisor mehrere Glieder, so wird die Division auf eine ähnliche Art gemacht, wie bey Zahlen, die mit mehrern Ziffern geschrieben werden. So wie man sich nehmlich bey diesen vorzüglich nach den höchsten Zahlen des Divisors und dem jedesmaligen höchsten Theil des Dividendus richtet, so muß man bey den Buchstaben sich auch nach dem ersten Gliede des Divisors und dem jedesmaligen ersten Gliede des Dividendus richten, und den Quotienten ebenfalls theilweise nach und nach herausbringen. Ein jedes Glied des Quotienten aber muß diejenigen Buchstaben enthalten, die mit dem ersten Gliede des Divisors als Factoren verbunden, genau den jedesmaligen ersten Theil des Dividendus geben.

a. Man ordne also den Divisor und Dividendus auf eben die Art neben einander, wie bey einem Divisions-Exempel in Zahlen; sehe dann zu, mit welchem Buchstaben man den ersten Theil des Divisors multipliziren müsse, damit der erste Theil des Dividendus herauskomme, und nehme diese zum ersten Theil des Quotienten. Enthalten diese Glieder Coefficienten, so muß man auch diese in einander dividiren, und den Quotienten zum Coefficienten des ersten Theils des Quotienten machen. Endlich muß man auch, nach den Regeln der Division entgegengesetzter Größen, das Zeichen bestimmen, welches dieser Theil erhalten soll (134.).

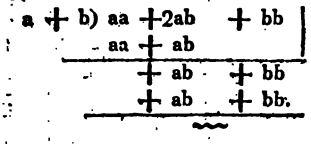
b. Mit dem gefundenen Theil des Quotienten multiplizire man darauf den ganzen Divisor, d. i. alle Glieder desselben, ordne die Produkte unter die gleichartigen Glieder des Dividendus, (d. i. diejenigen, die in ihren Buchstaben ganz mit dem Produkte übereinstimmen), und ziehe sie von diesen ab.

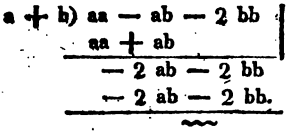
c. Zu dem Rest lasse man eines oder mehrere der folg[illegible] Glieder des Dividendus herunterfteigen, und d[illegible] enem hinein, indem man sich wieder genau

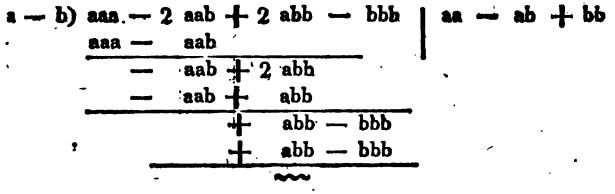
nach dem ersten dieser Glieder und dem ersten Gliede des Divisors richte. Dadurch erhält man das zweyte Glied des Quotienten. Das übrige Verfahren ist nun ganz dem Verfahren bey dem ersten Gliede ähnlich.

d. Auf diese Art muß man die Division so lange fortsetzen, bis sie aufgeht, oder es sich zeigt, daß sie überhaupt nicht aufgeht. Was in diesem letztern Falle zu thun sey, wird weiter unten gesagt werden.

Einige Beyspiele werden die gegebenen Vorschriften erläutern können.







Man könnte zwar auch setzen

$$3a + 2b = c,$$

und dann wäre c die Summe von 3 a und 2 b. Allein das wäre nur eine willkührlich angenommene, nicht aus den summirenden Größen selbst abgeleitete Größe.

175. Wenn mehrere, sowohl gleiche als ungleiche, Buchstaben gegeben sind, so sondere man die ungleichen von einander ab, ordne bloß die gleichen mit ihren Coefficienten in eine Reihe unter einander, und addire alsdann jede Reihe besonders. Z. B.

$$\begin{array}{r} +5a - 3b + 7c \\ -8a + 9b + 6c \\ -4a + 6b - 4c \\ \hline -7a + 12b + 9c \end{array}$$

Subtraction.

176. Auch hier hat man, wie bey der Addition, darauf zu sehen, ob die Buchstaben gleich oder ungleich sind.

177. Im ersten Fall zieht man die Coefficienten von einander ab, und behält den Buchstaben unverändert bey. Z. B. $5a - 3a = 2a$; $-7b - (-3b) = -4b$. Sind die Zeichen verschieden, so muß man die Coefficienten nach den Regeln entgegengesetzter Größen subtrahiren. Z. B. $8a - (-3a) = +11a$; $-5b - (+3b) = -8b$.

178. Sind aber die Buchstaben selbst verschieden, so kann man sie nur mit dem Subtractionszeichen verbinden. Wenn z. B. 5 b von 3 a abgezogen werden soll, *so ist* dieses =

$$3a - 5b.$$

179. Wenn Größen, die aus gleichen Buchstaben zusammengesetzt sind, von einander abgezogen werden sollen, so kann man die gleichen Buchstaben unter einander ordnen und nach der eben gegebenen Vorschrift von einander abziehen. Z. B. es soll von

$+ 13a - 18b + 12c - 19d$ abgezogen werden $+ 7a - 12b - 16c + 15d$ so ist die Differenz $+ 6a - 6b + 28c - 34d$.

180. Als ein Beyspiel, wie durch Buchstabenrechnung allgemeine Sätze aufgefunden werden können, drücke man die Summe zweyer Zahlen durch $a + b$, ihren Unterschied durch $a - b$ aus, und addire beydes, so erhält man

$$\begin{array}{r} a + b \\ a - b \\ \hline 2a \end{array}$$

Wird hingegen das letztre vom erstern subtrahirt, so erhält man $2b$. Folglich macht die Summe zweyer Zahlen und ihr Unterschied zusammenaddirt das Doppelte der größern von beyden Zahlen; und der Unterschied von der Summe abgezogen das Doppelte der kleinern aus.

Man kann daher aus der Summe zweyer Zahlen und ihrem Unterschiede die Zahlen selbst finden, wenn man 1) den halben Unterschied zu der halben Summe addirt, 2) jenen von dieser subtrahirt; das erstere gibt die größere, das letztere die kleinere Zahl.

Multiplikation.

181. Die Produkte von Buchstaben werden dadurch ausgedrückt, daß man die Buchstaben ohne weiteres *Verbindungs-Zeichen* neben einander setzt (170.),

wobey es einerley ist, ob die Buchstaben gleich oder ungleich sind. Z. B. a mit a multiplizirt, gibt aa; und a mit b multiplizirt, ab.

182. Haben die Buchstaben noch Coefficienten, so so muß man diese besonders multipliziren und das Produkt derselben zum Coefficienten des Produkts der Buchstaben machen. Z. B. 3 a mit 4 b multiplizirt ist = 12 ab.

183. Endlich muß man auch darauf sehen, ob die Zeichen der Factoren gleich oder ungleich sind, um zu bestimmen, ob das Produkt positiv oder negativ werde (127.). Z. B. + 5 a multiplizirt mit + 3 b ist = + 15 ab; — 4 a multiplizirt mit + 2 b ist = — 8 ab.

184. Ist der Multiplikandus sowohl als der Multiplikator aus mehrern Gliedern zusammengesetzt, so muß man jedes Glied des erstern mit jedem Gliede des letztern multipliziren. Hierbey kann man auf eine ähnliche Weise, wie bey dem gewöhnlichen Multipliziren mit Zahlen, wenn der Multiplikator aus mehr als einer Ziffer besteht, verfahren. So wie man nehmlich da so viel verschiedene Reihen von Produkten erhält, als der Multiplikator Ziffern hat, so kann man hier so viel verschiedene Reihen von Produkten formiren, als der Multiplikator verschiedene Glieder hat. Dabey muß man diejenigen Produkte unter einander ordnen, die in ihren Buchstaben ganz übereinstimmen. Endlich addirt man die verschiedenen Reihen zusammen, und bringt alles auf eine einzige Reihe. Einige Beyspiele werden diese Vorschrift am besten erläutern können.

5a + 3	6a − 4
a + 2	2a − 3
5aa + 3a	12aa − 8a
+ 10a + 6	− 18a + 12
5aa + 13a + 6	12aa − 26a + 12

$$\begin{array}{l} 4aa - 2a + 2 \\ 3a + 3 \\ \hline 12aaa - 6aa + 6a \\ \quad + 12aa - 6a + 6 \\ \hline 12aaa + 6aa \quad + 6 \end{array} \qquad \begin{array}{l} a + b \\ a - b \\ \hline aa + ab \\ \quad - ab - bb \\ \hline aa \quad - bb \end{array}$$

Das letztere Beyſpiel iſt ein Beweis, daß die Summe zweyer Zahlen mit ihrer Differenz multiplizirt zum Produkt die Differenz ihrer Quadrate gibt.

$$\begin{array}{l} 3aa - 6ab + 3bb \\ \quad a + 2b \\ \hline 3aaa - 6aab + 3abb \\ \quad + 6aab - 12abb + 6bbb \\ \hline 3aaa \quad - 9abb + 6bbb \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 4aa + 6ab + 9bb \\ 2a \quad - 3b \\ \hline 8aaa + 12aab + 18abb \\ \quad - 12aab - 18abb - 27bbb \\ \hline 8aaa \quad - 27bbb. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} a + b + c \\ a - b + c \\ \hline aa + ab \quad + ac \\ \quad - ab - bb \quad - bc \\ \quad + ac + bc + cc \\ \hline aa \quad - bb + 2ac + cc. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} aa + ab + bb \\ aa - ab + bb \\ \hline aaaa + aaab + aabb \\ \quad - aaab - aabb - abbb \\ \quad + aabb + abbb + bbbb \\ \hline aaaa \quad + aabb \quad + bbbb. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} xx - xy + yy - xz - yz + zz \\ x + y + z \\ \hline xxx - xxy + xyy - xxz - xyz + xzz \\ \quad + xxy - xyy + yyy - xyz - yyz + yzz \\ \quad + xxz - xyz - xzz + yyz - yzz + zzz \\ \hline xxx \quad + yyy - 3xyz \quad + zzz \end{array}$$

Division.

185. Alle Fälle der Division lassen sich zwar auf die allgemeine Regel zurückführen, daß der Quotient immer die Größe seyn müsse, die mit dem Divisor multiplizirt den Dividendus gibt. Indessen, um den Quotienten zu finden oder ihn gehörig auszudrücken, ist es nicht überflüssig, verschiedene Fälle zu unterscheiden.

1) Wenn der Dividendus aus andern Buchstaben besteht als der Divisor, so läßt sich der Quotient nicht anders als durch diese Buchstaben selbst, vermittelst des Divisionszeichens ausdrücken. Z. B. a dividirt durch b ist $= a : b$ oder $\frac{a}{b}$; a dividirt durch $(b \pm c)$ ist $= a : (b \pm c) = \frac{a}{b \pm c}$.

Dieß ändert sich auch nicht, wenn die Buchstaben Coefficienten bey sich haben. Z. B. $3a : 5b$ ist $= \frac{3a}{5b}$.

Lassen sich aber die Coefficienten in einander ohne Rest dividiren, oder auch nur heben, so dividirt man diese für sich und die Buchstaben bleiben unverändert. Es ist z. B. $12a : 3b = \frac{4a}{b}$; $6a : 12b = \frac{a}{2b}$; $15a : 10b = \frac{3a}{2b}$.

Hieher gehört auch der Fall, wo eine Zahl durch einen Buchstaben dividirt werden soll. Z. B. 1 dividirt durch a ist $= 1 : a = \frac{1}{a}$.

Daß man auch setzen könne $a : b = c$ versteht sich von selbst, da c jede Zahl, ganze oder gebrochne, ausdrücken *kann; nur ist* dann die Größe c nicht aus a und b abgeleitet, *sondern* willkührlich angenommen.

2) Wenn Dividendus und Diviſor zum Theil einerley Buchſtaben enthalten, ſo kann man aus beyden einen Bruch bilden, und dieſen den Regeln der Brüche gemäß behandeln. Dadurch erhält man oft einen bequemern Ausdruck für den Quotienten. Z. B. $(ab \pm bc) : ab$ iſt $= \frac{ab \pm bc}{ab} = \frac{ab}{ab} \pm \frac{bc}{ab} = 1 \pm \frac{c}{a}$; $(ab \pm cd) : bc$ iſt $= \frac{ab \pm cd}{bc} = \frac{ab}{bc} \pm \frac{cd}{bc} = \frac{a}{c} \pm \frac{d}{b}$.

Wollte man im letztern Fall die beyden Brüche auf einerley Benennung bringen und addiren oder ſubtrahiren, ſo würde man wieder den erſtern Bruch erhalten.

3) Wenn der Diviſor und Dividendus ſo beſchaffen ſind, daß man den Buchſtaben des erſtern nur einen oder mehrere Buchſtaben als Factoren hinzuzuſetzen braucht, um den Dividendus zu erhalten: ſo iſt es ein Zeichen, daß der Diviſor im Dividendus aufgeht; und dann machen eben die Buchſtaben, welche man dem Diviſor hinzuſetzen muß, um den Dividendus zu erhalten, den Quotienten aus. Es iſt z. B.

$aaa : aa = a$; $ab : a = b$; $abb : b = ab$.

Kommen in dieſem Fall noch Coefficienten hinzu, ſo wird der Quotient derſelben der Coefficient des Quotienten. Z. B.

$16aab : 2a = 8ab$; $5abc : 3b = \frac{5}{3}ac$.

4) Beſteht der Dividendus aus mehrern Gliedern, der Diviſor aber nur aus einem Gliede, ſo muß auch der Quotient ſo viele Glieder enthalten, als der Dividendus hat; und ein jedes derſelben wird gefunden, indem man die Glieder des Dividendus der Reihe nach einzeln dividirt. Z. B.

$(aa + ab - b) : a = a + b - \frac{b}{a}$.

$(12aab - 6abb) : 3ab = 4a - 2b$.

5) Enthält auch der Divisor mehrere Glieder, so wird die Division auf eine ähnliche Art gemacht, wie bey Zahlen, die mit mehrern Ziffern geschrieben werden. So wie man sich nehmlich bey diesen vorzüglich nach den höchsten Zahlen des Divisors und dem jedesmaligen höchsten Theil des Dividendus richtet, so muß man bey den Buchstaben sich auch nach dem ersten Gliede des Divisors und dem jedesmaligen ersten Gliede des Dividendus richten, und den Quotienten ebenfalls theilweise nach und nach herausbringen. Ein jedes Glied des Quotienten aber muß diejenigen Buchstaben enthalten, die mit dem ersten Gliede des Divisors als Factoren verbunden, genau den jedesmaligen ersten Theil des Dividendus geben.

a. Man ordne also den Divisor und Dividendus auf eben die Art neben einander, wie bey einem Divisions-Exempel in Zahlen; sehe dann zu, mit welchen Buchstaben man den ersten Theil des Divisors multiplizíren müsse, damit der erste Theil des Dividendus herauskomme, und nehme diese zum ersten Theil des Quotienten. Enthalten diese Glieder Coefficienten, so muß man auch diese in einander dividiren, und den Quotienten zum Coefficienten des ersten Theils des Quotienten machen. Endlich muß man auch, nach den Regeln der Division entgegengesetzter Größen, das Zeichen bestimmen, welches dieser Theil erhalten soll (134.).

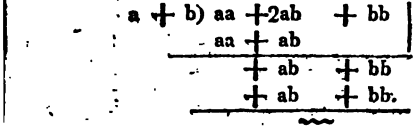
b. Mit dem gefundenen Theil des Quotienten multiplizire man darauf den ganzen Divisor, d. i. alle Glieder desselben, ordne die Produkte unter die gleichartigen Glieder des Dividendus, (d. i. diejenigen, die in ihren Buchstaben ganz mit dem Produkte übereinstimmen), und ziehe sie von diesen ab.

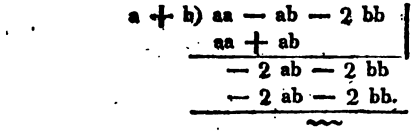
c. Zu dem Rest lasse man eines oder mehrere der folgenden Glieder des Dividendus heruntersteigen, und *dividire von neuem* hinein, indem man sich wieder genau

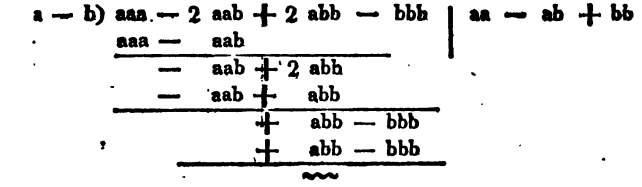
nach dem ersten dieser Glieder und dem ersten Gliede des Divisors richte. Dadurch erhält man das zweyte Glied des Quotienten. Das übrige Verfahren ist nun ganz dem Verfahren bey dem ersten Gliede ähnlich.

d. Auf diese Art muß man die Division so lange fortsetzen, bis sie aufgeht, oder es sich zeigt, daß sie überhaupt nicht aufgeht. Was in diesem letztern Falle zu thun sey, wird weiter unten gesagt werden.

Einige Beyspiele werden die gegebenen Vorschriften erläutern können.







$$
\begin{array}{l|l}
2a - 3b)\ 6aaa - 5aab - 4abb - 3bbb & 3aa + 2ab + bb \\
\underline{6aaa - 9aab} & \\
+4aab - 4abb & \\
\underline{+4aab - 6abb} & \\
+2abb - 3bbb & \\
\underline{+2abb - 3bbb} & \\
\sim & \\
3x + 4y)\ 15xxx + 2xxy - 12xyy + 16yyy & 5xx - 6xy + 4yy \\
\underline{15xxx + 20xxy} & \\
-18xxy \quad 12xyy & \\
\underline{-18xxy - 24xyy} & \\
+12xyy + 16yyy & \\
\underline{+12xyy + 16yyy} & \\
\sim &
\end{array}
$$

e. Es geschieht aber bey dieser Rechnung häufig, daß zu den Produkten verschiedener Theile des Quotienten und des Divisors sich keine gleichartigen Glieder im Dividendus finden, von denen sie abgezogen werden könnten, und daß gleichwohl die Division ohne Rest aufgeht. In diesem Fall denke man sich im Dividendus ein Glied $= 0$, und ziehe das Produkt, zu dem sich kein gleichartiges Glied findet, hiervon ab, d. h. man setze es mit dem entgegengesetzten Zeichen herunter. Denn eine positive Größe von Null abgezogen wird negativ, und eine negative positiv (115.). Z. B.

$$\begin{array}{r|l} a + b)\ aa - bb & a - b \\ \underline{aa + ab\ \ \ \ } & \\ -ab - bb & \\ \underline{-ab - bb} & \\ \sim & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} a - b)\ aaa - bbb & aa + ab + bb \\ \underline{aaa - aab\ \ \ \ } & \\ +aab - bbb & \\ \underline{+aab - abb\ \ \ \ } & \\ +abb - bbb & \\ \underline{+abb - bbb.} & \\ \sim & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 3a + 2b)\ 9aaa - abb + 2bbb & 3aa - 2ab + bb \\ \underline{9aaa + 6aab\ \ \ \ \ \ \ } & \\ -6aab - abb & \\ \underline{-6aab - 4abb\ \ \ \ } & \\ +3abb + 2bbb & \\ \underline{+3abb + 2bbb.} & \\ \sim & \end{array}$$

$$
\begin{array}{l|l}
3aa - 6ab + 4bb)\ 9aaaa - 12aabb + 16bbbb & 3aa + 6ab + 4bb \\
\quad 9aaaa - 18aaab + 12aabb & \\
\hline
\quad\quad + 18aaab - 24aabb & \\
\quad\quad + 18aaab - 36aabb + 24abbb & \\
\hline
\quad\quad\quad + 12aabb - 24abbb + 16bbbb & \\
\quad\quad\quad + 12aabb - 24abbb + 16bbbb. & \\
\hline
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|l}
a + b + c)\ aaa - 3abc + bbb + ccc & aa - ab + bb - ac - bc + cc \\
\quad aaa + aab + aac & \\
\hline
\quad\quad - aab - aac - 3abc & \\
\quad\quad - aab - abb - abc & \\
\hline
\quad\quad\quad + abb - aac - 2abc + bbb & \\
\quad\quad\quad + abb + bbb + bbc & \\
\hline
\quad\quad\quad\quad - aac - 2abc - bbc & \\
\quad\quad\quad\quad - aac - abc - acc & \\
\hline
\quad\quad\quad\quad\quad - abc + acc - bbc & \\
\quad\quad\quad\quad\quad - abc - bbc - bcc & \\
\hline
\quad\quad\quad\quad\quad\quad + acc + bcc + ccc & \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad + acc + bcc + ccc & \\
\hline
\end{array}
$$

1. Zur Probe der Richtigkeit der Rechnung darf man nur den Quotienten mit dem Divisor multipliziren; alsdann muß der Dividendus herauskommen. Sind die Exempel von der letztern Art, so wird man finden, daß wenn man die verschiedenen Reihen der Produkte zusammen addirt, um das Hauptprodukt zu erhalten, sich manche Glieder so gegen einander aufheben, daß dadurch ein Glied = 0 entsteht, welches aber natürlich weggelassen wird.

2. Wenn man sich zur Uebung solche Exempel verschaffen will, die sich ohne Rest dividiren lassen, so muß man erst ein Multiplikations-Exempel ausrechnen; alsdann das Produkt desselben zum Dividendus, und einen der Factoren zum Divisor nehmen.

186. Wenn die Division in einem Exempel nicht aufgeht, so drückt man den Quotienten entweder geradezu durch den Dividendus und Divisor als einen Bruch aus; oder man entwickelt die Glieder so weit es geht, und macht den übrig bleibenden Rest, wie bey einer gewöhnlichen Division in Zahlen, zum Zähler eines Bruchs, dessen Nenner der Divisor wird, und fügt diesen dem Quotienten hinzu; oder endlich man sucht den Quotienten durch eine fortlaufende Reihe von Gliedern auszudrücken. Im letztern Fall kommt man zwar eigentlich nie zu Ende, d. h. die Reihe **geht ins Unendliche fort**, aber man kann in vielen Fällen bald dahin gelangen, **das Gesetz** zu erkennen, nach welchem die Glieder fortgehen; und also die Reihe so weit fortsetzen, als man nur will. Z. B.

1) $a : (a + b)$ ist $= \frac{a}{a + b}$.

2) $(12aa - 9ab + 6bb) : (3a - 4b)$ gibt folgende Rechnung:

$$
\begin{array}{l|l|l}
3a - 4b & 12aa - 9ab + 6bb & 4a + 1\frac{1}{3}b \\
 & \underline{12aa - 16ab} & \\
 & + 7ab + 6bb & \\
 & \underline{+ 7ab - 9\frac{1}{3}bb} & \\
 & + 15\frac{1}{3}bb &
\end{array}
$$

Dieser Rest gibt den Bruch $+\frac{15\frac{1}{3}bb}{3a-4b}$, welcher dem Quotienten beygefügt werden muß.

3) Soll der Quotient $\frac{a}{a+c}$ in eine fortlaufende Reihe entwickelt werden, so geschieht es auf folgende Art:

$$
\begin{array}{l|l}
a+b)\,a & 1-\frac{b}{a}+\frac{bb}{aa}-\frac{bbb}{aaa}+\ldots \\
\underline{a+b} & \\
\quad -b & \\
\quad \underline{-b-\frac{bb}{a}} & \\
\qquad +\frac{bb}{a} & \\
\qquad \underline{+\frac{bb}{a}+\frac{bbb}{aa}} & \\
\qquad\quad -\frac{bbb}{aa} & \\
\qquad\quad \underline{-\frac{bbb}{aa}-\frac{bbbb}{aaa}} & \\
\qquad\qquad +\frac{bbbb}{aaa} &
\end{array}
$$

Hier sieht man leicht, wie die Glieder des Quotienten weiter fortgesetzt werden müßten: mit jedem neuen Gliede nehmlich vermehrt sich die Anzahl der Factoren im Zähler um ein b, und im Nenner um ein a, und die Zeichen der Glieder wechseln ab.

Auf gleiche Art dividire man a durch a — b. Dieß gibt folgende Rechnung:

$$
\begin{array}{l|l}
a - b)\ a & 1 + \frac{b}{a} + \frac{bb}{aa} + \frac{bbb}{aaa} + \ldots \\
\underline{a - b} & \\
+ b & \\
+ b - \frac{bb}{a} & \\
\underline{\qquad\qquad} & \\
+ \frac{bb}{a} & \\
+ \frac{bb}{a} - \frac{bbb}{aa} & \\
\underline{\qquad\qquad} & \\
+ \frac{bbb}{aa} & \\
+ \frac{bbb}{aa} - \frac{bbbb}{aaa} & \\
\underline{\qquad\qquad} & \\
+ \frac{bbbb}{aaa} &
\end{array}
$$

Diese Reihe des Quotienten ist der vorigen gleich, mit dem Unterschiede, daß alle Glieder positiv sind.

Nimmt man in der erstern dieser beyden Rechnungen $a - b$ zum Dividendus, und in der letztern $a + b$, so verwandelt sich die erstere Reihe in

$$1 - \frac{2b}{a} + \frac{2bb}{aa} - \frac{2bbb}{aaa} + \ldots$$

und die letztere in

$$1 + \frac{2b}{a} + \frac{2bb}{aa} + \frac{2bbb}{aaa} + \ldots$$

und man erhält dadurch den Quotienten, welchen die Differenz zweyer Zahlen durch ihre Summe, oder die Summe durch die Differenz derselben dividirt gibt, auf eine allgemeine Art ausgedrückt.

187. Um besser zu verstehen, was diese Reihen sagen wollen, lege man den Buchstaben bestimmte Werthe unter, und vergleiche dann den Ausdruck, welchen Divisor und Dividendus geben, mit dem, welchen die Reihe des Quotienten gibt.

1. Es sey z. B. $a = 1$ und $b = 1$, so ist $\frac{a}{a+b} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$. Die Reihe, die diesen Quotienten ausdrückt, ist $1 - \frac{1}{1} + \frac{1 \cdot 1}{1 \cdot 1} - \frac{1 \cdot 1 \cdot 1}{1 \cdot 1 \cdot 1} + \ldots = 1 - 1 + 1$

$-1+\ldots$ Jedes Glied ist $=1$. Es scheint also nicht, als ob diese Reihe $=\frac{1}{2}$ seyn könnte; denn jede gerade Anzahl von Gliedern derselben ist $=0$; jede ungerade $=1$.

Allein man darf nicht vergessen, daß zu jeder endlichen Anzahl von Gliedern noch der Rest durch den Divisor dividirt als ein Theil des Quotienten gehöre; und dieser ist hier allemal $=\frac{1}{2}$; und zwar bey einer geraden Anzahl von Gliedern $=+\frac{1}{2}$; bey einer ungeraden $=-\frac{1}{2}$. Nun ist aber sowohl $0+\frac{1}{2}$ als $1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$; folglich drückt der Quotient den Bruch $\frac{1}{2}$ richtig aus.

2. Betrachtet man den andern Quotienten unter derselben Voraussetzung, so ist $\frac{a}{a-b}=\frac{1}{1-1}=\frac{1}{0}$; und die Reihe, die den Quotienten ausdrückt, ist $=1+1+1+1+\ldots$ Dieß ins Unendliche fortgesetzt gibt offenbar eine unendliche Größe. Folglich muß der Ausdruck $\frac{1}{0}$ etwas unendlich Großes anzeigen. Dasselbe aber ergibt sich auch unmittelbar aus der Betrachtung des Ausdrucks $\frac{1}{0}$. Denn $\frac{1}{\frac{1}{2}}$ ist $=2$; $\frac{1}{\frac{1}{3}}=3$; $\frac{1}{\frac{1}{100}}=100$; $\frac{1}{\frac{1}{1000}}=1000$ u. s. f. Der Werth solcher Brüche wird desto größer, je kleiner ihr Nenner ist. Welcher Nenner aber kann kleiner als Null seyn? Folglich muß auch der Werth des Bruchs $\frac{1}{0}$ größer als jede endliche Größe, d. i. unendlich groß seyn. (Vergl. 42. 2. u. 56. 2.)

3. Setzt man $a=2$, und $b=1$, so ist $\frac{a}{a+b}=\frac{2}{3}$, und $\frac{a}{a-b}=2$; und diesen beyden Werthen kommen die Reihen beyder Quotienten um so näher, je mehrere Glieder derselben man nimmt.

Auf diese Art lassen sich noch viele Zahlen mit diesen Reihen, und eben so mit den beyden andern, vergleichen, und es ist für den Anfänger nützlich, solche Vergleichungen anzustellen.

188. Durch Hülfe der Buchstaben-Rechnung läßt sich auch das oben beschriebene Verfahren beym Heben der Brüche (62.) allgemein erläutern. Man setze, es sey der Bruch $\frac{a}{b}$, b sey $=ma+c$, und $a=nc$,

so ist $b = mnc + c = (mn + 1)c$; folglich läßt sich sowohl a als b durch c dividiren, und c ist der größte gemeinschaftliche Theiler für a und b, weil jede andere größere Zahl, die in a aufgeht, auch in ma aufgeht; folglich in b dividirt, c übrig läßt; in c aber keine Zahl, die größer als c ist, aufgehen kann.

Geht c nicht in a auf, so sey $a = nc + d$, und $c = pd$; alsdann ist $a = npd + d = (np + 1)d$, und d der größte gemeinschaftliche Theiler für c und a; folglich auch für $ma + c$ d. i. für b.

Auf diese Art kann man weiter schließen, daß, wenn d nicht in c aufginge, sondern $c = pd + e$; und $d = qe$ wäre, e der größte gemeinschaftliche Theiler für c und d, folglich auch für $nc + d$ d. i. für a; und endlich für $ma + c$ d. i. für b seyn würde.

Ist aber $d = qe$, so geht e in d dividirt auf, und ist eben der letzte Divisor, durch welchen, nach dem obigen Verfahren, sich der Bruch heben läßt.

189. Wenn zwey verschiedene Zahlen, durch eine dritte dividirt, einerley Rest geben, so geht diese dritte in der Differenz der beyden ersten ohne Rest auf.

Auch dieser Satz kann durch Buchstabenrechnung leicht allgemein erwiesen werden.

Denn es sey die eine Zahl p, die andere q, die beyde, durch m dividirt, den Rest d übrig lassen, so kann man setzen

$$p = ma + d$$
$$q = mb + d$$

folglich $p - q = ma - mb = m(a - b)$

wo m ein Factor der Differenz ist, also in $(p - q)$ aufgeht.

Z. B. 48 : 5 = 9 und 3 bleibt übrig
23 : 5 = 4 und 3 bleibt gleichfalls übrig;
daher 48 — 23 d. i. 25 durch 5 dividirt, aufgeht.

Siebenter Abschnitt.

Von den Potenzen.

190. So wie alle Zahlen aus der Einheit, oder aus Theilen derselben durch wiederholtes Addiren zusammengesetzt werden können, so lassen sie sich auch durch fortgesetztes Multipliziren oder Dividiren der Einheit mit einerley Zahl erzeugen.

191. Insofern aber eine Zahl aus der Einheit durch Multipliziren oder Dividiren derselben mit einerley Zahl erzeugt wird, heißt sie eine Potenz oder Dignität (potentia, dignitas) dieser Zahl. Wenn z. B. $1 . 5 . 5 . 5 = 125$; $1 . 3 . 3 = 9$ ist, so ist 125 eine Potenz von 5; 9 eine Potenz von 3. Ingleichen wenn $1 : 5 = \frac{1}{5}$; $\frac{1}{5} : 5 = \frac{1}{25}$; $\frac{1}{25} : 5 = \frac{1}{125}$ ist, so ist $\frac{1}{125}$ ebenfalls eine Potenz von 5; und so ist auch $\frac{1}{9}$ eine Potenz von 3.

Auf welche Art die Potenzen, welche durch Multipliziren der Einheit entstehen, von denen, die durchs Dividiren derselben erzeugt werden, unterschieden werden müssen, wird gleich aus dem Folgenden erhellen.

192. Die Zahl, mit welcher die Einheit multiplizirt oder dividirt werden muß, heißt die Wurzel (radix), und die Zahl, welche anzeigt, wie vielmal das Multipliziren oder Dividiren geschehen soll, der Exponent der Potenz.

193. Da aber die Einheit durch das Multipliziren *mit einer ganzen* Zahl eben so vielmal vergrößert,

als durch das Dividiren mit derselben verkleinert wird, so kann man beyde Operationen in dieser Rücksicht als entgegengesetzt betrachten. Setzt man das Multipliziren positiv, so wird das Dividiren negativ.

194. Man muß daher auch die Exponenten der Potenzen in positive und negative unterscheiden: ein positiver Exponent zeigt an, wie vielmal die Einheit mit der Wurzel multiplizirt; ein negativer, wie vielmal sie durch dieselbe dividirt werden müsse.

Wenn nach dem vorigen Beyspiele die Einheit 3 mal mit 5 multiplizirt werden muß, um die Potenz 125 zu erzeugen, so ist der Exponent dieser Potenz + 3 oder schlechtweg 3. Hingegen entsteht die Potenz $\frac{1}{125}$ dadurch, daß die Einheit 3 mal durch einerley Zahl dividirt wird, und daher ist der Exponent derselben = − 3.

195. Um anzudeuten, daß eine Wurzel auf irgend eine Potenz erhoben werden solle, wie man sagt, schreibt man ihr den Exponenten oben zur Rechten hin. Z. B. 5^3 zeigt an, daß die Einheit 3 mal mit derselben Zahl, 5, multiplizirt werden soll, und ist also $= 1 . 5 . 5 . 5 = 125$; 5^{-3} zeigt an, daß die Einheit 3 mal durch dieselbe Zahl, 5, dividirt werden soll, und ist also $= (\frac{1}{5} : 5) : 5 = \frac{1}{125}$. Eben so ist $a^2 = 1 . aa$; $a^{-1} = \frac{1}{a}$.

196. Da die Einheit als Factor keinen Einfluß auf die Größe des Produkts hat, so pflegt man sie bey den Potenzen mit positiven Exponenten außer Acht zu lassen. Z. B. anstatt zu setzen $5^2 = 1 . 5 . 5$ setzt man $5^2 = 5 . 5$; und freylich ist beydes $= 25$. Diese Verwechselung ist also an sich betrachtet gleichgültig; allein man darf deßhalb nicht vergessen, daß die Einheit in diesem Fall nur vernachlässigt wird, welches nicht eben sowohl in andern Fällen, z. B. bey negativen Exponenten, geschehen darf.

197. Eine Zahl durch mehrere Zahlen der Reihe nach dividiren, ist eben so viel, als sie durch ein Produkt dieser Zahlen auf einmal dividiren (42, 3.). Eine Potenz mit negativem Exponenten ist also eben so viel als die Einheit durch die Potenz mit entgegengesetztem Exponenten dividirt. Z. B. 5^{-3} ist $= \frac{1}{5^3} = \frac{1}{5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{1}{125}$; $a^{-3} = \frac{1}{a^3} = \frac{1}{aaa}$.

198. Man muß sich hüten, die Exponenten der Potenzen mit Factoren zu verwechseln. Z. B. 9^2 darf man nicht durch $2 \cdot 9$; noch 9^{-2} durch $-2 \cdot 9$ ausdrücken. Eben so wenig darf man eine Potenz mit negativem Exponenten, um dieses Exponenten willen, für eine negative Größe ansehen. Sie ist ein Bruch, dessen Zähler 1 und dessen Nenner die Potenz mit dem entgegengesetzten positiven Exponenten ist. Ob dieser Bruch positiv oder negativ ist, hängt, wie bey jeder Potenz, von der Beschaffenheit der Wurzel und der Größe des Exponenten, nicht von dem Vorzeichen desselben ab.

199. Eine jede Zahl kann Wurzel einer Potenz seyn — da sich die Einheit durch jede Zahl multipliziren oder dividiren läßt — also auch eine negative Zahl. Also kann auch eine Potenz negativ seyn. Aber nicht einmal eine jede Potenz einer negativen Wurzel ist selbst negativ. Denn da eine gerade Anzahl negativer Factoren jederzeit ein positives Produkt gibt, so muß auch eine Potenz, deren Exponent eine gerade Zahl ist, positiv seyn, wenn gleich ihre Wurzel negativ ist. Folglich sind nur diejenigen Potenzen negativer Wurzeln selbst negativ, deren Exponent eine ungerade Zahl ist.

Auf das Vorzeichen der Exponenten kommt hierbey nichts an, da die Regel der Multiplikation und der Division an-

gegengesetzter Größen in Absicht auf das Vorzeichen des Produkts und des Quotienten einerley ist.

Dieß hindert aber nicht, daß auch eine Potenz mit einem geraden Exponenten unter gewissen Umständen als negativ betrachtet werden könne; nur ist sie es alsdann nicht, weil ihre Wurzel negativ wäre.

200. Um eine Zahl auf eine Potenz zu erheben, bedarf es keiner andern Rechnung als der Multiplikation oder Division; und es ist klar, daß man jede Zahl auf unzählig verschiedene Potenzen erheben kann, je nachdem man die Einheit mehr- oder wenigermal mit ihr multiplizirt oder dividirt. Folglich kann dieselbe Zahl die Wurzel unzähliger Potenzen seyn. Z. B. $1 . 4$ ist $= 4$; $1 . 4 . 4 = 16$; $1 . 4 . 4 . 4 = 64$; ingleichen $1 : 4 = \frac{1}{4}$; $\frac{1}{4} : 4 = \frac{1}{16}$; $\frac{1}{16} : 4 = \frac{1}{64}$. Also ist 4 die Wurzel von 4, 16, 64; ingleichen von $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{64}$ u. s. f.

201. Auf der andern Seite kann dieselbe Zahl als Potenz unzählig verschiedener Wurzeln betrachtet werden. Denn jede Zahl, durch welche die Potenz erzeugt werden kann, indem man die Einheit ein- oder mehreremal mit ihr multiplizirt oder dividirt, ist eine solche Wurzel. Z. B. 64 ist $= 1 . 64 = 1 . 8 . 8 = 1 . 4 . 4 . 4 = 1 . 2 . 2 . 2 . 2 . 2 . 2 = 1 : \frac{1}{64}$. Folglich ist 64 eine Potenz von 64, von 8, von 4, von 2, von $\frac{1}{64}$ u. s. f.

202. Man unterscheidet daher die Potenzen nach Graden, und bezeichnet durch den Grad, wie vielmal die Einheit mit der Wurzel multiplizirt oder dividirt werden müsse, um eine gewisse Potenz hervorzubringen. Z. B. eine Potenz vom ersten Grade ist diejenige, die durch einmaliges Multipliziren der Einheit mit der Wurzel entsteht; eine Potenz vom zweyten Grade diejenige, welche durch zweymaliges Multipliziren der Einheit mit der Wurzel ent-

steht, u. s. w. Diejenigen Potenzen aber, welche durch Dividiren der Einheit mit der Wurzel erzeugt werden, werden durch negative Grade bezeichnet. Z. B. eine Potenz vom (—1)sten Grade ist diejenige, welche durch einmaliges Dividiren der Einheit mit der Wurzel entsteht; eine Potenz vom (—2)ten Grade diejenige, welche durch zweymaliges Dividiren entsteht, u. s. w. Da nun der Exponent nach obigem (192.) anzeigt, wie vielmal die Einheit mit der Wurzel multiplizirt oder dividirt werden müsse, um eine gewisse Potenz zu erzeugen, so ist er eben diejenige Zahl, welche den Grad einer Potenz bestimmt.

1. Die Potenzen vom ersten positiven Grade sind der Wurzel gleich, da das Produkt der Einheit mit irgend einer Zahl jederzeit dieser Zahl gleich ist.

2. Anstatt Potenz vom ersten Grade, Potenz vom zweyten Grade, Potenz vom (—1)sten Grade u. s. w. sagt man auch schlechtweg erste Potenz, zweyte Potenz, (—1)ste Potenz u. s. w.

3. Wenn man auf eine allgemeine Art eine Potenz von unbestimmtem Grade ausdrücken will, so kann dieß durch a^n geschehen; welches so viel ist, als die nte Potenz von a, d. i. die Einheit n mal mit a multiplizirt. Eben so ist $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

203. Für die Potenzen gewisser Grade und ihre Wurzeln hat man besondere Benennungen: die Potenzen vom zweyten Grade werden Quadrate, und ihre Wurzeln Quadratwurzeln; die Potenzen vom dritten Grade Würfel (Cubi), und ihre Wurzeln Cubikwurzeln; die Potenzen vom vierten Grade Biquadrate, und ihre Wurzeln Biquadratwurzeln genannt.

1. Sonst hat man noch mehrere dergleichen besondere Benennungen gehabt, die aber jetzt nicht mehr üblich sind.

2. Die Benennungen Quadrat und Würfel sind

aus der Geometrie entlehnt, wovon der Grund aus Geom. 20., 1. Zuſ. u. 245., 1. Zuſ. erhellet.

204. So wie man eine Potenz durch ihre Wurzel und den Exponenten ausdrücken kann, ſo kann man umgekehrt auch die Wurzel durch die Potenz und den Exponenten ausdrücken. Man bedient ſich hierzu eines beſondern Zeichens — des ſogenannten Wurzelzeichens ($\sqrt{}$) — welches der Potenz vorgeſetzt, und in deſſen Oeffnung der Exponent geſchrieben wird. Nur bey Bezeichnung der Quadratwurzel pflegt man den letztern wegzulaſſen und das Zeichen allein hinzuſetzen. Z. B. $\sqrt{64}$ heißt Quadratwurzel aus 64, d. i. 8; $\sqrt[3]{125}$ heißt Cubikwurzel aus 125, d. i. 5; $\sqrt[6]{729}$ heißt die Wurzel, die in der ſechſten Potenz 729 gibt, oder kürzer, die ſechſte Wurzel von 729, d. i. 3; $\sqrt[-3]{\frac{1}{64}}$ heißt die Wurzel, die in der (—3)ten Potenz $\frac{1}{64}$ gibt, oder, die —3)te Wurzel von $\frac{1}{64}$, d. i. 4. Eben ſo wird die Quadratwurzel aus a durch $\sqrt{a}$ bezeichnet; $\sqrt[n]{a}$ heißt die nte Wurzel aus a; $\sqrt[-n]{\frac{1}{a^n}}$ heißt die Wurzel, die in der (—n)ten Potenz $\frac{1}{a^n}$ gibt, oder die (—n)te Wurzel von $\frac{1}{a^n}$ d. i. a.

Die Wurzel aus einer Potenz zu finden, erfordert eine eigene Rechnung, die weiter unten gelehrt wird.

205. Man hat noch eine andere Art, eine Wurzelgröße durch ihre Potenz auszudrücken, nehmlich, vermittelſt gebrochener Exponenten. Z. B. um die Quadratwurzel von 36 auszudrücken, ſetzt man $36^{\frac{1}{2}}$, d. i. ſo viel als halbe Potenz von 36. Betrachtet man aber 6 als eine Potenz, ſo kann man es $= 1 . 6 . 6$ ſetzen;

und soll die Einheit nur halb so vielmal multiplizirt werden, als zur Erzeugung der ganzen Potenz erforderlich ist, so hat man $1 . 6 = 6$, welches eben die Quadratwurzel von 36 ist. Eben so bedeutet $36^{-\frac{1}{2}}$ so viel, als die Einheit ein halbmal so viel dividirt, als zur Erzeugung der ganzen Potenz $36^{-1} = \frac{1}{6 . 6}$ nöthig ist, d. i. $1 : 6 = \frac{1}{6}$. Allgemeiner ausgedrückt ist $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$. Denn da $1 . \sqrt{a} . \sqrt{a} = a$ ist, so ist $1 . \sqrt{a}$ der halben Potenz von a gleich.

Auf ähnliche Art kann man schließen, daß $a^{\frac{1}{3}}$ so viel heißt, als die Einheit nur $\frac{1}{3}$ mal so viel multiplizirt, als die ganze Potenz a erfordert. Nun ist $1 . \sqrt[3]{a} . \sqrt[3]{a} . \sqrt[3]{a} = a$, also ist $1 . \sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$.

Hiernach wird $a^{\frac{1}{n}}$ so viel seyn, als die Einheit nur $\frac{1}{n}$ mal so viel multiplizirt, als zur ganzen Potenz a erforderlich ist, d. i. $1 . \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a}$.

Setzt man die Exponenten negativ, so ist leicht einzusehen, daß $a^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$; $a^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a}}$; $a^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}}$ seyn müsse.

1. Betrachtet man a als eine Potenz, so muß man es als ein Produkt aus lauter gleichen Factoren ansehen. Daher ist $a^{\frac{1}{2}}$ auch so viel, als die Einheit mit der Hälfte der gleichen Factoren von a multiplizirt; $a^{\frac{1}{3}} = 1$ multiplizirt mit einem Drittheil der gleichen Factoren von a; $a^{\frac{1}{n}} = 1$ multiplizirt mit dem nten Theil dieser Factoren.

2. Nach der Analogie dieser Ausdrücke läßt sich auch schon die Bedeutung solcher gebrochenen Exponenten erken-

nen, deren Zähler eine andre Zahl als 1 ist. Z. B. $a^{\frac{2}{3}}$ ist so viel, als die Einheit mit zwei Drittheilen der gleichen Factoren von a multiplicirt, d. i. $= 1 \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a}$; doch kann hiervon erst weiter unten vollständig gehandelt werden.

206. Wenn die Wurzel einer Potenz ein Bruch ist, so muß man nach der Regel der Multiplikation der Brüche verfahren, um ihn auf die Potenz zu erheben. Z. B. der Würfel von $\frac{3}{4}$ ist $= 1 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{27}{64}$. Diese Potenz ist wiederum ein Bruch, dessen Zähler der Würfel des Zählers der Wurzel, und dessen Nenner der Würfel des Nenners der Wurzel ist. Man kann also überhaupt einen Bruch auf irgend eine Potenz erheben, wenn man sowohl den Zähler, als den Nenner desselben auf die Potenz von dem nehmlichen Grade erhebt, auf welchen der ganze Bruch erhoben werden soll, und jene Potenz wiederum zum Zähler, diese zum Nenner macht.

1. Soll eine vermischte Zahl auf eine Potenz erhoben werden, so muß man sie in einen uneigentlichen Bruch verwandeln, und mit diesem, wie mit einem eigentlichen verfahren. Z. B. $(5\frac{2}{3})^3$ ist $= (\frac{17}{3})^3 = (\frac{289}{9}) = 32\frac{1}{9}$.

2. Ist die Wurzel ein eigentlicher Bruch, und der Exponent eine ganze positive Zahl, so werden die Potenzen kleiner als die Wurzel, und zwar um so mehr, je größer der Exponent ist. Wenn aber der Exponent eine ganze negative Zahl ist, so werden die Potenzen größer als die Wurzel, und zwar um so mehr, je größer ihr Exponent ist. Z. B. $(\frac{1}{2})^{-1} = 1 : (\frac{1}{2})^1 = 1 : \frac{1}{2} = 2$; $(\frac{1}{2})^{-3}$ ist $= 1 : (\frac{1}{2})^3 = 1 : \frac{1}{8} = 8$.

3. Um anzudeuten, daß ein Bruch oder eine vermischte Zahl auf eine Potenz erhoben werden soll, muß man, wie in den angeführten Beyspielen, die Zahl in Klammern schließen, und den Exponenten außerhalb setzen. Schreibt man

z. B. $\frac{3}{4}^2$, so deutet man dadurch nur an, daß der Zähler aufs Quadrat erhoben werden soll; es ist also $\frac{3}{4}^2 = \frac{9}{4}$; hingegen ist $(\frac{3}{4})^2 = \frac{9}{16}$.

207. Umgekehrt, wenn man die Wurzel aus einem Bruche ziehen soll, so muß sie sowohl aus dem Zähler, als aus dem Nenner desselben gezogen werden. Z. B. die Quadratwurzel von $\frac{9}{16}$ ist $= \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}} = \frac{3}{4}$.

Man muß daher das Wurzelzeichen mitten vor den Bruch, aus welchem die Wurzel gezogen werden soll, setzen, oder diesen, wie bey Erhebung auf eine Potenz, in Klammern einschließen, und den gebrochenen Exponenten außerhalb derselben hinschreiben. Z. B. die Cubikwurzel aus $\frac{8}{27}$ läßt sich ebensowohl durch $\sqrt[3]{\frac{8}{27}}$ als durch $(\frac{8}{27})^{\frac{1}{3}}$ ausdrücken.

Rechnungen mit Potenzen von einerley Wurzel.

208. I. Wenn man eine Potenz mit einer andern von derselben Wurzel multiplizirt, so wird das Produkt wieder eine Potenz der nehmlichen Wurzel, der Exponent derselben aber so groß, als die Summe der Exponenten der Factoren.

Diese Regel ist allgemein gültig; es lassen sich aber verschiedene Fälle unterscheiden, welche besonders betrachtet zu werden verdienen:

209. 1) Wenn die Exponenten beyder Potenzen positive ganze Zahlen sind.

Es sey z. B. 3^2 mit 3^3 zu multipliziren, so ist das Produkt $= 3^5 = 243$.

Denn es ist $3^2 = 1 \cdot 3 \cdot 3$; und $3^3 = 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$; folglich $3^2 \cdot 3^3 = 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$, welches eben so viel als 3^5 ist.

Man setze anstatt 3 den allgemeinen Ausdruck a, so ist auch $a^2 \cdot a^3 = 1aa \cdot 1aaa = 1 \cdot aaaaa = a^5$.

Ganz allgemein also ist $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$. Denn a^m ist eine Potenz, in welcher die Einheit m mal mit a multiplizirt ist, und a^n eine Potenz, in welcher die Einheit n mal mit a multiplizirt ist. Beyde Potenzen zusammen multiplizirt geben folglich ein Produkt, welches, außer der Einheit, den Factor a (m + n) mal enthält, und dieß ist eben die (m + n)te Potenz von a.

210. 2) Wenn die Exponenten beyder Potenzen negative ganze Zahlen sind.

Es sey z. B. 5^{-1} mit 5^{-2} zu multipliziren, so ist das Produkt $= 5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$.

Denn es ist $5^{-1} = \frac{1}{5^1}$; und $5^{-2} = \frac{1}{5^2}$; folglich

$5^{-1} \cdot 5^{-2} = \frac{1}{5^1} \cdot \frac{1}{5^2} = \frac{1}{5^1 \cdot 5^2} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$.

Die Art des Beweises ändert sich nicht, wenn man anstatt 5 die unbestimmte Zahl a setzt.

Ganz allgemein also ist $a^{-m} \cdot a^{-n} = a^{-(m+n)}$. Denn a^{-m} ist so viel als die Einheit m mal durch a dividirt, oder $= \frac{1}{a^m}$; und a^{-n} ist soviel als die Einheit n mal durch a dividirt, oder $= \frac{1}{a^n}$. Folglich ist $a^{-m} \cdot a^{-n} = \frac{1}{a^m} \cdot \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a^m \cdot a^n} = \frac{1}{a^{m+n}}$, welches eben so viel als $a^{-(m+n)}$ ist.

211. 3) Wenn die Exponenten beyder Potenzen ganze Zahlen mit ungleichen Vorzeichen sind.

Es sey z. B. a^3 mit a^{-2} zu multipliziren, so ist das Produkt $= a^{3+(-2)} = a^{3-2} = a^1 = a$.

Denn es ist $a^3 = 1 . aaa$; und $a^{-2} = \frac{1}{aa}$; folglich $a^3 . a^{-2} = 1 . aaa . \frac{1}{aa} = \frac{aaa}{aa} = \frac{a}{1} = a$.

Ist der negative Exponent größer als der positive, z. B. $a^2 . a^{-3}$, so ist das Produkt $= a^{2+(-3)} = a^{2-3} = a^{-1} = \frac{1}{a}$.

Denn es ist $a^2 . a^{-3} = 1 . aa . \frac{1}{aaa} = \frac{aa}{aaa} = \frac{1}{a}$.

Allgemein also ist $a^m . a^{-n} = a^{m+(-n)} = a^{m-n}$. Denn man kann das Produkt als einen Bruch, $\frac{a^m}{a^n}$, betrachten, dessen Zähler aus m, und dessen Nenner aus n Factoren besteht, die alle einander gleich, nehmlich $= a$, sind. Eine gleiche Anzahl dieser Factoren im Zähler und Nenner heben sich gegen einander auf; es bleiben also nur so viel Factoren in einem von beyden übrig, als die Anzahl der Factoren in diesem von Anfang größer als in dem andern war. Ist also $m > n$, so heben alle Factoren des Nenners sich gegen n Factoren des Zählers auf, und es bleiben hier noch $m - n$ Factoren, deren jeder $= a$ ist, übrig, welche eben die Potenz a^{m-n} ausmachen.

Ist hingegen $n > m$, so heben sich die m Factoren des Zählers gegen m Factoren des Nenners auf, und es bleiben hier noch $n - m$ Factoren übrig, welche die Potenz a^{n-m} ausmachen. In diesem Fall ist also das Produkt $= \frac{1}{a^{n-m}}$, welches eben so viel als $a^{-(n-m)} = a^{m-n}$ ist.

212. 4) Wenn die Exponenten beyder Potenzen **brochene Zahlen** sind.

Es sey z. B. $64^{\frac{1}{2}}$ mit $64^{\frac{1}{3}}$ zu multipliziren, so ist

das Produkt $= 64^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = 64^{\frac{5}{6}}$, d. i. die Einheit mit $\frac{5}{6}$ der gleichen Factoren von 64 multiplizirt oder 64 in 6 gleiche Factoren zertheilt, und mit 5 derselben die Einheit multiplizirt. Nun ist $64 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$; also sind $\frac{5}{6}$ dieser Factoren $= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$. Folglich ist $64^{\frac{5}{6}} = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$.

Zur Probe von der Richtigkeit dieses Verfahrens suche man $64^{\frac{1}{2}}$, d. i. 8; ingleichen $64^{\frac{1}{3}}$, d. i. 4, und multiplizire beydes, so erhält man $8 \cdot 4 = 32$.

Anstatt 64 setze man die unbestimmte Zahl a, so muß ebenfalls $a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{5}{6}}$ seyn.

Denn es sey $a = q \cdot q$, so ist $a^{\frac{1}{2}} = 1 \cdot q$; ingleichen sey $a = p \cdot p \cdot p$, so ist $a^{\frac{1}{3}} = 1 \cdot p$. Folglich ist $a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{3}} = pq$. Daß aber pq so viel ist, als 1 mit $\frac{5}{6}$ der gleichen Factoren von a multiplizirt, läßt sich auf folgende Art darthun:

Es ist, der Annahme zufolge, $a^3 = qqqqqq$ und $a^2 = pppppp$, folglich $a^3 : a^2 = a$ (185, 3. ingl. 213.) $= \frac{qqqqqq}{pppppp}$; also $a^{\frac{5}{6}} = \frac{qqqqq}{ppppp}$; und da $qq = ppp$ ist, so ist $a^{\frac{5}{6}} = \frac{pppppqq}{ppppp} = pq$.

Nach dieser Auseinandersetzung wäre es wohl überflüssig, die Fälle, in denen ganze Exponenten mit gebrochenen, bey gleichen oder ungleichen Vorzeichen, in Verbindung; oder gebrochene mit negativen oder ungleichen Vorzeichen, vorkommen, hier besonders zu betrachten.

213. II. Wenn man eine Potenz durch eine andere von derselben Wurzel dividirt, so wird der Quotient eine Potenz derselben Wurzel, deren Exponent der Differenz der Exponenten des *Dividendus und Divisors* gleich ist.

Auch hier lassen sich ähnliche Fälle wie vorhin unterscheiden.

214. 1) Wenn die Exponenten des Dividendus und Divisors positive ganze Zahlen sind.

Es sey z. B. a^5 durch a^2 zu dividiren, so ist der Quotient $= a^{5-2} = a^3$.

Denn es ist $a^5 : a^2 = a^5 . a^{-2} = a^{5-2} = a^3$ (211).

Eben so ist $a^m : a^n = a^m . a^{-n} = a^{m-n}$ (211.), wodurch der Satz in seiner Allgemeinheit dargestellt wird.

Wenn $n > m$ ist, so wird a^{m-n} eine Potenz mit negativem Exponenten. Daß eine solche Potenz aber so viel als $\frac{1}{a^{n-m}}$ ist, läßt sich durch die bloße Regel der Division darthun. Dadurch bestätigt sich die obige Darstellung, nach welcher die Exponenten der Potenzen, die durch Division der Einheit entstehen, für negativ anzusehen sind (194).

215. 2) Wenn beyde Exponenten negative ganze Zahlen sind.

Dieser Fall läßt sich, wie der vorhergehende, auf die Multiplikation zweyer Potenzen mit positivem und negativem Exponenten zurückführen.

Denn es sey a^{-m} zu dividiren durch a^{-n}, so ist

$$a^{-m} : a^{-n} = a^{-m} : \frac{1}{a^n} = a^{-m} . a^n = a^{n-m} \text{ (211).}$$

Wenn $m = n$ ist, d. h. wenn der Divisor dem Dividendus gleich ist, so wird in beyden Fällen der Quotient $= a^0$. Da aber in diesem Fall der Quotient $= 1$ ist, so muß $a^0 = 1$ seyn.

Diese Bedeutung stimmt auch mit der gegebenen Erklärung von Potenz und Exponent überein. Denn *ein Exponent* 0 zeigt an, daß die Einheit mit der Wurzel multiplizirt noch dividirt werden dürfe. a^0 be-

deutet also eine Größe, die aus der Einheit entsteht, wenn diese mit a weder multiplizirt noch dividirt wird; folglich ist es die Einheit selbst.

Jede Zahl also, auf die Potenz Null erhoben, ist = 1.

216. 3) Wenn beyde Exponenten ganze Zahlen mit ungleichen Vorzeichen sind.

Hier ist zu unterscheiden, ob der Divisor oder der Dividendus den negativen Exponenten hat. Ist der Exponent des Divisors negativ, so wird der Exponent des Quotienten positiv.

Es sey z. B. a^3 zu dividiren durch a^{-2}, so ist der Quotient $a^{3-(-2)}$, d. i. $a^{3+2} = a^5$.

Denn es ist $a^3 : a^{-2} = a^3 : \frac{1}{a^2} = a^3 . \frac{a^2}{1} = a^5$.

Allgemein ist $a^m : a^{-n} = a^m : \frac{1}{a^n} = a^m . \frac{a^n}{1} = a^{m+n}$.

Ist aber der Exponent des Dividendus negativ, so wird der Exponent des Quotienten negativ.

Es sey z. B. a^{-3} zu dividiren durch a^2, so ist der Quotient $= a^{-5}$.

Denn es ist $a^{-3} : a^2 = \frac{1}{a^3} : a^2 = \frac{1}{a^3 . a^2} = \frac{1}{a^5} = a^{-5}$.

Und allgemein ist $a^{-m} : a^n = \frac{1}{a^m} : a^n = \frac{1}{a^{m+n}} = a^{-(m+n)}$.

217. 4) Wenn beyde Exponenten gebrochene Zahlen sind.

Es sey z. B. $64^{\frac{1}{2}}$ durch $64^{\frac{1}{3}}$ zu dividiren, so ist der

Quotient $= 64^{(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})} = 64^{\frac{1}{6}}$, d. i. $\sqrt[6]{64}$ oder 64 in sechs gleiche Factoren getheilt, und mit einem derselben die Einheit multiplizirt. Nun ist $64 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$; folglich ist $64^{\frac{1}{6}} = 1 \cdot 2 = 2$.

Zur Probe dividire man $64^{\frac{1}{2}}$, d. i. 8, durch $64^{\frac{1}{3}}$, d. i. 4, so ist der Quotient $= 2$.

Setzt man anstatt 64 die unbestimmte Zahl a, so muß ebenfalls $a^{\frac{1}{2}} : a^{\frac{1}{3}} = a^{(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})} = a^{\frac{1}{6}}$ seyn.

Denn nach der obigen Annahme ist $a^{\frac{1}{2}} = 1 \cdot q$; und $a^{\frac{1}{3}} = 1 \cdot p$. (212); folglich $a^{\frac{1}{2}} : a^{\frac{1}{3}} = \frac{q}{p}$.

Es ist aber auch $a = \frac{qqqqqq}{pppppp}$ (212.) $= \frac{q}{p} \cdot \frac{q}{p} \cdot \frac{q}{p} \cdot \frac{q}{p} \cdot \frac{q}{p} \cdot \frac{q}{p}$; folgl. $a^{\frac{1}{6}} = \frac{q}{p}$. Also ist $a^{\frac{1}{2}} : a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{6}}$.

218. III. Wenn eine Potenz, als Wurzel betrachtet, von neuem auf eine Potenz erhoben werden soll, so läßt sich diese auch als eine Potenz der ursprünglichen Wurzel darstellen, und man erhält den Exponenten derselben, wenn man den Exponenten der zur Wurzel angenommenen Potenz mit der Zahl, welche anzeigt, auf welche Potenz die Wurzel erhoben werden soll, multiplizirt. Z. B. es soll a^2 auf den Würfel erhoben werden, so läßt sich dieser als eine Potenz von a ausdrücken, und dann ist er $= a^{2 \cdot 3} = a^6$.

Denn es ist $(a^2)^3 = 1 \cdot a^2 \cdot a^2 \cdot a^2$, und dieses ist $= a^{2+2+2}$ (209.) $= a^{3 \cdot 2} = a^6$.

219. Um dieses allgemeiner darzustellen, setze man, es soll a^m auf den Würfel erhoben werden; dann ist $(a^m)^3 = 1 \cdot a^m \cdot a^m \cdot a^m = a^{m+m+m} = a^{3m}$. Folg-

lich ist der Exponent der gesuchten Potenz ein Produkt der beyden Exponenten m und 3.

Soll nun a^m auf die nte Potenz erhoben werden, so ist $(a^m)^n = 1 \cdot a^m \cdot a^m \cdot a^m \ldots$ wo die Anzahl dieser Factoren bis auf n fortgesetzt werden muß. Das Produkt derselben ist $= a^{nm}$; folglich ist $(a^m)^n = a^{nm}$.

220. Auf gleiche Art ist $(a^{-m})^n = a^{-nm}$. Denn es ist $(a^{-m})^n = \left(\frac{1}{a^m}\right)^n = \frac{1^n}{(a^m)^n} = \frac{1}{a^{nm}} = a^{-nm}$.

Und eben so ist $(a^m)^{-n} = a^{-nm}$. Denn es ist $(a^m)^{-n} = \frac{1}{(a^m)^n} = \frac{1}{a^{nm}} = a^{-nm}$.

221. Sind beyde Exponenten negativ, so wird ihr Produkt positiv; also: $(a^{-m})^{-n} = a^{nm}$. Denn es ist $(a^{-m})^{-n} = 1 : \left(\frac{1}{a^m}\right)^n = 1 : \frac{1}{a^{nm}} = 1 \cdot \frac{a^{nm}}{1} = a^{nm}$.

222. Besonders verdienen die Fälle betrachtet zu werden, in welchen einer von beyden Exponenten ein Bruch ist.

Es sey z. B. $a^{\frac{1}{2}}$ aufs Quadrat zu erheben, so ist dieses $= \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2 = a^1 = a$.

Denn es ist $a^{\frac{1}{2}}$ so viel als $\sqrt{a}$ (205.). Die Quadratwurzel von a ist aber eben diejenige Größe, welche, auf das Quadrat erhoben, wiederum a gibt. Da nun $\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2 = a$ wird, wenn man die beyden Exponenten multiplizirt, so ist dieses Verfahren auch in einem solchen Fall richtig.

Eben so ist $\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^3 = a^{\frac{1}{3} \cdot 3} = a^1 = a$; und überhaupt $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{\frac{1}{n} \cdot n} = a^1 = a$.

223. Ferner ist $\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^2 = a^{\frac{2}{3}}$, d. i. die Einheit

mit zwey Drittheilen der gleichen Factoren von a multiplizirt.

Denn wenn $a = ppp$ ist, so ist $a^{\frac{1}{3}} = p$; folglich $\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^2 = p^2 = pp$, welches eben zwey Drittheile der Factoren ppp sind.

Es ist aber $a^{\frac{2}{3}}$ eben so viel als $(a^2)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a^2}$.

Denn es ist $a^2 = pppppp$; und die Cubikwurzel aus a^2 ist die Einheit mit dem dritten Theil der Factoren multiplizirt, d. i. $1 \cdot pp$; folglich ist $(a^2)^{\frac{1}{3}} = pp = \left(a^{\frac{1}{3}}\right)^2$.

Man vergleiche dieß mit dem, was oben (205, 1.) über diesen Ausdruck gesagt ist.

224. Allgemein ist $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = a^{\frac{m}{n}}$, welches so viel ist, als a in n gleiche Factoren zerfällt, und mit einer Anzahl derselben = m die Einheit multiplizirt.

Es sey also $a = rrrr \ldots$, wo man n solcher Factoren annehmen muß, so ist $a^{\frac{1}{n}} = r$, und $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = r^m$.

Dasselbe erhält man, wenn man a^m auf die Potenz $\frac{1}{n}$ erhebt, oder die nte Wurzel aus a^m zieht, d. h. es ist $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = (a^m)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Denn wenn a aus n Factoren = r besteht, so besteht a^m aus mn solcher Factoren; und von diesen der nte Theil gibt m Factoren = r, d. i. r^m.

225. Jetzt läßt sich auch darthun, daß überhaupt $a^{\frac{1}{n}} \cdot a^{\frac{1}{m}} = a^{\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)} = a^{\frac{m+n}{mn}}$ sey.

Ist $a^{\frac{1}{n}} = \left(a^{\frac{1}{nm}}\right)^m$; und $a^{\frac{1}{m}} = \left(a^{\frac{1}{nm}}\right)^n$;

folglich ist $a^{\frac{1}{n}} \cdot a^{\frac{1}{m}} = \left(a^{\frac{1}{nm}}\right)^m \cdot \left(a^{\frac{1}{nm}}\right)^n = \left(a^{\frac{1}{nm}}\right)^{(m+n)}$
$= a^{\frac{m+n}{nm}}$.

Und wollte man auch statt der Exponenten $\frac{1}{n}$ und $\frac{1}{m}$ die noch allgemeinern $\frac{r}{n}$ und $\frac{s}{m}$ setzen, so läßt sich der Beweis, daß das Produkt $= a^{\frac{mr+ns}{nm}}$ ist, entweder auf diesen zurückführen, da $a^{\frac{r}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^r$ ist, oder auch auf eine ganz ähnliche Weise unmittelbar entwickeln.

226. Eben so kann nun gezeigt werden, daß $a^{\frac{1}{n}} : a^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{m-n}{nm}}$ ist.

Denn es ist $a^{\frac{1}{n}} : a^{\frac{1}{m}} = \left(a^{\frac{1}{nm}}\right)^m : \left(a^{\frac{1}{nm}}\right)^n =$
$\left(a^{\frac{1}{nm}}\right)^{(m-n)} = a^{\frac{m-n}{nm}}$.

227. IV. Wenn aus einer Potenz eine Wurzel gezogen werden soll, so kann diese ebenfalls als eine Potenz der Wurzel jener Potenz ausgedrückt werden; den Exponenten derselben erhält man, wenn man den Exponenten der gegebenen Potenz durch die Zahl, welche anzeigt, was für eine Wurzel aus ihr gezogen werden soll, dividirt.

Dieß folgt schon aus dem, was eben dargethan ist, daß die nte Wurzel aus $a^m = a^{\frac{m}{n}}$ ist (224.).

Es ist aber überhaupt die nte Wurzel einer Größe diejenige Zahl, welche, auf die nte Potenz erhoben, eben diese Größe gibt. Nun ist $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = a^{\frac{mn}{n}} = a^m$.

Folglich ist $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$.

228. Hiernach läßt sich auch leicht die Anwendu auf den Fall machen, wenn einer oder beyde Exponent negativ oder gebrochen sind.

Es ist z. B. $\sqrt[n]{a^{-m}} = a^{-\frac{m}{n}}$. Denn $\left(a^{-\frac{m}{n}}\right)^n = a^{\frac{-mn}{n}} = a^{-m}$.

Ingleichen ist $\sqrt[n]{a^{\frac{1}{m}}} = a^{\frac{1}{nm}}$. Denn $\left(a^{\frac{1}{nm}}\right)^n = a^{\frac{n}{nm}} = a^{\frac{1}{m}}$.

Rechnungen mit Potenzen von gleichen Exponenten.

229. I. Wenn Potenzen von gleichen Exponent zusammen multiplizirt werden sollen, so ist das Pr dukt eine Potenz von demselben Exponente die Wurzel derselben aber ein Produkt v den Wurzeln der Factoren.

Z. B. $3^2 \cdot 4^2$ ist $= 12^2 = 144$.

Zur Probe nehme man $3^2 \cdot 4^2 = 9 \cdot 16$, so das Produkt ebenfalls $= 144$.

Zum Beweise setze man statt 3 und 4 die unb stimmten Zahlen a und b, so ist $a^2 \cdot b^2 = aa \cdot bb = ab \cdot ab = (ab)^2$.

Allgemein also ist $a^m \cdot b^m = (ab)^m$. Denn d Potenz a^m enthält m Factoren $= a$, und die Pote b^m enthält eben so viel Factoren $= b$; beyde zusam men geben also m Paare von Factoren $= ab$; un multiplizirt man mit diesen die Einheit, so erhält ma $(ab)^m$.

230. Umgekehrt also läßt sich eine Zahl auf ein *Potenz erheben*, wenn man sie in ihre Factoren zerfäl *jeden derselben* auf die Potenz von dem nehmlichen Gr

de erhebt, und diese Potenzen zusammen multiplizirt. Es ist z. B. $15^2 = 3^2 \cdot 5^2 = 9 \cdot 25 = 225$.

231. Ferner ist $a^{-m} \cdot b^{-m} = (ab)^{-m}$. Denn es ist $a^{-m} \cdot b^{-m} = \frac{1}{a^m} \cdot \frac{1}{b^m} = \frac{1}{a^m \cdot b^m} = \frac{1}{(ab)^m} = (ab)^{-m}$.

232. Auf gleiche Art ist $a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = (ab)^{\frac{1}{n}}$.

Denn es sey $a^{\frac{1}{n}} = p$; $b^{\frac{1}{n}} = q$, so ist $a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = pq$.

Es ist aber alsdann $a = p^n$; und $b = q^n$; folglich $ab = p^n \cdot q^n = (pq)^n$; folglich $pq = \sqrt[n]{(ab)} = (ab)^{\frac{1}{n}}$. Da nun auch $pq = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}}$ ist, so ist $a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = (ab)^{\frac{1}{n}}$.

233. Man kann also auch die Wurzel aus einer Zahl ziehen, wenn man die Wurzeln von demselben Grade aus den Factoren der Zahl zieht, und sie zusammen multiplizirt.

Z. B. $\sqrt{144}$ ist $= \sqrt{9} \cdot \sqrt{16} = 3 \cdot 4 = 12$.

234. II. Wenn Potenzen von gleichen Exponenten, eine durch die andere, dividirt werden sollen, so wird der Quotient eine Potenz von demselben Grade, die Wurzel derselben aber der Quotient aus den Wurzeln des Dividendus und Divisors.

Z. B. $15^2 : 5^2$ ist $= (15 : 5)^2 = 3^2 = 9$.

Probe: $15^2 = 225$; $5^2 = 25$; $225 : 25 = 9$.

Beweis: $15^2 : 5^2$ ist $= \frac{3^2 \cdot 5^2}{5^2} = 3^2 = 9$.

Es sey $(ab)^m$ zu dividiren durch b^m, so ist der Quotient $= \left(\frac{ab}{b}\right)^m = a^m$.

Denn es ist $(ab)b^m : b^m = \frac{a^m \cdot b^m}{b^m} = a^m$

Eben so ist $(ab)^{-m} : b^{-m} = \frac{a^{-m} \cdot b^{-m}}{b^{-m}} = a$

Ingleichen $(ab)^{\frac{1}{n}} : b^{\frac{1}{n}} = \frac{a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = a^{\frac{1}{n}}$.

---

235. Wenn sowohl die Wurzeln, als die Expo ten der Potenzen verschieden sind, so läßt sich beym M tipliziren oder Dividiren derselben das Produkt oder Quotient weder als eine Potenz dieser Wurzeln, derselben Exponenten auf eine allgemeine Art ausdrü sondern man muß die Potenzen selbst beybehalten. Z a^2 mit b^3 multiplizirt ist $= a^2b^3$ und a^2 durch b^3 vidirt ist $= \frac{a^2}{b^3}$.

Anstatt a^2b^3 könnte man auch setzen $a^2b^2b = (ab)$ und eben so ist $\frac{a^2}{b^3} = \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{1}{b} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \cdot \frac{1}{b}$.

Achter Abschnitt.

Vom dekadischen Zahlensystem.

---

236. Eigentlich findet zwischen den verschiede Zahlen keine Verbindung statt, indem eine jede derse eine gewisse Menge ausdrückt, von denen keine von andern abhängig ist. Es würde aber eine große Verw rung für uns entstehen, wenn wir sie uns, bey ihrer endlichen Anzahl, in dieser Unabhängigkeit von einan *vorstellen* sollten. Es ist daher das Werk unsers V *standes*, in diesen an sich unordentlichen Haufen eine

wisse Ordnung zu bringen, und dieß geschieht dadurch, daß er uns die Zahlen als aus einander entstanden darstellt, und so eine an die andere knüpft. Auf diese Art wird ein Zahlensystem möglich.

237. Die Art und Weise, wie man sich eine Zahl aus der andern als entstanden vorstellen kann, ist unendlich verschieden. Alle bekannten Sprachen aber der cultivirten Völker alter und neuer Zeit beobachten in der Bildung und Zusammensetzung der Zahlen einerley Gang. Sie haben nehmlich nur für die Zahlen von Eins bis Zehne eigenthümliche, von einander ganz verschiedene Ausdrücke; und die Ausdrücke für die übrigen Zahlen werden nach einer bestimmten Regel aus diesen zusammengesetzt oder von ihnen abgeleitet — wobey im Ganzen nur wenige Ausnahmen statt finden.

238. Das Gesetz, nach welchem auf diese Art die Zahlen gebildet werden, läßt sich dadurch darstellen, daß man die Zahl 10 auf eine Reihe von Potenzen erhebt, deren Exponenten von Null anfangen und nach der Ordnung der natürlichen Zahlen fortgehen — also auf folgende Art:

$$10^0\ 10^1\ 10^2\ 10^3\ 10^4\ 10^5\ 10^6 \ldots\ldots$$

239. Diese Potenzen machen die Grundlage aller Zahlen aus, indem eine jede Zahl entweder selbst eine dieser Potenzen, oder ein Produkt derselben, oder eine Zusammensetzung solcher Produkte ist.

240. Allein um diese Produkte hervorzubringen, ist es nöthig, diejenigen Zahlen, die hinwiederum als Produkte der Potenz 10^0 angesehen werden können, besonders zu bestimmen; dieß sind die sogenannten Einer oder die Zahlen von Eins bis zur nächsten unter Zehn. Diese machen bey jenen Produkten den zweyten Factor aus: jede Zahl ist ein Produkt eines Einers mit einer *Potenz der Zahl 10*, oder kann in solche zerlegt werden.

z. B. 80 ist $= 8 . 10^1 = 8 . 10$; $7000 = 7 . 10^3 = 7 . 1000$; 436 ist $= 4 . 10^2 + 3 . 10^1 + 6 . 10^0 = 4 . 100 + 3 . 10 + 6 . 1 = 400 + 30 + 6$.

241. Da nach dieser Darstellung alle Zahlen von demselben Gesetz abhängig gemacht werden, so können sie zusammen als ein System betrachtet werden; und da es die Zahl 10 ist, auf deren Potenzen sich dieses gründet, so wird es das dekadische Zahlensystem genannt. Man darf aber ja nicht glauben, als ob dieses das einzig mögliche Zahlensystem wäre; vielmehr ist leicht einzusehen, daß man auf jede andere ganze Zahl, die Einheit ausgenommen, ein ähnliches System gründen könne, und daß folglich unzählige solche Systeme möglich sind.

1. Es mag seyn, daß manche andere Zahl, als Grundzahl eines solchen Systems genommen, in theoretischer Hinsicht, noch Vorzüge vor der Zahl 10 habe, deßwegen aber kann man nicht im Ernst ein anderes Zahlensystem in unsre Sprache einführen wollen, da so etwas ohne einen gänzlichen Umsturz unsers Sprachgebäudes nicht möglich wäre.

2. In einem jeden Zahlensystem machen diejenigen Zahlen die Einer aus, welche man als Produkte der Zahlen der natürlichen Zahlenreihe mit der 0ten Potenz der Grundzahl des Systems ansehen kann. Sie gehen von 1 bis zu der nächsten vor der Grundzahl.

3. Da alle Potenzen von 1 wiederum 1 sind, so kann die Einheit nicht die Grundzahl eines Zahlensystems werden.

242. Dem dekadischen Zahlensystem gemäß sind auch unsre Ziffern eingerichtet. So wie nehmlich das System die Zahlen durch Produkte der Einer mit den verschiedenen Potenzen der Zahl 10 ausdrückt, so sind die Ziffern als Zeichen der Einer bestimmt, so viel verschiedene Werthe anzunehmen, als es nach der obigen Reihe verschiedene Potenzen der Zahl 10 gibt. Die Verschiedenheit der Werthe wird durch die verschiedenen Stellen angedeutet, die sie gegen einander bekommen. In der niedrigsten Stelle muß man die Zahl, die

der Name der Ziffer anzeigt, in das erste Glied der obigen Reihe der Potenzen von 10, d. i. in 10^0 multiplizieren, in der zweyten Stelle in das zweyte Glied jener Reihe, d. i. in 10^1, in der dritten Stelle in das dritte Glied, d. i. 10^2, folglich in der nten Stelle in das nte Glied, d. i. 10^{n-1}. Es ist also hierbey nöthig, ein Zeichen zu haben, das zwar selbst keinen Werth hat, aber dazu dienen kann, in manchen Fällen den Zeichen der Einer ihre gehörige Stelle zu bestimmen; und das ist das Zeichen der Null.

1. Ziffern sind für irgend ein Zahlensystem eingerichtet, wenn sie die Zahlen in derselben Zusammensetzung darstellen, welche ihnen nach dem Systeme zukommt. Dieß ist mit unsern Ziffern in Absicht auf das dekadische Zahlensystem der Fall: Z. B. die Zahl 478 ist in diesem Systeme aus vierhundert, siebenzig und acht zusammengesetzt, und eben diese Zusammensetzung deuten die Ziffern an. Dieselbe Zahl, mit römischen Ziffern geschrieben, bekommt eine ganz andere Zusammensetzung: CCCCLXXVIII.

2. Um Ziffern einem Zahlensystem gemäß einzurichten, muß man so viel verschiedene Zeichen haben, als das System Einer enthält (241, 2.), und die Werthe derselben in den verschiedenen Stellen nach den Potenzen der Grundzahl des Systems abändern. Es bedarf daher noch eines Zeichens, das an sich keinen Werth hat — der Null — von welcher Art sich unter den Ziffern der Griechen und Römer keines findet.

3. Leibnitz hat gezeigt, wie sich auf die Potenzen der Zahl 2 ein dyadisches Zahlensystem gründen lasse, wozu man nur zwey Ziffern (1 und 0) nöthig hat. Nach diesem ist

1 = 1
2 = 10
3 = 11
4 = 100
5 = 101
6 = 110
7 = 111
8 = 1000
etc. etc.

Hiernach läßt sich leicht beurtheilen, wie die Zahlen nach einem System der Zahl 3, 4, 5 u. s. w. mit drey, vier, fünf u. s. w. Ziffern geschrieben werden können.

243. Wenn man die Reihe der Potenzen der Zahl 10, auf welche sich das dekadische Zahlensystem gründet, rückwärts betrachtet, so nehmen die Exponenten der Reihe nach immer um 1 ab. Denkt man sich alsdann diese Reihe auf eben die Art noch unter Null hin fortgesetzt, so erhält man Potenzen mit negativen Exponenten, nehmlich:

$\ldots . 10^{-6}\ 10^{-5}\ 10^{-4}\ 10^{-3}\ 10^{-2}\ 10^{-1}\ 10^{-0}$.

Da nun die Potenzen mit negativen Exponenten Brüche sind, deren Zähler 1 ist, und deren Nenner die Potenzen mit entgegengesetzten Exponenten ausmachen (197.): so geben die Produkte der Einer mit diesen Potenzen von 10 ebenfalls Brüche, deren Zähler der Einer, mit welchem man multiplizirt hat, und deren Nenner eine Potenz von 10 ist. Das sind aber keine andern als Decimalbrüche.

Z. B. $5 . 10^{-1}$ ist $= 5 . \frac{1}{10} = \frac{5}{10}$; $8 . 10^{-2} = 8 . \frac{1}{10^2} = 8 . \frac{1}{100} = \frac{8}{100}$

244. Die Decimalbrüche gehören also auch in die Reihe des dekadischen Zahlensystems, und können daher auf eben die Art wie die ganzen Zahlen behandelt werden. So wie der Werth der Ziffern, welche die ganzen Zahlen ausdrücken, sich durch ihre Stellen gegen einander unterscheidet, so auch der Werth derjenigen, welche die Decimalbrüche bezeichnen. In der nächsten Stelle nach den Einern stehen die Zehntel, in der zweyten die Hundertel u. s. w. Es ist daher bey einer Reihe von Ziffern, welche ganze Zahlen und Decimalbrüche ausdrücken, nur nöthig, die Stelle bemerklich zu machen, in welcher die ganzen Zahlen aufhören und die Decimalbrü-

che anfangen, und dieß geschieht durch ein dazwischen gesetztes Comma oder Punctum. Ein Nenner braucht weiter nicht dazu gesetzt zu werden.

1. Z. B. 54,3872 heißt 54 und $\frac{3}{10}\ \frac{8}{100}\ \frac{7}{1000}\ \frac{2}{10000}$ oder $\frac{3872}{10000}$.

2. Wenn keine ganze Zahl vorhanden ist, wird in die Stelle derselben eine Null gesetzt. Z. B. 0,37 heißt $\frac{37}{100}$.

3. Durch Nullen, welche einem Decimalbruch angehängt werden, wird die Größe desselben nicht geändert; wohl aber durch diejenigen, welche ihm vorgesetzt werden. Es ist z. B. 5,12 = 5,1200, nehmlich = 5 $\frac{12}{100}$ oder $\frac{1200}{10000}$; dagegen ist 5,012 = 5 $\frac{12}{1000}$; 5,0012 = 5 $\frac{12}{10000}$.

245. Auch in den Rechnungen lassen sich die Decimalbrüche auf ähnliche Art, wie die ganzen Zahlen behandeln. In der Addition und Subtraction müssen Zehntel unter Zehntel, Hundertel unter Hundertel u. s. w. gesetzt werden, und dann wird die Rechnung wie bey ganzen Zahlen gemacht, indem man bey den niedrigsten Zahlen anfängt, die unter einander stehenden, als wären es lauter Einer, zusammenaddirt oder von einander subtrahirt u. s. w. Die Stelle, in welche das Comma, wodurch der Anfang des Decimalbruchs bezeichnet wird, in der Summe oder Differenz gesetzt werden muß, ist aus der Stellung der Zahlen, mit welchen die Rechnung geschieht, leicht zu bestimmen.

Z. B.

Addition:	8, 3 7	0, 6 2 4
	5 4, 0 9 2	0, 2 5 3
	6 1, 4 9 8	0, 4 1 6
	0, 5	1, 2 9 3
	7, 3 1 6 4	
	1 3 1, 7 7 6 4	
Subtraction:	7., 1 3 8. 4	0, 9 3 1. 0. 0. 0
	3, 5 1 2 9	0, 4 1 0 6 8 2
	3, 6 2 5 5	0, 5 2 0 3 1 8

Wenn in der Subtraction die Decimalbrüche nicht gleich viel Ziffern enthalten, so kann man die Anzahl derselben

durch angehängte Nullen einander gleich machen, wie hier in dem einen Beyspiel geschehen ist. Dasselbe Mittel könnte man auch in der Addition gebrauchen, indessen ist es hier von keinem sonderlichen Werth.

246. Bey der Multiplikation kommt auf die Stellung des Multiplikators gegen den Multiplikandus nichts an. Man kann ihn daher so ordnen, daß, wie bey der gewöhnlichen Multiplikation, seine letzte Ziffer unter die letzte des Multiplikandus zu stehen kommt. Alsdann verfährt man wie bey ganzen Zahlen, indem man jede einzelne Zahl als Einer betrachtet und als solche multiplizirt; in dem Produkt aber muß man so viel Zahlen auf den Decimalbruch rechnen, als die Anzahl der Decimalen in den Factoren zusammengenommen beträgt.

Z. B.

15,9804
0,76

958824
1118628

12,145104

Der Beweis davon gründet sich auf das Verfahren bey der Multiplikation gemeiner Brüche: nehmlich: daß man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliziren muß. Denn es ist

$$15{,}9804 \times 0{,}76 = \frac{159804}{10000} \times \frac{76}{100} = \frac{12145104}{1000000} = 12{,}145104.$$

Einen andern allgemeinen Beweis s. unten §. 259.

247. Die Division endlich wird ebenfalls so wie die Division ganzer Zahlen ausgeführt; von dem Quotienten aber sind so viel Zahlen auf den Decimalbruch zu rechnen, als der Unterschied in der Anzahl der Decimalen des Dividendus und des Divisors beträgt.

Z. B.

$$9{,}13115 : 0{,}35 = 26{,}089..$$

Denn es ist $9{,}13115 : 0{,}35 = \frac{913115}{100000} : \frac{35}{100} = \frac{913115}{100000} \cdot \frac{100}{35} = \frac{913115}{35} \cdot \frac{100}{100000} = 26089 \cdot \frac{1}{1000} = \frac{26089}{1000} = 26{,}089.$

1. Hat der Divisor eben so viel Decimalen, als der Dividendus, so erhält der Quotient gar keine; und hat der Dividendus deren weniger als der Divisor, so kann man ihm so viel Nullen anhängen, als nöthig ist, um die Anzahl seiner Decimalen der des Divisors gleich zu machen.

2. Wenn man Decimalbrüche von gleich vielen Ziffern in einander zu dividiren hat, so ist ihr Quotient dem Quotienten ganzer Zahlen mit denselben Ziffern in derselben Ordnung gleich. Z. B. $0{,}425 : 0{,}025 = 425 : 25 = 17.$

3. Bleibt bey der Division ein Rest, so gibt er, durch den Divisor dividirt, einen unreinen Bruch, der sich nach §. 91. auf einen reinen zurückbringen läßt. Man kann aber auch dem Rest eine oder mehrere Nullen anhängen, und die Division weiter fortsetzen, so erhält man den Werth des unreinen Bruchs in Decimaltheilen ausgedrückt.

4. Den allgemeinen Beweis für das Verfahren in den verschiedenen Fällen der Division der Decimalbrüche s. unten §. 261. f.

248. So wie der Bruch, welchen der Rest einer Division gibt, in Decimalzahlen ausgedrückt werden kann, so lassen sich überhaupt gemeine Brüche in Decimalbrüche verwandeln. Zu diesem Ende hängt man dem Zähler eine oder mehrere Nullen, die man als Decimalen betrachtet, an, und dividirt ihn durch den Nenner; oder man multiplizirt den Zähler und Nenner mit einerley Potenz von 10, und dividirt beyde darauf durch den ursprünglichen Nenner.

Z. B. $\frac{5}{8}$ ist $= \frac{5{,}000}{8} = 0{,}625.$

oder $\frac{5}{8} = \frac{5000}{8000} = \frac{5000 : 8}{8000 : 8} = \frac{625}{1000} = 0{,}625.$

Man kann sich auch vorstellen, $\frac{5}{8}$ werde mit 1000 multiplizirt, d. i. $\frac{5}{8} \cdot 1000 = \frac{5000}{8} = 625$; alsdann ist $\frac{5}{8} = 625 : 1000 = 0{,}625.$

249. *Ist der Nenner* eines Bruches so beschaffen,

daß er in einer Potenz von 10 nicht aufgeht, so kommt man mit der Division, wodurch der Bruch in einen Decimalbruch verwandelt werden soll, eigentlich nie zu Ende, sondern sie kann ins Unendliche fortgesetzt werden. Ein solcher Bruch kann also nicht genau in einen Decimalbruch verwandelt werden; man kann aber seinem Werthe so nahe kommen, als man will, und bezeichnet zuletzt durch einige Punkte, daß die Gleichheit nicht vollkommen ist.

Z. B. $\frac{5}{12} = 0{,}4166\ldots$

Nur solche Brüche lassen sich genau in Decimalbrüche verwandeln, deren Nenner, in ihre kleinsten Factoren zerlegt, keine andern Factoren, als 2 und 5 enthalten — nachdem jedoch die Brüche selbst auf ihre kleinsten Zahlen gebracht, d. i. so eingerichtet sind, daß sie sich nicht weiter heben lassen.

250. Bey solchen Brüchen, welche nicht genau in Decimalbrüche verwandelt werden können, geschieht es wohl, daß, wenn man die Division weit genug fortsetzt, die Zahlen des Decimalbruchs in einer bestimmten Folge immer wiederkehren, oder vielmehr die Ziffern, mit welchen sie geschrieben werden, dieselben sind, wenn gleich von einem andern Werthe. Solche Wiederholungen derselben Zahlen nennt man Perioden. Sie entstehen, wenn einer von den Resten, welche bey der Division übrig bleiben, mit einem der frühern Reste, in Ansehung der Ziffern und ihrer Ordnung, übereinstimmt. Alle rationalen Brüche müssen daher auf solche Perioden führen, da die Anzahl der verschiedenen Reste nicht größer als der Divisor selbst seyn kann.

Rationale Brüche heißen solche, welche auf ihren einfachsten Ausdruck gebracht, keine Irrationalzahl (s. ten 283.) enthalten.

Die Perioden der Decimalbrüche können aus einer mehrern Ziffern bestehen, und entweder gleich in der

ersten, oder in einer spätern Stelle des Decimalbruchs anfangen.

Z. B. $\frac{2}{3}$ ist = 0,666 . . .
$\frac{7}{11}$ — = 0,6363 . . .
$\frac{9}{13}$ — = 0,69230769 . . .
$\frac{11}{25}$ — = 0,431818 . . .

251. Kommt es darauf an, einen Decimalbruch in einen gemeinen Bruch zu verwandeln, so ist zu unterscheiden, ob er vollständig ist, oder nicht. Im erstern Fall geschieht die Reduction durch das gewöhnliche Heben, welches jederzeit da angewandt werden kann, wo der Decimalbruch aus einem gemeinen Bruch entstanden ist. Ist er dieses aber nicht, so kann es seyn, daß er sich nicht heben läßt, und dann kann er auch auf keinen gemeinen Bruch zurückgeführt werden, der ihm genau gleich wäre; sondern man muß sich mit einem Bruch, welcher ihm nahe kommt, begnügen. Dergleichen lassen sich durch kleine Veränderungen, oder durch Probiren, am besten aber durch Hülfe eines Kettenbuchs (97.) finden.

Z. B.

1) 0,625 ist = $\frac{625}{1000}$ und dieß mit 125 gehoben, gibt $\frac{5}{8}$.

2) Der Bruch 0,76483 läßt sich nicht heben; er ist aber etwas mehr als $\frac{76}{100}$ oder $\frac{19}{25}$; nimmt man also $\frac{13}{17}$ und hebt dieß durch 3, so erhält man $\frac{4}{17}$, welches, in einen Decimalbruch verwandelt, 0,76470 . . . gibt, von obigem nicht sehr verschieden.

In einen Kettenbruch verwandelt, erhält man

$$\frac{76483}{100000} = \frac{1}{1+\frac{1}{3+\frac{1}{3+\frac{1}{1+\frac{1}{27+\frac{1}{8+\frac{1}{1+\frac{1}{3+\frac{1}{1+\frac{1}{4}}}}}}}}}}$$

und hieraus ergeben sich die genäherten Brüche $\frac{1}{1}$, $\frac{4}{1}$, $\frac{15}{1}$, $\frac{19}{1}$, $\frac{3391}{478}$ u. s. w.

252. Auf gleiche Art, wie in dem zuletzt angeführten Fall, verfährt man, wenn der Decimalbruch nicht vollständig ist und keine Perioden enthält. Alsdann bestimmt der Grad der Genauigkeit, welchen man bey der Reduction beabsichtigt, die Anzahl der Decimalzahlen, die man bey der Verwandlung in einen Kettenbruch in Betrachtung zieht.

Soll z. B. die bekannte Ludolphische Zahl (s. Geom. 182.) durch genäherte rationale Brüche dargestellt werden, und man nimmt 3,141592, so erhält man

$$\frac{3141592}{1000000} = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{8\,4 + \ldots}}}}$$

und hieraus $\frac{3}{1}$, $\frac{22}{7}$, $\frac{333}{106}$, $\frac{355}{113}$, $\frac{3011533}{958958}$.

253. Wenn aber der unvollständige Decimalbruch Perioden enthält, so läßt sich der gemeine Bruch, aus welchem er entstanden ist, jederzeit genau finden. Fängt nehmlich die Periode gleich in der ersten Decimalstelle an, so nehme man die Zahlen einer vollständigen Periode zum Zähler, und eine gleich große Anzahl von Neunen zum Nenner, und hebe diesen Bruch auf die gewöhnliche Weise.

Z. B. Von den obigen Brüchen (250.) gibt

0,66 . . . den Bruch $\frac{6}{9}$, und durch 3 gehoben $\frac{2}{3}$.

0,6363 . . — $\frac{63}{99}$ durch 9 gehoben $\frac{7}{11}$.

0,6923076 . . . — $\frac{6923076}{9999999}$ durch 76923 gehoben, $\frac{9}{13}$.

Der Grund dieses Verfahrens läßt sich auf folgende Art darthun:

Wenn $\frac{2}{3} = 0{,}666 \ldots$ ist, so ist $10 \cdot \frac{2}{3} = 6{,}666 \ldots$ Jenes von diesem abgezogen, gibt $9 \cdot \frac{2}{3} = 6{,}000 \ldots$; folglich $\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$.

$\frac{7}{11} = 0{,}6363 \ldots$, also $100 \cdot \frac{7}{11} = 63{,}6363 \ldots$, folglich $(100-1)\,\frac{7}{11} = 99 \cdot \frac{7}{11} = 63{,}0000 \ldots$ u. $\frac{7}{11} = \frac{63}{99}$.

Hiernach läßt sich auch das Verfahren bey Perioden, die aus mehr als zwey Ziffern bestehen, und überhaupt das Allgemeine dieses Verfahrens erkennen.

254. Fangen die Zahlen einer Periode nicht in der ersten Stelle der Decimalen an, sondern gehen ihnen noch eine oder mehrere Nullen voraus, so muß man den Neunen, durch welche die Zahlen einer Periode zu dividiren sind, noch so viele Nullen anhängen, als der Periode im Decimalbruch vorangehen.

Z. B.

0,008181 . . . ist $= \frac{81}{9900} = \frac{9}{1100}$.

Beweis: Es sey der gemeine Bruch $x = 0{,}008181\ldots$

so ist $10000\,x = 81{,}8181\ldots$

und $100\,x = 0{,}8181\ldots$

abgezogen $9900\,x = 81$

folglich $x = \frac{81}{9900}$.

Gehören die Nullen zur Periode, so werden sie den Neunen nicht angehängt.

255. Wenn statt der Nullen andere Zahlen der Periode vorangehen, so muß man zu dem Bruch, welcher durch die Division einer Periode mit der erforderlichen Anzahl von Neunen und so vielen Nullen, als der Periode Zahlen vorangehen, entsteht, noch den Decimalbruch hinzuaddiren, welchen die Zahlen vor der Periode ausmachen.

Z. B. Es sey der Decimalbruch 0,431818 . . . zu reduziren, so ist der gemeine Bruch $= \frac{18}{9900} + \frac{43}{100} = \frac{2}{1100} + \frac{473}{11000} = \frac{475}{11000} = \frac{19}{44}$.

Der Beweis ergibt sich aus dem Vorhergehenden, wenn man setzt 0,431818 . . . = 0,001818 . . . + 0,43.

In manchen Fällen läßt sich ein Bruch, dessen Periode nicht in der ersten Stelle anfängt, durch Addiren oder Subtrahiren eines Decimalbruchs so abändern, daß der Anfang der Periode auf die erste Stelle trifft. Alsdann muß man, um den gemeinen Bruch zu erhalten, von dem Bruch, welchen die Zahlen einer Periode, durch Neunen (ohne angehängte Nullen) dividirt, geben, einen gleichen Bruch abziehen oder zu ihm hinzuaddiren, als man vorher addirt

oder subtrahirt hat. Z. B. 0,431818 . . ist = 0,1818 . . . + 0,25 = $\frac{18}{99}$ + $\frac{25}{100}$ = $\frac{2}{11}$ + $\frac{1}{4}$ = $\frac{11}{44}$.

---

256. Auf die verschiedenen Grade der Potenzen der Zahl 10, mit welchen die Einer multiplizirt gedacht werden müssen, um ihren wahren Werth zu erhalten, gründet sich die Eintheilung der Zahlen in verschiedene Ordnungen. Eine Zahl ist nehmlich von derselben Ordnung, von welchem Grade die Potenz der Zahl 10 ist, mit welcher man den Einer multipliziren muß, der die Zahl bezeichnet. Die Einer hat man sich als Produkte aus 10^0 zu denken, und sie sind daher selbst als Zahlen von der Ordnung Null zu betrachten. Die Zehner sind Produkte aus 10^1, und daher Zahlen von der 1sten Ordnung; die Hunderter, als Produkte aus 10^2, sind Zahlen von der 2ten Ordnung; u. s. w. — Die Ordnungen der Decimalbrüche sind negativ, da die Potenzen der Zahl 10, von welchen sie die Produkte sind, negative Exponenten haben.

257. Diejenige Zahl, durch welche man anzeigt, von welcher Ordnung irgend eine Zahl sey, heißt der Exponent der Ordnung. Man pflegt ihn über diejenige Zahl zu setzen, deren Ordnung dadurch bezeichnet werden soll. Z. B. $\overset{3}{7}$ heißt 7 von der dritten Ordnung, d. i. $7 . 10^3 = 7000$; $\overset{-2}{4}$ heißt 4 von der —2ten Ordnung, d. i. $4 . 10^{-2} = 4 . \frac{1}{10^2} = \frac{4}{100}$.

1. Ist der Ordnungsexponent positiv, so darf man der Zahl, über welcher er steht, nur so viele Nullen anhängen, als er Einheiten hat, um sie auf die gewöhnliche Art geschrieben zu bekommen; und ist er negativ, so erhält die Zahl zum Nenner eine 1 mit so vielen Nullen, als er Einheiten hat.

2. Große Zahlen, die viele Nullen am Ende haben, können mit Hülfe der Ordnungsexponenten sehr bequem geschrieben werden.

3. Wenn eine Zahl mit mehrern Ziffern geschrieben und die unterste derselben mit einem Ordnungsexponenten bezeichnet ist, so sind die folgenden der Reihe nach von einer immer höhern Ordnung.

258. Von den Ordnungsexponenten läßt sich auch in manchen Rechnungen ein bequemer Gebrauch machen. Sollen nehmlich ein Paar Zahlen, die mit ihren Ordnungsexponenten bezeichnet sind, zusammen multiplizirt werden, so braucht man nur die Zahlen an sich zu multipliziren, und über die unterste Zahl des Produkts einen Ordnungsexponenten zu setzen, welcher der Summe der Exponenten der Factoren gleich ist.

Z. B. $\overset{3}{7} \cdot \overset{2}{4}$ ist $= \overset{5}{28}$.

Denn es ist $\overset{3}{7} = 7 \cdot 10^3$; und $\overset{2}{4} = 4 \cdot 10^2$; folglich $\overset{5}{7} \cdot \overset{2}{4} = 7 \cdot 10^3 \cdot 4 \cdot 10^2 = 7 \cdot 4 \cdot 10^3 \cdot 10^2 = 28 \cdot 10^5 = \overset{5}{28}$ (209.).

259. Dasselbe gilt auch, wenn die Ordnungsexponenten negativ sind.

Z. B. $\overset{-2}{3} \cdot \overset{-4}{5}$ ist $= \overset{-6}{15}$. Denn $\overset{-2}{3} \cdot \overset{-4}{5}$ ist $= 3 \cdot 10^{-2} \cdot 5 \cdot 10^{-4} = 3 \cdot 5 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-4} = 15 \cdot 10^{-6} = \overset{-6}{15}$ (210.).

Hierin ist der allgemeine Beweis für das oben angegebene Verfahren bey der Multiplikation der Decimalbrüche enthalten (246.).

260. Wenn dagegen eine Zahl durch eine andere dividirt werden soll, und beyde mit Ordnungsexponenten bezeichnet sind, so muß man den Exponenten des Divisors von dem des Dividendus abziehen, und die Differenz zum Ordnungsexponenten der niedrigsten Zahl des Quotienten machen.

z. B. $324^{\frac{5}{2}} : 9^{\frac{2}{3}}$ ist $= 36^{\frac{3}{3}}$. Denn es ist $324^{\frac{5}{2}} : 9^{\frac{2}{3}}$ $= 324 \cdot 10^5 : 9 \cdot 10^2 = \frac{324}{9} \cdot \frac{10^5}{10^2} = 36 \cdot 10^3$ $= 36^{\frac{3}{3}}$ (214.)

261. Eben so ist es, wenn die Exponenten negativ sind; und der Grund davon ist in der Division der Potenzen von einerley Wurzeln mit negativen Exponenten zu suchen (215.) z. B. $516^{\frac{-4}{2}} : 12^{\frac{-1}{3}}$ ist $= 43^{\frac{-3}{3}}$.

Dieß enthält zugleich den Beweis für das obige Verfahren bey der Division der Decimalbrüche (247.).

262. Hiernach ist leicht zu beurtheilen, wie man bey ungleichen Zeichen der Exponenten zu verfahren habe. (Vergl. oben 216.). Aendert man aber die Größe und die Vorzeichen der Exponenten verschiedentlich ab, und verfährt beym Subtrahiren derselben genau nach der Regel der Subtraction entgegengesetzter Größen: so lassen sich alle Fälle der Division der Decimalbrüche daraus entwickeln, und beweisen.

Neunter Abschnitt.

Von der Ausziehung der Wurzeln.

263. Es ist schon oben bemerkt worden, daß die Ausziehung der Wurzeln ein eignes Verfahren erfordere. Dieses ist aber wiederum nach dem Grade der Potenz, aus welcher die Wurzel gezogen werden soll, verschieden: anders verfährt man bey Ausziehung einer Quadratwurzel, anders bey Ausziehung einer Cubikwurzel, anders bey Ausziehung einer Biquadratwurzel, u. s. f.

264. Es ist daher nicht möglich, das Verfahren, das zur Ausziehung einer jeden Art von Wurzel erforderlich ist, hier besonders darzustellen; sondern man muß sich darauf einschränken, es nur von einigen zu thun, und an dem Beyspiele derselben den Weg zu zeigen, auf welchem es auch für jede andere Art gefunden werden könne. Und da die Quadrat- und Cubikwurzeln in dieser Rücksicht nicht nur am leichtesten zu behandeln sind, sondern auch fast allein unter den Wurzeln in Rechnungen der Elementar-Mathematik vorkommen, so ist es hinreichend, bey der Erklärung der Ausziehung dieser Wurzeln stehen zu bleiben.

265. Bey der Ausziehung einer Wurzel kommt es darauf an, die Potenz in gewisse Produkte zu zerlegen, aus denen sie als zusammengesetzt angesehen werden kann. Die Anzahl und die Beschaffenheit dieser Produkte aber ist nicht nur bey den verschiedenen Arten der Potenzen verschieden, sondern sie kann es auch bey derselben Art seyn, wenn die Wurzel aus mehr oder weniger Theilen zusammengesetzt ist. Ja dieselbe Potenz läßt sich in dieser Rücksicht auf verschiedene Weise zusammengesetzt betrachten, je nachdem ihre Wurzel auf verschiedene Art zusammengesetzt wird.

266. Um also die Anzahl und Beschaffenheit der Produkte, aus denen ein Quadrat zusammengesetzt ist, zu finden, drücke man die Wurzel desselben auf eine allgemeine Art durch Buchstaben aus, und erhebe sie auf das Quadrat.

267. Es sey die Wurzel $= a$, so ist das Quadrat $= a^2$. Dieses besteht nur aus einem einzigen Produkte. Ist also die Wurzel nicht zusammengesetzt, oder werden ihre Theile nicht besonders ausgedrückt, so lassen sich auch in dem Quadrate keine verschiedenen Produkte *unterscheiden*. *In diesem* Fall können wir auch die Wur-

zel nicht finden, sondern müssen sie als bekannt oder als gegeben voraussetzen.

In unserm Zahlensystem können wir die Einer als solche nicht zusammengesetzte oder einfache Wurzeln ansehen, und setzen daher die Quadrate derselben, die schon im Einmaleins enthalten sind, als bekannt voraus.

268. Besteht eine Wurzel aus zwey Theilen, so kann sie durch $a + b$ ausgedrückt werden, und dann ist das Quadrat derselben $= (a + b) \cdot (a + b) = a^2 + 2ab + b^2$.

Hier unterscheiden wir drey verschiedene Produkte, die in allen Quadraten einer zweytheiligen Wurzel enthalten seyn müssen, nehmlich: 1) das Quadrat des ersten Theils $= a^2$; 2) das doppelte Produkt des ersten Theils mit dem zweyten $= 2ab$; 3) das Quadrat des zweyten Theils $= b^2$.

Man mag eine Wurzel in 2 Theile zertheilen, in welche man will, so muß das Quadrat derselben immer aus den angegebenen drey Produkten bestehen.

Z. B. 5 ist $= 3 + 2$; und daher $5^2 = 3^2 + 2 \cdot 2 \cdot 3 + 2^2 = 9 + 12 + 4 = 25$. Oder theilt man 5 in $4 + 1$, so ist $5^2 = 16 + 8 + 1 = 25$.

269. Eine Zahl, die nach unserm System mit zwey Ziffern geschrieben wird, kann als aus zwey Theilen bestehend angesehen werden: aus einem Zehner und einem Einer. Das Quadrat einer solchen Zahl wird daher folgende Produkte enthalten: 1) das Quadrat des Zehners; 2) das doppelte Produkt des Zehners mit dem Einer; 3) das Quadrat des Einers.

270. Ob aber ein gegebenes Quadrat eine zweyziffrige Wurzel habe, läßt sich aus der Anzahl der Ziffern des Quadrats leicht erkennen. Denn da ein Zehner eine Zahl von der 1sten Ordnung ist, so muß das Quadrat desselben von der zweyten Ordnung seyn, d. h. die niedrigste Zahl desselben muß in der Stelle der Hunderter

stehen. Folglich muß das Quadrat der zweyziffrigen Wurzel **wenigstens drey Ziffern haben.** Und da das Quadrat des größten Zehners $(9)^1$ nur aus zwey Ziffern besteht $(81)^2$, so kann das Quadrat der zweyziffrigen Wurzel höchstens vier Ziffern haben, oder bis in die Tausende gehen.

271. Es kann aber auch keine andere als eine zweyziffrige Wurzel ein Quadrat von 3 oder 4 Ziffern haben. Denn das Quadrat einer einziffrigen Zahl, eines Einers, kann höchstens aus 2 Ziffern bestehen: und in einer Zahl von 3 Ziffern ist die höchste Zahl ein Hunderter, also von der 2ten Ordnung, folglich ihr Quadrat von der vierten, d. h. es fängt in der Stelle der Zehntausender oder in der fünften Stelle an.

Wenn also ein Quadrat aus 3 oder 4 Ziffern besteht, so besteht seine Wurzel aus zwey Ziffern.

272. Alsdann ist es auch leicht zu bestimmen, in welcher Stelle eines solchen Quadrats ein jedes von den 3 Produkten, aus welchen es zusammengesetzt ist, anfängt. Nehmlich:

1) Das Quadrat des Zehners in der Stelle der Hunderter, weil es ein Produkt zweyer Zahlen von der ersten Ordnung ist.

2) Das doppelte Produkt des Zehners mit dem Einer in der Stelle der Zehner, weil der eine Factor von der ersten Ordnung und der andere von der Ordnung Null ist.

3) Das Quadrat des Einers in der Stelle der Einer, weil beyde Factoren von der Ordnung Null sind.

Ein jedes dieser 3 Produkte fängt also in einer *andern* Stelle an, und dieß ist für *die Ausziehung* der Wurzel wesentlich.

273. Soll also aus einem gegebenen Quadrat von 3 oder 4 Ziffern die Wurzel gezogen werden, so muß man

1) das Quadrat des Zehners aus ihr zu erhalten suchen, und daher zusehen, welche Zahl, unter den Quadraten der Einer, derjenigen Zahl gleich ist oder am nächsten kommt, welche in der dritten und vierten Stelle oder in der dritten allein (wenn keine höhere vorhanden ist) steht, und sie von dieser abziehen. Die Wurzel der abgezogenen Zahl macht den ersten Theil oder den Zehner der gesuchten Wurzel aus.

2) Zu dem Rest ziehe man die Zahl aus der zweyten Stelle herunter, so machen beyde zusammen die Zahl aus, in welcher das doppelte Produkt des Zehners mit dem Einer enthalten ist.

3) Man verdoppele daher den gefundenen ersten Theil der Wurzel und dividire damit in die Zahl Nr. 2., so gibt der Quotient den zweyten Theil der Wurzel.

4) Mit dem letztern multiplizire man den Divisor und ziehe das Produkt von der Zahl, in welche man dividirt hat, ab.

5) Zu dem Rest lasse man die letzte Zahl des gegebenen Quadrats heruntersteigen, so müssen diese zusammen das Quadrat des Einers enthalten.

6) Man mache daher das Quadrat des zuletzt gefundenen Theils der Wurzel und ziehe es von der Zahl Nr. 5. ab. Geht die Subtraction ohne Rest auf, so ist die gefundene Zahl genau die gesuchte Quadratwurzel.

Z. B.

$$\begin{array}{rl} & \quad a\ b \\ \sqrt{3249} = & 5\ 7 \\ a^2 = & \underline{25\ .\ .} \\ 2\,a = 10) & \quad 7\ 4\ . \\ 2\,ab = & \quad \underline{7\ 0\ .} \\ & \qquad 4\ 9 \\ b^2 = & \qquad \underline{4\ 9} \\ & \qquad .\ . \end{array}$$

274. Eine Wurzel von drey Ziffern läßt sich allgemein durch $a + b + c$ ausdrücken. Um das Quadrat derselben zu finden, theile man sie zuerst in zwey Theile ab: $(a + b) + c$. Dann läßt sich ihr Quadrat ausdrücken durch

$$(a + b)^2 + 2(a + b)c + c^2$$

Entwickelt man in diesem Ausdruck $(a + b)^2$, so erhält man

$$(a + b + c)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2(a + b)c + c^2$$

Folglich besteht das Quadrat einer dreyziffrigen Wurzel aus fünf verschiedenen Produkten; und wenn a von der zweyten Ordnung, b von der ersten, und c von der Ordnung Null ist, so ist a^2 ein Produkt von der vierten Ordnung oder fängt in der fünften Stelle an; $2ab$ in der vierten, u. s. f. ein jedes der folgenden Produkte immer eine Stelle tiefer als das vorhergehende.

275. Es findet sich auch durch ähnliche Gründe, wie die obigen (270 f.), daß das Quadrat einer dreyziffrigen Wurzel aus 5 oder 6 Ziffern bestehen müsse.

276. Dadurch, daß die Wurzel um einen Theil, nehmlich c, gewachsen ist, wächst das Quadrat um zwey Produkte, nehmlich: $2(a + b)c + c^2$.

277. Dasselbe geschieht, wenn die Wurzel um einen vierten Theil vermehrt wird. Denn es ist

$$\begin{aligned}(a+b+c+d)^2 &= [(a+b+c)+d]^2\\ &= (a+b+c)^2 + 2(a+b+c)d + d^2\\ &= a^2 + 2ab + b^2\\ &\quad + 2(a+b)c + c^2\\ &\quad + 2(a+b+c)d + d^2\end{aligned}$$

wo zu dem Quadrat der dreyziffrigen Wurzel noch die beyden Produkte $2(a + b + c)d + d^2$ hinzukommen.

278. Ueberhaupt läßt sich nach diesen Beyspielen das Quadrat einer Wurzel von einer beliebigen Anzahl Ziffern leicht entwickeln. Es ist

$$\begin{aligned}(a+b+c+d+e+f+\ldots)^2 = {} & a^2 + 2ab + b^2 \\ & + 2(a+b)c + c^2 \\ & + 2(a+b+c)d + d^2 \\ & + 2(a+b+c+d)e + e^2 \\ & + 2(a+b+c+d+e)f + f^2 \\ & \text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}\end{aligned}$$

279. Man sieht aus dieser Darstellung, daß, wenn die Wurzel aus 2 Theilen besteht, das Quadrat 3 (d. i. $2 \cdot 2 - 1$) Produkte enthält. Hat die Wurzel 3 Theile, so enthält das Quadrat 5 (d. i. $2 \cdot 3 - 1$) Produkte. Und da jede Vermehrung der Wurzel um einen Theil das Quadrat derselben um zwey Produkte vermehrt, so hat überhaupt eine Wurzel von n Theilen in ihrem Quadrat $(2n - 1)$ Produkte.

280. Drücken nun die n Theile eben so viele Ziffern aus, mit denen die Wurzel nach der gewöhnlichen Art geschrieben wird, so ist die höchste Ziffer von der $(n - 1)$sten Ordnung; folglich das Quadrat derselben, als das höchste Produkt in dem Quadrate der ganzen Wurzel, von der Ordnung $(2n - 2)$. Es fängt also in der $(2n - 1)$sten Stelle an. Ein jedes der folgenden Produkte aber fängt immer eine Stelle tiefer als das vorhergehende an.

Hieraus folgt auch, daß das Quadrat einer Wurzel von n Ziffern wenigstens $(2n - 1)$ Ziffern enthalten müsse; und da das Quadrat des ersten Theils derselben höchstens zwey Ziffern haben kann, so kann die Anzahl der Ziffern des ganzen Quadrats nicht über $2n$ steigen.

281. Die angegebene Formel zeigt also nicht nur, *aus welchen* Produkten das Quadrat einer jeden, aus *ganzen* Zahlen bestehenden, Wurzel zusammengesetzt sey;

sondern es läßt sich auch leicht darnach finden, in welcher Stelle ein jedes dieser Produkte zu suchen sey. Und so dient sie zu einem bequemen und sichern Wegweiser bey der Ausziehung einer noch so vielfach zusammengesetzten Quadratwurzel.

Bey der Ausziehung einer Wurzel von mehr als zwey Ziffern verfährt man auf eine ähnliche Weise, wie bey der Ausziehung einer zweyziffrigen, ja für die beyden ersten Theile der Wurzel ganz auf dieselbe Art. Man kann also aus dem oben beschriebenen Verfahren (273.) mit Hülfe der allgemeinen Formel (278.) auch leicht das Verfahren für größere Wurzeln ableiten. Ein Beyspiel, in welchem den verschiedenen Produkten des Quadrats die allgemeinen Ausdrücke nach obiger Formel beygesetzt sind, mag zur Erläuterung der Sache dienen.

| | | |

der Ordnung — 2 n seyn, das Quadrat also noch einmal so viel Decimalen als die Wurzel enthalten.

287. Je mehr Decimalen aber die Wurzel enthält, desto näher kommt sie dem wahren Werthe der Irrationalzahl; denn wenn man ihre niedrigste Zahl nur um eine Einheit vermehren wollte, so würde ihr Quadrat schon größer als die Zahl seyn, von der sie die Wurzel ausmachen soll. Folglich ist sie von der wahren Wurzel um weniger als eine Einheit ihrer niedrigsten Zahl verschieden. Je niedriger also die Ordnung von dieser ist, desto kleiner ist der Werth der Einheit derselben.

Es darf uns auch nicht wundern, daß man bey dieser Rechnung einer gewissen Größe (der Irrationalzahl) zwar immer näher kommen, aber sie selbst nie erreichen könne. Die Mathematik bietet uns eine Menge ähnlicher Beyspiele dar. Was bey diesem Fall befremdend scheinen möchte, ist, daß die Geometrie bekanntlich Irrationalgrößen mit vollkommener Genauigkeit darzustellen vermag. Woher kommt es also, daß die Arithmetik nicht ein Gleiches zu thun im Stande ist?

Der Grund hiervon liegt darin, daß diese beyden Theile der Mathematik die Größen auf eine ganz verschiedene Weise darstellen: die Arithmetik theilweise, die Geometrie im Ganzen. Erhebt man eine Wurzel aufs Quadrat, so bildet man mehrere Produkte, die zusammengenommen das Quadrat ausmachen. Man setze, die Wurzel bestehe nur aus 2 Theilen, so sind es 3 verschiedene Produkte, die zusammengenommen das Quadrat derselben ausmachen. Es ist also wohl begreiflich, wie es zugehe, daß, wenn einer Wurzel noch eine kleine Größe zu ihrer Vollständigkeit fehlt, jede Zahl, die man ihr zusetzen mag, entweder zu klein oder zu groß ausfalle. Denn sie bildet, wenn die Wurzel quadrirt wird, 2 neue Produkte von bestimmter Form, die freylich verhältnißmäßig nur selten so zusammen passen können, daß gerade das verlangte Quadrat, weder mehr noch weniger, daraus entstehe. — Die Geometrie hingegen setzt ihr Quadrat nicht aus einzelnen Quadraten und Parallelogrammen zusammen, sondern construirt es eben so im Ganzen, wie sie die Seite desselben als ein Ganzes darstellt. Hierzu

kommt, daß keine Zahl an und für sich ein Quadrat vorstellt, sondern sie ist ein Inbegriff von Einheiten; betrachten wir sie aber als das Quadrat einer andern Zahl, so ist dieß ein besonderer Gesichtspunkt, unter welchen wir sie stellen, der nicht nothwendig zu ihr gehört. Es ist daher mit einer Zahl nicht zugleich ihre Wurzel ausgedrückt. Hingegen kann die Geometrie uns kein Quadrat anders, als mit seinen Seiten zugleich darstellen; und diese sind als die Wurzel desselben zu betrachten; daher ist mit dem geometrischen Quadrat zugleich die Wurzel desselben gegeben. Man kann aber auch keine Seite eines geometrischen Quadrats, so wie überhaupt keine Linie, an sich eine Irrationalgröße nennen, sondern nur im Verhältniß zu einer andern kann sie als eine solche betrachtet werden; wenn nehmlich beyde so beschaffen sind, daß sie durch kein gemeinschaftliches Maaß genau gemessen werden können. Die Geometrie stellt also nicht irrationale Größen selbst, sondern nur Größen, deren Verhältniß gegen einander irrational ist, dar.

288. In vielen Fällen lassen sich Rechnungen mit Irrationalzahlen machen, ohne daß man sie selbst oder die ihnen genäherten Werthe nöthig hat, indem man sie bloß vermittelst des Wurzelzeichens andeutet; und nicht selten führen solche Rechnungen auf rationale Ausdrücke. Es ist z. B.

$\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$; $3\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2} = 24$; $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12} = \sqrt{(3 \cdot 12)} = \sqrt{36} = 6$.

$\sqrt{5} : \sqrt{5} = 1$; $9\sqrt{6} : 3\sqrt{6} = 3$; $\sqrt{18} : \sqrt{2} = \sqrt{(18 : 2)} = \sqrt{9} = 3$.

Dieses Verfahren rechtfertigt sich durch das, was oben (229 ff.) von der Multiplikation und Division der Potenzen von gleichen Exponenten gesagt ist.

Hiernach lassen sich leicht Rechnungen wie folgende machen:

$$\begin{array}{r} 4 + 3\sqrt{2} \\ 4 - 3\sqrt{2} \\ \hline 16 + 12\sqrt{2} \\ \quad - 12\sqrt{2} - 18 \\ \hline 16 - 18 = -2. \end{array}$$

2) Zu dem Reſt ziehe man die folgende Zahl, der dritten Stelle, herunter, ſo enthalten dieſe zuſan das Produkt 3 a^2b. Man mache daher . . .

3) das Quadrat des gefundenen erſten Theils, tiplizire es mit 3 und dividire mit dem Produkt i Zahl Nr. 2. Dadurch erhält man den zweyten Thei der Wurzel. Allein um zu ſehen, ob die gefundene auch genau die geſuchte Cubikwurzel ausmacht, muß

4) mit dem zweyten Theil (b) der Wurzel die mit welcher man dividirt hat, multipliziren, und das dukt von der Zahl, in welche dividirt worden iſt, abzi

5) Zu dem Reſt wird die Zahl aus der zweyten S heruntergezogen; dieß gibt die Zahl, welche das Produkt (3 ab^2) enthält. Man mache daher

6) das Quadrat des zweyten Theils der Cubik zel, multiplizire es mit dem erſten Theil und das Pro hinwiederum mit 3, und ziehe dieſes letztre Produkt der Zahl in Nr. 5. ab.

7) Zu dem Reſt laſſe man die letzte Zahl heru ſteigen; dadurch erhält man die Zahl, in welcher Würfel des zweyten Theils (b^3) ſteckt. Man erhebe

8) den zweyten Theil der Wurzel auf den Wi und ziehe ihn von der Zahl in Nr. 7. ab. Geht ohne Reſt auf, ſo iſt die gefundene Zahl genau die ſuchte Cubikwurzel.

Z. B.

	3	a b
	$\sqrt{}$ 1 9 5 1 1 2	= 5 8
a^3 =	1 2 5 . . .	
3 a^2 = 75 |	7 0 1 . .	
3 a^2b =	6 0 0 . .	
	1. 0 1 1 .	
3 ab^2 =	9 6 0 .	
	5 1 2	
b^3 =	5 1 2	

295. Eine dreyziffrige Zahl läßt sich durch a + b + c darstellen, und um die Produkte ihres Würfels zu finden, zertheile man sie in zwey Theile (a + b) + c. Alsdann ist der Würfel nach der vorigen Formel

$(a + b)^3 + 3(a + b)^2 c + 3(a + b) c^2 + c^3$.

Setzt man in diesem Ausdruck das erste Glied $(a + b)^3$ weiter auf, so erhält man

$$(a + b + c)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3(a+b)^2 c + 3(a+b)c^2 + c^3.$$

Es kommen hier also zu dem Würfel der zweyziffrigen Zahl noch die drey Produkte hinzu, die in der zweyten Reihe stehen. Ist nun a von der zweyten Ordnung, so ist a^3 von der sechsten, und fängt daher in der siebenten Stelle an. Ein jedes der folgenden Produkte beginnt immer eine Stelle tiefer als das vorhergehende ist, und so läßt sich nach dieser Formel das Verfahren, welches man zur Ausziehung einer dreyziffrigen Wurzel anzuwenden muß, vollständig erläutern.

Es findet sich auch leicht, daß Zahlen von 7, 8 oder 9 Ziffern eine dreyziffrige Wurzel haben müssen.

296. Setzt man diese Betrachtungen für Wurzeln von 4, 5, 6, ꝛc. Ziffern fort, so gelangt man leicht zu der allgemeinen Formel:

$(+ b + c + d + e + f + \ldots)^3 =$

$+3a^2b$	$+ 3ab^2$	$+b^3$
$+3(a+b)^2c$	$+ 3(a+b)c^2$	$+c^3$
$+3(a+b+c)^2d$	$+ 3(a+b+c)d^2$	$+d^3$
$+3(a+b+c+d)^2e$	$+ 3(a+b+c+d)c^2$	$+e^3$
$+3(a+b+c+d+e)^2f$	$+ 3(a+b+c+d+e)f^2$	$+f^3$
etc.	etc.	

297. Nach dieser Formel besteht der Würfel einer zweyziffrigen Zahl aus 4 (d. i. 3 . 2 — 2) Produkten; einer *dreyziffrigen aus 7* (oder 3 . 3 — 2) Produkten;

einer vierziffrigen aus 10 (oder 3 . 4 — 2) Prod
Woraus man leicht die allgemeine Regel zieht,
Zahl von n Ziffern in ihrem Würfel 3 n — 2 S
enthält. Von diesen fängt das höchste in der (3 n
Stelle an, und jedes der folgenden immer ein
tiefer, als das vorhergehende. Folglich muß
Würfel einer Zahl von n Ziffern wenigstens 3
Ziffern enthalten; und da der Würfel des erste
(a^3) höchstens aus drey Ziffern bestehen kann,
die Anzahl der Ziffern des ganzen Würfels nicht 3
steigen.

Die Ausziehung einer Cubikwurzel von mehr
Ziffern geschieht auf eine ähnliche Art, wie die ein
ziffrigen Wurzel, und kann daher leicht nach der obi
schrift (294.), mit Hülfe der allgemeinen Formel (29
geführt werden.

| | | |

298. Es ist auch hier nicht nöthig, daß die n Ziffern der Cubikwurzel lauter Theile einer ganzen Zahl ausdrücken; vielmehr können einige derselben oder alle einem Decimalbruch zugehören. Dadurch wird im Wesentlichen nichts geändert; nur die absolute Ordnung der Produkte ändert sich, die relative aber, in welcher sie auf einander folgen, bleibt ungeändert.

299. Bleibt nach ausgezogener Wurzel noch ein Rest übrig, so ist die gefundene Wurzel nicht genau die Cubikwurzel der gegebenen Zahl, sondern dieser Zahl weniger dem Rest. Alsdann ist es eben so wenig möglich, als bey dem ähnlichen Fall der Quadratzahlen (283), den noch fehlenden Theil der Wurzel durch irgend einen Bruch genau auszudrücken; sondern man muß sich begnügen, dem Werth dieser Größe durch einen Decimalbruch so nahe zu kommen, als man will. Dergleichen Wurzeln werden ebenfalls unter dem Namen der Irrationalzahlen begriffen, oder heißen auch irrationale Cubikwurzeln.

300. Man kann den Beweis, daß solche Wurzeln sich durch keinen Bruch genau ausdrücken lassen, auf ähnliche Art, wie bey den irrationalen Quadratwurzeln, führen. Man setze nehmlich eine Wurzel $= a + \frac{n}{m}$, so ist der Würfel davon $= a^3 + 3a^2\frac{n}{m} + 3a\frac{n^2}{m^2} + \frac{n^3}{m^3} = a^3 + \frac{3an}{m} \cdot (a + \frac{n}{m}) + \frac{n^3}{m^3}$. Hiervon ist das mittlere Produkt $= \frac{3an}{m} \cdot \frac{am+n}{m}$. Ist dieses eine ganze Zahl, so bleibt für den ganzen Würfel noch der Bruch $\frac{n^3}{m^3}$ übrig, welcher nie eine ganze Zahl werden kann. Und ist es *keine ganze* Zahl, so sey es $= b + \frac{c}{m'}$

oder $= b + \frac{c}{m^2}$, wo dieſe Brüche eigentliche Brüche ausdrücken. Alsdann fehlt ihnen zu ihrer Ergänzung ein anderer, deſſen Nenner ebenfalls entweder m oder m^2 iſt. Allein der Bruch $\frac{n^3}{m^3}$ läßt ſich nicht auf dieſe Nenner bringen, folglich können auch $\frac{c}{m} + \frac{n^3}{m^3}$ oder $\frac{c}{m^2} + \frac{n^3}{m^3}$ kein Ganzes ausmachen.

1. Um den Decimalbruch zu finden, durch welchen man ſich dem Werth einer irrationalen Cubikwurzel nähert, verfährt man auf ähnliche Art, wie bey der Ausziehung einer irrationalen Quadratwurzel. Man hängt nehmlich der Cubikzahl Nullen an, die man als Decimalzahlen betrachten kann, und behandelt dieſe bey der Ausziehung wie andere Theile der Cubikzahl. Auf jede Decimalzahl der Wurzel aber muß man drey Nullen im Würfel rechnen. Denn wenn die niedrigſte Zahl einer Cubikwurzel von der —nten Ordnung iſt, ſo iſt die niedrigſte Zahl ihres Würfels von der —3nten Ordnung. Folglich enthält der Würfel dreymal ſo viel Decimalzahlen als die Wurzel.

2. So wie die Quadratzahlen zwey Wurzeln haben, eine poſitive und eine negative (289), ſo hat eigentlich jede Cubikzahl drey Wurzeln; zwey derſelben aber enthalten ſogenannte unmögliche Größen, von welchen weiter unten (304. ff.) die Rede iſt. Das bisher Geſagte betrifft nur die Ausziehung der möglichen Wurzeln; zur Auffindung der andern wird die Auflöſung quadratiſcher Gleichungen erfordert.

301. Es fällt in die Augen, daß die Ausziehung einer Cubikwurzel weitläuftiger und mühſamer, als die einer Quadratwurzel iſt, da der Würfel einer Zahl aus mehrern Produkten, als das Quadrat derſelben zuſammengeſetzt iſt. Wollte man nun die Wurzeln höherer Potenzen, z. B. des Biquadrats, auf einem ähnlichen Wege ausziehen, ſo würde das Verfahren noch weitläuftiger und beſchwerlicher werden. Doch ſieht man aus dem Bisherigen leicht, wie man die Sache anzugreifen hätte. Man

müßte nehmlich a + b auf das Biquadrat oder auf eine Potenz von demselben Grade erheben, von welchem die Zahl ist, aus der die Wurzel gezogen werden soll, um die Produkte zu finden, aus denen eine solche Potenz zusammengesetzt ist. Ferner müßte man vermittelst der Ordnungsexponenten die Stellen bestimmen, in welchen ein jedes Produkt anfinge; und endlich müßte man sich eine kleine Tabelle der Einer nebst ihren Potenzen von dem nehmlichen Grade verschaffen. Mit diesen Hülfsmitteln ließe sich die Wurzel finden.

Allein man kann dieser weitläuftigen Methode um so eher überhoben seyn, da die Mathematik uns in den Logarithmen, von denen weiter unten gehandelt wird, ein bequemeres und allgemeines Mittel zur Ausziehung der Wurzeln aus Potenzen von jedem Grade darbietet.

---

302. Eine besondere Betrachtung verdient noch die Frage, in wie fern das eben erläuterte Verfahren zur Ausziehung einer Wurzel in dem Falle anwendbar sey, daß die Zahl, aus welcher die Wurzel gezogen werden soll, negativ sey.

303. Es ist schon oben (199.) gezeigt worden, daß nur diejenigen Potenzen negativ werden können, die eine negative Wurzel und einen ungeraden Exponenten haben, z. B. die 3te, 5te, 7te Potenz irgend einer negativen Zahl. Ist also die Cubikwurzel aus einer negativen Zahl zu ziehen, so muß auch die Wurzel negativ seyn. Diese wird aber auf eben die Art, wie eine positive gefunden. Denn man setze, sie sey $= -(a + b)$, so ist $-(a + b)^3 = -(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3)$. Folglich besteht die negative Potenz aus denselben Produkten, aus welchen die positive besteht, mit dem einzigen Unterschiede, daß sie insgesammt negativ sind. Und wie es in dieser Rücksicht mit dem *Würfel einer zweytheiligen* Wurzel beschaffen ist, so ist

es auch mit dem Würfel einer mehr als zweytheiligen Wurzel. Man kann also bey der Ausziehung der Cubikwurzel aus einer negativen Zahl eben so verfahren, als ob sie positiv wäre, muß aber am Ende die Wurzel negativ setzen.

Dasselbe gilt auch von der Ausziehung anderer Wurzeln aus negativen Zahlen, wenn die Exponenten ungerade Zahlen sind.

304. Wenn aber ein Quadrat als negativ betrachtet wird, so läßt sich gar keine Zahl als Quadratwurzel davon angeben. Denn jede sowohl positive, als negative Zahl gibt ein positives Quadrat; folglich kann die Quadratwurzel einer negativen Zahl weder positiv, noch negativ seyn. Sie ist daher überhaupt als etwas unmögliches anzusehen, und wird auch mit dem Namen einer unmöglichen, oder eingebildeten (imaginären) Größe bezeichnet.

Z. B. $\sqrt{-4}$ ist weder $+2$ noch -2; denn beydes gibt im Quadrat $+4$. Man kann also $\sqrt{-4}$ durch keine Zahl ausdrücken, oder auch nur der dadurch bezeichneten Größe nahe kommen.

305. Unmögliche Größen dürfen nicht mit Irrationalzahlen verwechselt werden. Die letztern drücken Größen aus, die man zwar durch Zahlen nicht vollkommen, aber doch beynahe genau darstellen kann; den erstern hingegen kann man auf keine Weise auch nur nahe kommen.

So wie die Quadratwurzeln aus negativen Zahlen unmöglich sind, so sind es auch die Biquadratwurzeln, und überhaupt alle Wurzeln, deren Exponenten gerade Zahlen sind.

306. Wenn gleich die unmöglichen Größen an sich durch keine Zahlen dargestellt werden können, so lassen sie sich doch in den Rechnungen gebrauchen und führen oft auf Resultate, die ganz oder zum Theil aus möglichen Größen bestehen. Diese Rechnungen sind den obenangeführten mit Irrationalzahlen ähnlich (288.).

Z. B. $\sqrt{-4} \cdot \sqrt{-4}$ ist $= -4$; $3\sqrt{-2} \cdot 2\sqrt{-2}$ ist $= -2 \cdot 6 = -12$; $15\sqrt{-1} : 3\sqrt{-1} = 5$.

Beyspiele zusammengesetzterer Art geben folgende Exempel der Multiplikation und Division:

$$\begin{array}{r} 4 + 3\sqrt{} - 2 \\ 4 - 3\sqrt{} - 2 \\ \hline 16 + 12\sqrt{} - 2 \\ \quad - 12\sqrt{} - 2 + 18. \\ \hline 16 + 18 = 34. \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6 + 2\sqrt{} - 3 \\ 9 - 3\sqrt{} - 3 \\ \hline 54 + 18\sqrt{} - 3 \\ \quad - 18\sqrt{} - 3 + 18 \\ \hline 54 + 18 = 72. \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -1 + \sqrt{} - 3 \\ -1 + \sqrt{} - 3 \\ \hline +1 - \sqrt{} - 3 \\ \quad - \sqrt{} - 3 - 3 \\ \hline +1 - 2\sqrt{} - 3 - 3 = -2 - 2\sqrt{} - 3. \end{array}$$

Wird dieses Produkt wieder mit $-1 + \sqrt{} - 3$ multiplizirt, so erhält man den Würfel dieser Zahl, nehmlich:

$$\begin{array}{r} -2 - 2\sqrt{} - 3 \\ -1 + \sqrt{} - 3 \\ \hline +2 + 2\sqrt{} - 3 \\ \quad - 2\sqrt{} - 3 + 6 \\ \hline +2 + 6 = +8 \end{array}$$

Es ist also $-1 + \sqrt{} - 3$ eine der unmöglichen Cubikwurzeln von 8. (300, 2.).

$$\begin{array}{r} 12 - 3\sqrt{} - 2 + 6\sqrt{} - 3 \\ 8 - 2\sqrt{} - 2 - 4\sqrt{} - 3 \\ \hline 96 - 24\sqrt{} - 2 + 48\sqrt{} - 3 \\ \quad - 24\sqrt{} - 2 \qquad -12 + 12\sqrt{} - 2 \cdot \sqrt{} - 3 \\ \quad - 48\sqrt{} - 3 \qquad +12\sqrt{} - 2 \cdot \sqrt{} - 3 + 72 \\ \hline 96 - 48\sqrt{} - 2 - 12 + 72 = 156 - 48\sqrt{} - 2. \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6 + 4\sqrt{} - 1 - 2\sqrt{} - 2 \\ 3 - 2\sqrt{} - 1 - \sqrt{} - 2 \\ \hline 18 + 12\sqrt{} - 1 - 6\sqrt{} - 2 \\ \quad - 12\sqrt{} - 1 \qquad +8 + 4\sqrt{} - 1 \cdot \sqrt{} - 2 \\ \quad - 6\sqrt{} - 2 \qquad -4\sqrt{} - 1 \cdot \sqrt{} - 2 - 4 \\ \hline 18 - 12\sqrt{} - 2 + 8 - 4 = 22 - 12\sqrt{} - 2. \end{array}$$

$$2+\sqrt{-5)\ 24+4\sqrt{-5}+20 \mid 12-4\sqrt{-5}}$$
$$\underline{24+12\sqrt{-5}}$$
$$-8\sqrt{-5}+20$$
$$\underline{-8\sqrt{-5}+20.}$$

$$2\sqrt{-2-\sqrt{-3)\ 10\sqrt{-2-5\sqrt{-3}-24-14\sqrt{-2\cdot\sqrt{-3}-12} \mid 5+6\sqrt{-2-4\sqrt{-3}}}}$$
$$\underline{10\sqrt{-2-5\sqrt{-3}}}$$
$$-24-14\sqrt{-2\cdot\sqrt{-3}}$$
$$\underline{-24-6\sqrt{-2\cdot\sqrt{-3}}}$$
$$-8\sqrt{-2\cdot\sqrt{-3}-12}$$
$$\underline{-8\sqrt{-2\cdot\sqrt{-3}-12.}}$$

Aus diesen Beyspielen zeigt sich auch, wie man dergleichen Größen addiren und subtrahiren könne.

Zehnter Abschnitt.

Von den Verhältnissen.

307. Der Begriff eines Verhältnisses ist ein so viel umfassender und bey der Verknüpfung zweyer Zahlen so häufig entstehender Begriff, daß schon die ersten vier Species uns auf ihn führen, und zum Theil auf ihm beruhen. Hier soll also nicht sowohl die erste Erwähnung von ihm geschehen, als vielmehr eine genauere Entwickelung desselben, und eine Erläuterung der insbesondere auf ihn gegründeten Rechnungen gegeben werden.

308. So wie der Begriff eines Verhältnisses überhaupt eine gewisse Beziehung zweyer Dinge gegen einander anzeigt, so drückt er auch in der Arithmetik eine gewisse Beziehung, in welcher zwey Zahlen gegen einander gedacht werden sollen, aus. Diese Beziehung betrifft die Entstehungsart der einen Zahl aus der andern.

309. Man kann sich vorstellen, eine Zahl entstehe dadurch aus der andern, daß man noch irgend eine Zahl — eine ganze oder gebrochene, positive oder negative — zu dieser hinzuaddirt; oder auch dadurch, daß man diese mit irgend einer Zahl multiplizirt. Im ersten Fall wird jede Zahl als ein Aggregat von Einheiten oder deren Theilen betrachtet; im zweyten wird die eine Zahl ohne Rücksicht auf die Menge ihrer Einheiten als ein Ganzes angesehen, und unmittelbar zum Maaßstabe für die andere genommen.

310. Hieraus entspringt eine doppelte Art von Verhältniß: *die eine drückt das* Entstehen einer Zahl aus der

andern durch das Hinzukommen oder Abgehen einer gewissen Menge von Einheiten oder Theilen derselben aus; die andere stellt die eine Zahl als ein Vielfaches der andern selbst oder als einen Theil von ihr dar. Jene heißt das arithmetische, diese das geometrische Verhältniß.

311. Die beyden Zahlen, welche in ein Verhältniß gegen einander gesetzt werden, heißen Glieder des Verhältnisses (termini rationis); und zwar wird die erstere das Vorderglied (term. antecedens), und die letztere das Hinterglied (term. consequens) genannt.

312. Zieht man das eine Glied eines arithmetischen Verhältnisses von dem andern ab, so gibt der Unterschied die Größe, welche man zu jenem hinzuthun muß, um dieses zu erhalten.

313. Bey dem geometrischen Verhältniß muß man mit dem einen Gliede in das andere dividiren, wenn man diejenige Zahl erhalten will, mit welcher man jenes multipliziren muß, um dieses hervorzubringen. Man nennt sie den Namen oder Exponenten des Verhältnisses (nomen s. exponens rationis).

314. Arithmetische Verhältnisse sind einander gleich, wenn die Unterschiede ihrer Glieder; und geometrische, wenn ihre Exponenten gleich sind.

315. Zwey gleiche arithmetische Verhältnisse machen eine arithmetische Proportion (proportio arithmet.), und zwey gleiche geometrische Verhältnisse eine geometrische Proportion (proportio geom.).

316. Die Verhältnisse der erstern werden mit dem Subtractionszeichen, die Verhältnisse der letztern mit dem Divisionszeichen bezeichnet, wovon der Grund aus dem eben Gesagten (312 f.) erhellet. Z. B.

$a - b = c - d$ (arithmet. Proport.)

$a : b = c : d$ (geometr. Proport.)

Sonst hat man die arithmetische Proportion auf folgende Art bezeichnet:

a . b ∴ c . d

und die geometrische wird noch jetzt von vielen, besonders Ausländern, so geschrieben:

a . b : : c . d.

317. Das erste und dritte Glied einer Proportion heißen die Vorderglieder, und das zweyte und vierte die Hinterglieder derselben; weil jene die Vorder- und diese die Hinterglieder der einzelnen Verhältnisse sind, aus denen die Porportion besteht. Auch nennt man das erste und vierte die äußern, und das zweyte und dritte die mittlern Glieder der Proportion.

318. Sind die mittlern Glieder einer Proportion ungleich, so heißt die Proportion eine unterbrochene oder abgesonderte (proportio discreta); sind sie einander gleich, so heißt sie eine stetige (continua).

Von der arithmetischen Proportion insbesondere.

319. In einer arithmetischen Proportion ist die Summe der beyden äußern Glieder der Summe der beyden mittlern gleich.

Um diesen Satz in seiner Allgemeinheit zu beweisen, drücke man die arithmetische Proportion so durch Buchstaben aus, daß die Gleichheit ihrer Verhältnisse deutlich bemerkt werde, auf folgende Art:

$$(a \pm d) - a = (b \pm d) - b.$$

Hier ist die Summe der äußern Glieder $= (a \pm d) + b$; und die Summe der mittlern $= a + (b \pm d)$, *welches eben so viel ist.*

Eine stetige Proportion könnte man ausdrücken durch

$$(a \pm d) - a = a - (a \pm d),$$

wo die Summe der beyden äußern Glieder $= 2a$ ist, man mag die obern oder die untern Vorzeichen von d nehmen. Eben so groß ist aber auch die Summe der mittlern Glieder.

320. Wenn, umgekehrt, vier Zahlen so beschaffen sind, daß die Summe zweyer derselben der Summe der beyden andern gleich ist, so bilden sie eine arithmetische Proportion, wofern sie so geordnet werden, daß die Zahlen der einen Summe die äußern, und die der andern die mittlern Glieder der Proportion ausmachen.

Denn es sey $a + d = b + c$; so ist auch $a + d - b = c$ (45. a.); ingleichen $a - b = c - d$, welches eben die Proportion darstellt.

Man kann es also als ein Zeichen der Richtigkeit einer arithmetischen Proportion ansehen, wenn die Summe der äußern Glieder der Summe der mittlern gleich ist.

321. Hieraus ergibt sich, wie man zu drey gegebenen Gliedern einer unterbrochenen Proportion das vierte, und zu den beyden äußern einer stetigen das mittlere finden könne.

322. Es sey nehmlich $a - b = c - x$, wo x das unbekannte Glied bedeute, so ist $a + x = b + c$ (319.). Folglich $x = (b + c) - a$.

Auf ähnliche Weise verfährt man, wenn x ein mittleres Glied vorstellt oder überhaupt eine andere Stelle einnimmt.

323. Ferner sey $a - x = x - b$, so ist $a + b = x + x = 2x$. Folglich ist $x = (a + b) : 2$.

1. In diesem Fall heißt x das arithmetische Mittel zwischen a und b.

2. Aus beyden allgemeinen Ausdrücken für x lassen sich *leicht die bekannten* Regeln zur Auflösung der Aufgabe ab-

3. Unter dem Ausdruck arithmetisches Mittel versteht man häufig auch eine mittlere Zahl zwischen mehrern andern; die dadurch gefunden wird, daß man die letztern zusammenaddirt, und ihre Summe durch die Anzahl der Glieder dividirt.

4. Wollte man zu dem gegebenen mittlern Gliede die beyden äußern suchen, so käme es darauf an, zwey Zahlen zu erhalten, deren Summe noch einmal so groß, als das mittlere Glied wäre. Dieß könnte auf unzählige Weise geschehen. Denn ist die eine Zahl = a, so ist die andere = 2 x — a.

324. Wenn die Vorderglieder einer arithmetischen Proportion einander gleich sind, so sind es auch die Hinterglieder.

Denn es sey a — b = a — c, so ist a + c = b + a; und auf beyden Seiten a abgezogen, bleibt übrig c = b.

Eben so folgt auch, daß, wenn die Hinterglieder gleich sind, es auch die Vorderglieder seyn müssen.

Wenn also zwey Größen zu einer dritten oder zu zwey gleichen Größen einerley Verhältniß haben, so sind sie einander gleich.

325. Umgekehrt, wenn zwey Größen gleich sind, so haben sie zu einer dritten oder zu zwey gleichen Größen einerley arithmetisches Verhältniß.

326. Wenn man zu beyden Gliedern des einen Verhältnisses einer arithmetischen Proportion einerley Größe addirt oder davon subtrahirt, so wird ihr Verhältniß dadurch nicht geändert, folglich die Proportion nicht aufgehoben.

Denn es sey a — b = c — d, so ist auch (a ± g) — (b ± g) = c — d. Denn zieht man b ± g von a ± g ab, so hebt sich g gegen g und der Unterschied bleibt immer a — b. Folglich bleibt das Verhältniß ungeändert, und *die letztre Proportion* der erstern gleich.

drey gegebenen Gliedern einer unterbrochenen Proportion das vierte, und zu zweyen einer stetigen die mittlere Proportionalzahl finden könne.

Es sey nehmlich $a : b = c : x$, so ist $ax = bc$; folglich $x = \frac{bc}{a}$.

Ingleichen sey $a : x = x : b$, so ist $x^2 = ab$, folglich $x = \sqrt{(ab)}$.

1. Nach diesen allgemeinen Ausdrücken kann man leicht die Regeln selbst in Worte fassen.

2. Zu einer gegebenen mittlern Proportionalzahl lassen sich unzählige äußere Glieder finden. Denn es kommt nur darauf an, daß das Produkt der beyden Zahlen dem Quadrat der mittlern gleich sey. Ist daher die eine $= a$, so muß die andere $= x^2 : a$ seyn. (Vergl. 323, 4.).

333. Eine Anwendung der allgemeinen Aufgabe: zu drey gegebenen Gliedern einer geometrischen Proportion das vierte zu finden, ist die Regel de tri, eine der nutzbarsten Rechnungsarten der praktischen Rechenkunst.

Die Benennung dieser Rechnungsart ist wohl aus dem Italienischen: regola de' tre (nehml. termini) abzuleiten.

334. In der Regel de tri bestehen die Glieder aus benannten Zahlen. Ein geometrisches Verhältniß benannter Zahlen aber kann nur zwischen Größen von einerley Art statt finden, weil das eine Glied als entstanden aus dem andern gedacht werden soll. Der Exponent hingegen ist unbenannt; daher Verhältnisse, deren jedes aus einer andern Art von Größe besteht, einander gleich seyn können. Z. B. 4 Rthlr. : 12 Rthlr. = 5 ℔ : 15 ℔.

335. In einer Rechnung der Regel de tri können daher nur zweyerley Arten von Größen vorkommen, von welchen die eine in dem ersten, und die andere in dem

 Da nun ein Glied des

einen Verhältnisses gesucht werden soll, so muß das gesuchte mit dem einen gegebenen von einerley Art, und die andern beyden müssen wiederum von einerley Art seyn.

336. Es ist nicht gleichgültig, von welcher Beschaffenheit die verschiedenartigen Größen der beyden Verhältnisse sind. Da die Regel de tri nicht bloß eine mathematisch richtige Proportion darstellen, sondern das, was durch sie gefunden wird, auch mit der Wirklichkeit übereinstimmen soll, so müssen die verschiedenartigen Größen in einer solchen Verbindung mit einander stehen, daß das Verhältniß der einen Art durch das Verhältniß der andern bestimmt wird.

1. Es ist nicht Sache der Mathematik, anzugeben, welche Arten von Gegenständen die erforderliche Beschaffenheit haben, um die Regel de tri auf sie anwenden zu können; dazu sind anderweitige Kenntnisse nothwendig. Die Art aber, wie verschiedene Gegenstände einander bestimmen, kann verschieden seyn: entweder nimmt die eine Art der Größe zu oder ab, wenn die andere zu- oder abnimmt, oder jene nimmt zu, wenn diese abnimmt, und umgekehrt. Im ersten Fall sagt man, die Größen stehen im geraden, im andern, sie stehen im verkehrten oder umgekehrten Verhältniß; und hiernach wird die Regel de tri selbst in die gerade und in die verkehrte (regula trium *directa et inversa*) unterschieden, je nachdem die verschiedenartigen Größen in ihr in geradem oder verkehrtem Verhältniß zu einander stehen.

2. Es kann auch seyn, daß die eine Art von Größe zu- oder abnimmt, wenn die andere zu- oder abnimmt, aber nicht in demselben, sondern in irgend einem andern Verhältniß z. B. der Quadrate oder Würfel oder Quadratwurzeln der Zu- oder Abnahme von dieser. Alsdann muß die Rechnung der Regel de tri diesen Erfordernissen gemäß eingerichtet werden. Oder es kann das Verhältniß auch so beschaffen seyn, daß die Regel de tri gar nicht darauf anwendbar ist. Alles dieses muß durch Ueberlegung und durch Kenntniß *der Sache in jedem Fall* besonders bestimmt werden.

337. Bey dem Ansatz oder der Anordnung der Glieder einer Rechnung der Regel de tri pflegt man so zu verfahren, daß das fehlende Glied auf die vierte Stelle der Proportion gerechnet wird. Es wird daher gefunden, wenn man das zweyte und dritte Glied zusammen multiplizirt, und das Produkt durch das erste dividirt, wovon der Grund aus §. 332. erhellet.

338. Es ist aber nicht einerley, in welcher Ordnung die drey ersten Glieder zu stehen kommen. Um sie richtig zu ordnen, setze man zuerst diejenige Größe in die dritte Stelle, welche mit der gesuchten von einerley Art ist. Dann überlege man, nach dem Zusammenhange der ganzen Aufgabe, ob das vierte Glied größer oder kleiner werden muß, als das dritte — welches allemal im Voraus bestimmt werden kann — und hiernach setze man auch das größere oder kleinere der noch übrigen beyden zusammengehörigen (d. i. gleichartigen) Größen in die zweyte, und folglich die kleinere oder größere in die erste Stelle.

1. Wenn mehr als drey Größen in einer Aufgabe der Regel de tri gegeben sind, so müssen diejenigen von ihnen in der Rechnung wegbleiben, welche auf die gesuchte Größe keinen Einfluß haben, welches ebenfalls durch einige Ueberlegung leicht gefunden wird.

2. Bestehen die beyden ersten Glieder, oder auch nur eines derselben, aus mehrern Theilen, z. B. Thalern, Groschen und Pfennigen, oder haben sie ungleiche Benennungen, so müssen beyde auf eine einzige und gleiche Benennung gebracht werden, damit die Zahlen der Glieder dasselbe Verhältniß ausdrücken, welches die durch sie bezeichneten Größen zu einander haben. Alsdann aber kommt die Benennung der Glieder in der Rechnung selbst weiter nicht in Betrachtung, so wenig als die absolute Größe der Zahlen selbst. Man kann daher die letztern, der Richtigkeit der Rechnung unbeschadet, verändern — indem man sie mit einerley Zahl multiplizirt oder dividirt — wofern nur ihr

Verhältniß unverändert bleibt. Sie sind also in der Rechnung als unbenannte Zahlen zu betrachten; und so fällt die scheinbare Ungereimtheit weg, als ob in der Regel de tri benannte Zahlen, und noch dazu von verschiedener Art, zusammen multiplizirt würden.

3. So wie man das erste und zweyte Glied durch eine Division mit einerley Zahl in manchen Fällen verkleinern, und sich dadurch die Rechnung erleichtern kann, so ist es auch gestattet, das erste und dritte Glied gegen einander zu heben oder mit einerley Zahl zu dividiren. Denn da $x = \frac{bc}{a}$ ist (332.), so läßt sich a sowohl gegen b als gegen c aufheben.

4. Wenn das dritte Glied aus mehrern Theilen besteht, so ist es nicht nöthig, diese auf eine einzige Benennung zu bringen, sondern man kann jeden Theil mit dem zweyten Gliede multipliziren, und in das Produkt, nach gehöriger Reduktion der verschiedenen Theile, mit dem ersten Gliede dividiren, wie bey einer Division in benannten Zahlen, wobey der Divisor unbenannt ist. Dadurch erhält man das vierte Glied gleich in denselben Arten von Größen ausgedrückt, aus welchen das dritte besteht.

Ein mehreres über die Regel de tri s. in meiner Anweis. z. Rechenk. §. 228. ff.

339. Wenn die Vorderglieder einer geometrischen Proportion einander gleich sind, so sind es auch die Hinterglieder.

Denn es sey $a : b = a : c$, so ist $ac = ab$, folglich auch $c = b$.

Auf eben diese Weise ergibt sich, daß, wenn die Hinterglieder gleich sind, es auch die Vorderglieder seyn müssen; ingleichen, daß, wenn die Glieder des einen Verhältnisses einander gleich sind, es auch die Glieder des andern sind.

340. Der vorhergehende Satz läßt sich auch so ausdrücken: wenn zwey Größen zu einer dritten oder zu zwey gleichen Größen einerley Verhältniß haben, so sind sie *einander gleich*.

341. Umgekehrt also, wenn zwey Größen einander gleich sind, so haben sie zu einer dritten oder zu zwey andern gleichen Größen einerley geometrisches Verhältniß.

342. Aus einer geometrischen Proportion lassen sich eine Menge anderer herleiten, die zum Theil der ursprünglichen gleich sind, d. h. deren Verhältnisse einerley Exponenten mit den Verhältnissen jener haben; zum Theil von ihr verschieden sind.

Es sey z. B. $a : b = c : d$, so ist

1) $b : a = d : c$. Denn es bleibt $bc = ad$; folglich ist die Proportion richtig (330.).

2) $ma : mb = c : d$. Denn der Bruch $\frac{a}{b}$ ist $= \frac{ma}{mb}$ (61.) und da $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ist, so ist auch $\frac{ma}{mb} = \frac{c}{d}$; folglich $ma : mb = c : d$.

3) $\frac{a}{n} : \frac{b}{n} = c : d$. Der Bruch $\frac{a}{b}$ ist $= \frac{a : n}{b : n}$ (61.). Es ist also $\frac{a : n}{b : n} = \frac{c}{d}$; folglich $(a : n) : (b : n) = c : d$ oder $\frac{a}{n} : \frac{b}{n} = c : d$.

4) $a : c = b : d$. Denn da $ad = bc$ ist, so ist auch $a : c = b : d$ (330.).

5) $(a \pm b) : (c \pm d) = a : c = b : d$. Denn da $ad = bc$ ist, so ist auch $ad \pm bd = bc \pm bd$, d. i. $(a \pm b)\, d = (c \pm d)\, b$; folglich $(a \pm b) : (c \pm d) = b : d$ (330.) $= a : c$ (Nr. 4.).

Hieraus folgt auch, daß $(a + b) : (c + d) = (a - b) : (c - d)$ ist.

6) $(a \pm c) : (b \pm d) = a : b = c : d$. Denn es ist auch $ad \pm cd = bc \pm cd$, d. i. $(a \pm c)\, d = (b \pm d)\, c$; *folglich* $(a \pm c) : (b \pm d) = c : d$ (330.) $= a : b$ — *nach* der ursprünglichen Proportion.

Von diesen Proportionen ist die zweyte, dritte und sechste der ursprünglichen gleich; man kann daher in ihnen auch statt des Verhältnisses c : d das Verhältniß a : b setzen.

343. Wenn in zwey Proportionen drey Glieder von derselben Ordnung einander gleich sind, so muß auch das vierte Glied in beyden gleich seyn. Z. B. es sey

$$a : b = c : d$$
$$a : b = c : p$$

so ist $d = \frac{bc}{a}$

und $p = \frac{bc}{a}$

folglich $d = p$.

344. Wenn zwey Proportionen einander gleich sind, so läßt sich aus ihnen eine einzige zusammensetzen, indem man die Glieder von gleicher Ordnung zusammenaddirt.

Es sey $a : ma = b : mb$

und $c : mc = d : md$

so ist auch $(a + c) : (ma + mc) = (b + d) : (mb + md)$

oder $(a + c) : m\,(a + c) = (b + d) : m\,(b + d)$.

Bey dieser letztern Art, die Proportion zu schreiben, fällt die Richtigkeit derselben in die Augen. Man sieht auch, daß der Exponent der zusammengesetzten Proportion derselbe ist, den die einzelnen Proportionen haben.

1. Auf eben diese Weise lassen sich auch mehr als zwey Proportionen zusammensetzen.

2. Es ließe sich auch aus solchen Proportionen durch Subtrahiren der Glieder von gleicher Ordnung eine neue Proportion herausbringen.

345. Wenn in zwey Proportionen zwey Verhältnisse einander gleich sind, so sind es auch die andern beyden, und machen folglich zusammen wieder eine Proportion.

Es sey $a : b = c : d$
und $á : b' = e : f$
ingleichen $a : b = á : b'$
so ist auch $c : d = e : f$

Denn es ist $\frac{a}{b} = \frac{á}{b'} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$; also auch $c : d = e : f$.

Anstatt des Verhältnisses $á : b'$ in der zweyten Proportion, kann auch das Verhältniß $a : b$ selbst gesetzt, und der Satz so ausgedrückt werden: Wenn zwey Verhältnisse einem dritten oder zweyen gleichen gleich sind, so sind sie unter einander selbst gleich.

346. Aus zwey und mehrern Proportionen läßt sich jederzeit eine neue Proportion zusammensetzen, wenn man die Glieder von gleicher Ordnung zusammenmultiplizirt.

Es sey $a : b = c : d$
und $e : f = g : h$
so ist auch $ae : bf = cg : dh$.

Denn es ist $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; und $\frac{e}{f} = \frac{g}{h}$; folglich (gleiches mit gleichem multiplizirt) $\frac{ae}{bf} = \frac{cg}{dh}$; folglich $ae : bf = cg : dh$.

Diese Proportion könnte wieder mit einer dritten, dann mit einer vierten u. s. w. zusammengesetzt werden.

Wenn man die Brüche in einander dividirt, anstatt sie zu multipliziren, so erhält man $\frac{a : e}{b : f} = \frac{c : g}{d : h}$ und hieraus die Proportion $\frac{a}{e} : \frac{b}{f} = \frac{c}{g} : \frac{d}{h}$.

347. Sind die zusammenzusetzenden Proportionen *identisch*, und man multiplizirt die Glieder von gleicher Ordnung zusammen, so wird jedes Glied der zusammen-

gesetzten Proportion eine Potenz des Gliedes der einfachen Proportion. Z. B. aus n Proportionen =

$$a : b = c : d$$

entsteht die Proportion

$$a^n : b^n = c^n : d^n.$$

348. Auf gleiche Weise läßt sich aus der Proportion

$$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{c} : \sqrt[n]{d}$$

die Proportion

$$a : b = c : d$$

herleiten. Folglich muß auch umgekehrt jene aus dieser hergeleitet werden können.

349. Wenn in zwey verschiedenen Proportionen Glieder von gleicher Größe vorkommen, so kann man sie so ordnen, daß sie bey der Zusammensetzung der Proportionen einander aufheben. Hiervon lassen sich mancherley Fälle gedenken: aus einigen derselben aber läßt sich leicht abnehmen, wie man in einem jeden derselben zu verfahren habe.

Es sey 1) $a : b = c : d$

und $e : f = d : g$

so ist $ae : bf = c : g$.

Eigentlich sollte das letztre Verhältniß cd : dg seyn, dividirt man aber beyde Glieder durch d, wodurch das Verhältniß sich nicht ändert (342. 3.), so entsteht c : g.

2) $a : b = c : d$

$e : b = c : f$

so ist $a : e = f : d$.

Denn man kehre die Verhältnisse der zweyten Proportion um, $b : e = f : c$, so hebt sich bey der Zusammensetzung, wie in Nr. 1., b gegen b und c gegen c auf.

3) $a : b = c : d$

$e : d = a : f$

so ist $e : b = c : f$.

Denn man ordne die zweyte Proportion auf folgende Art: e : a = d : f (342. 4.), so hebt sich a gegen a, und d gegen d auf.

350. Ein Verhältniß wie ae : bf (349. 1.) heißt ein aus den Verhältnissen a : b und e : f zusammengesetztes Verhältniß; das Verhältniß c : g ist diesem gleich, und wird daher selbst als ein zusammengesetztes angesehen.

Wenn ein Verhältniß durch bestimmte Zahlen ausgedrückt ist, so läßt sich aus den Zahlen desselben nicht erkennen, ob es ein einfaches oder zusammengesetztes sey. Dieß hängt lediglich von seiner Entstehungsart ab, und dieselben Zahlen können in einem Fall ein einfaches und in einem andern ein zusammengesetztes Verhältniß ausdrücken.

351. So wie in dem angeführten Beyspiele das Verhältniß c : g aus zwey andern Verhältnissen zusammengesetzt ist, so kann man auf ähnliche Weise ein Verhältniß aus so vielen andern als man will zusammensetzen. Es sey

a : b = c : d
e : f = d : g
h : i = g : k
l : m = k : n

so ist aehl : bfim = c : n.

352. Wenn von einem zusammengesetzten Verhältnisse, wie c : n (351.), das eine Glied, c, und überdieß die Verhältnisse a : b, e : f u. s. w. durch deren Zusammensetzung das Verhältniß = c : n entsteht, gegeben sind: so läßt sich daraus das andre Glied, n, finden. Denn man braucht nur die Verhältnisse wirklich zusammenzusetzen, so wird n das vierte Glied einer Proportion, und läßt sich folglich durch eine bekannte Regel de tri finden.

353. Sind nun, daß die Verhältnisse a : b, e : f u. s. w. (351.), sondern nur die Verhältnisse c : d, d : g

u. s. w., aus denen das Verhältniß c : n selbst zusammengesetzt ist, gegeben, n ausgenommen, welches gesucht werden soll: so kann man bey der Zusammensetzung der Proportionen die gleichen Glieder gegen einander aufheben, und n, wie in dem vorigen Fall, durch eine Regel de tri suchen.

354. Man kann aber auch die Produkte der äußern Glieder der gegebenen Proportionen den Produkten ihrer mittlern Glieder gegenüberstellen, (die einander gleich seyn müssen); alsdann die gleichen Factoren auf beyden Seiten gegen einander aufheben, die übrigen auf jeder Seite zusammen multipliziren, und mit dem Produkt derjenigen Glieder, zu welchen n gehört, in das andere Produkt dividiren, so findet man gleichfalls n.

Z. B. in dem gegebenen Exempel ist

$$ad = bc$$
$$eg = fd$$
$$hk = ig$$
$$ln = mk$$

Hier heben sich auf beyden Seiten die Factoren d, g, k, und es bleibt übrig $aehln = bcfim$; folglich ist

$$n = \frac{bcfim}{aehl}.$$

355. In einem zusammengesetzten Verhältnisse kann man einzelne Factoren beyder Glieder mit andern vertauschen, welche dasselbe Verhältniß haben, ohne daß das ganze Verhältniß sich ändert. Es sey z. B.

$$ae : bf = m : n$$
ingleichen $e : f = c : d$

so ist auch $ac : bd = m : n$.

Denn es ist $\frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f} = \frac{m}{n}$; und $\frac{e}{f} = \frac{c}{d}$; man kann also in jenem Produkt statt des Factors $\frac{e}{f}$ den gleichen

$\frac{c}{d}$ setzen; dadurch erhält man $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{m}{n}$, d. i. $\frac{ac}{bd} = \frac{m}{n}$; folglich ac : bd = m : n.

---

356. Von der Zusammensetzung der Verhältnisse, von welcher vorhin (351. ff.) gehandelt worden ist, hat man auch in den praktischen Rechnungen öfters Gelegenheit Gebrauch zu machen, da es eine Menge von Dingen gibt, bey welchen die Zu- oder Abnahme ihrer Größe nicht bloß von dem Verhältniß einer, sondern mehrerer andern Arten von Dingen abhängig ist. Es entstehen dadurch die Rechnungen, welche unter dem Namen der *regula quinque*, *septem* etc. begriffen werden.

Diese Rechnungen werden, wie die der Regel de tri, nach der Menge der zur Rechnung erforderlichen Glieder benannt. Da man es hier nun mit lauter Verhältnissen zu thun hat, deren jedes aus zwey Gliedern besteht, von dem einen Verhältniß aber nur das eine Glied gegeben ist und das andere gesucht werden soll, so muß die Anzahl der gegebenen Glieder immer ungerade seyn.

357. Das fehlende Glied wird auch hier, wie bey der Regel de tri, auf die vierte Stelle der Proportion gerechnet, und daher diejenige der gegebenen Größen, welche mit der gesuchten von einerley Art ist, in die dritte Stelle gesetzt. Alle übrigen gegebenen Größen kommen in die erste und zweyte Stelle, und zwar je zwey und zwey derselben, die von einerley Art sind, in ein Verhältniß, die verschiedenen Verhältnisse aber werden so unter einander geordnet, daß die gleichnamigen Glieder unter einander zu stehen kommen. Alsdann werden alle diese Verhältnisse in eines zusammengezogen, indem man ihre gleichnamigen Glieder zusammen multiplizirt, und dadurch wird die ganze Rechnung auf eine Regel de *tri* zurückgebracht.

358. Um in der Anordnung der Glieder eines jeden Verhältnisses nicht zu fehlen — da es einen wesentlichen Unterschied ausmacht, welches von beyden in die erste oder in die zweyte Stelle gesetzt wird — muß man bey jedem Verhältniß insbesondere überlegen, ob das vierte Glied, *in sofern es von diesem Verhältniß abhängig ist*, größer oder kleiner werden müßte, als das dritte, und hiernach, wie oben bey der Regel de tri (338.), die Glieder des Verhältnisses ordnen.

1. Es sey z. B. folgende Aufgabe gegeben: Wenn 15 Leinweber in 14 Tagen 10 Stück Leinwand, jedes zu 75 Ellen fertig bringen; in welcher Zeit können 24 Leinweber 16 St. Leinw. jedes zu 60 Ellen verfertigen? — so ist der Ansatz:

$$\left.\begin{array}{l} 24\ \text{L.} : 15\ \text{L.} \\ 10\ \text{St.} : 16\ \text{St.} \\ 75\ \text{E.} : 60\ \text{E.} \end{array}\right\} = 14\ \text{T.} : x.$$

und hieraus entsteht durch die Zusammensetzung folgende Regel de tri:

$$18000 : 14400 = 14 : x.$$

2. Bevor man aber die Zusammensetzung zu Stande bringt, kann man die Zahlen in der ersten Stelle gegen die in der zweyten und dritten gegen einander aufheben, aus eben dem Grunde wie in der Regel de tri (338, 3). Dadurch erhält man das zusammengesetzte Verhältniß in kleinern Zahlen. Hier z. B. wird die Regel de tri

$$5 : 4 = 14 : x$$

und daher ist $x = 56 : 5 = 11\frac{1}{5}$ Tage.

3. Eigentlich wäre die vollständige Auseinandersetzung dieser Aufgabe folgende:

$$24 : 15 = 14 : z$$
$$10 : 16 = z : y$$
$$75 : 60 = y : x$$

d. h. 1) wenn 15 Leinweb. zu 10 Stück Leinw. von 75 Ellen 14 Tage brauchen, wie viel Tage brauchen 24 Leinw. dazu? Antw. z T.

2) Wenn 24 L. zu 10 St. L. von 75 Ellen z Tage brauchen, wie viel Tage brauchen sie zu 16 St. von eben so viel Ellen? Antw. y T.

3) Wenn 24 L. zu 16 St. L. von 75 Ellen y Tage brau-

chen, wie viel Tage brauchen sie zu eben so viel Stücken von 60 Ellen? Antw. x Tage.

Man könnte also die Aufgabe auch durch drey verschiedene Rechnungen der Regel de tri auflösen: oder bey der Zusammensetzung der drey Proportionen in eine, x gegen x, und y gegen y aufheben; dafür ist es aber freylich kürzer, das andere Verfahren zu gebrauchen.

359. Ein gutes Mittel sich bey Aufgaben dieser Art vor einem Fehler zu hüten, gewährt ein vorläufiger Ansatz von folgender Art. Es zerfällt nehmlich eine jede solche Aufgabe in zwey Theile, die Voraussetzung und die Frage, die beyde einerley Arten von Größen enthalten. Man ordne also die in dem ersten Theil enthaltenen Größen in eine Reihe, und unter diese die Größen des zweyten Theils, so, daß immer gleichartige Größen unter einander zu stehen kommen; die gesuchte Größe wird mit x bezeichnet. Durch diese Zusammenstellung aller zur Rechnung erforderlichen Größen, die eben den vorläufigen Ansatz ausmacht, wird es leicht die ganze Rechnung mit einem Blick zu übersehen. Alsdann gehören immer zwey unter einander stehende Glieder zu einem Verhältniß, und zwar die, welche das x enthalten, in das letzte Verhältniß, oder in die dritte und vierte Stelle. Bey jedem der übrigen Paare hat man nur zu überlegen, ob die Größen von der Art sind, daß sie mit denen des dritten und vierten Gliedes in gerademor oder verkehrtem Verhältnisse (336. 1.) stehen; ist das erstere, so muß das obere Glied in die erste, und das untere in die zweyte Stelle kommen; ist aber das letztere, so muß das untere Glied in die erste und das obere in die zweyte Stelle gesetzt werden.

Das vorhin angeführte Beyspiel gibt folgenden vorläufigen Ansatz:

L.	T.	St.	Ell.
15	14	10	75
24	x	16	60

360. Eine andere Anwendung macht man von der Zusammensetzung der Proportionen in der sogenannten Kettenregel, einer Rechnungsart, die eigentlich gebraucht wird, das Verhältniß zweyer Arten von Münzen, Maaßen oder Gewichten, aus ihren Verhältnissen gegen andere Arten zu finden. Man muß es dabey so einzurichten suchen, daß die gebrauchten Zwischenglieder sich gegenseitig aufheben. Wie dieses gemeint sey, kann aus folgendem Beyspiel erhellen.

1. Es drücke A, B zwey solche Größen aus, deren Verhältniß zu einander gesucht wird, und C, D, E mögen andere Größen der Art vorstellen; ferner sey

$$m : n = A : C$$
$$o : p = C : D$$
$$q : r = D : E$$
$$s : t = E : B$$

so entsteht durch die Zusammensetzung

$$moqs : nprt = A : B$$

indem die Zwischenglieder C, D, E einander aufheben.

2. Es ist nothwendig, die Rechnung so einzurichten, daß die Größen C, D, E sich gegenseitig aufheben, weil sie als Benennungen von Münzen, Maaßen oder Gewichten, bey der Zusammensetzung der Proportionen gar nicht zusammen multiplizirt werden könnten.

3. Diese Rechnungsart unterscheidet sich von der vorhergenannten regula quinque dadurch, daß hier die Zwischenglieder C, D, E gegeben sind, dort aber, wie in dem oben (358. 3.) angeführten Beyspiele z, y, entweder erst gesucht werden müssen, oder ganz wegbleiben.

361. Gewöhnlicher Weise wendet man bey einer Rechnung der Kettenregel nicht die Zusammensetzung der Proportionen selbst an, sondern man braucht statt der Proportionen die Produkte ihrer äußern und mittlern Glieder, wie es oben (354.) angegeben ist. Man findet dadurch nicht sowohl das Verhältniß der gegen einander verglichenen Größen, als gewisse Mengen von beyden, *welche gleichviel ausmachen* oder einen gleichen Werth ha-

Es sey z. B. 100 in zwey Theile zu theilen, die sich wie 2 : 3 verhalten, so ist der eine $= \frac{100}{5} \cdot 2 = 40$; und der andere $= \frac{100}{5} \cdot 3 = 60$.

366. Man sieht wohl, daß es bey dieser Art der Theilung darauf ankommt, eine Größe in so viele gleiche Theile zu theilen, als die Summe der Verhältnißzahlen Einheiten hat, und von diesen gleichen Theilen so viele auf jeden der gesuchten Theile zu rechnen, als jede der Verhältnißzahlen einzeln genommen, Einheiten hat. So verhält es sich auch, wenn die Größe in mehr als zwey Theile getheilt werden soll.

367. Denn man setze, eine Größe $= a$ solle in vier Theile getheilt werden, die sich zu einander wie die Zahlen k, l, m, n verhalten, und nenne die gesuchten Theile p, q, r, s, so hat man folgendes:

1) $p + q + r + s = a$.

2) $k : l = p : q$
$k : m = p : r$
$k : n = p : s$

Es ist also

$$q = \frac{l}{k} \cdot p;$$

$$r = \frac{m}{k} p$$

$$s = \frac{n}{k} p;$$

folglich ist

$$a = p + \frac{l}{k} p + \frac{m}{k} p + \frac{n}{k} p$$

$$= p + \frac{l+m+n}{k} p = \frac{k+l+m+n}{k} p;$$

folglich

$$p = a : \frac{k+l+m+n}{k} = a \cdot \frac{k}{k+l+m+n} = \frac{a}{k+l+m+n} \cdot k$$

$$q = p \cdot \frac{l}{k} = \frac{a}{k+l+m+n} \cdot \frac{kl}{k} = \frac{a}{k+l+m+n} \cdot l$$

$$r = p \cdot \frac{m}{k} = \frac{a}{k+l+m+n} \cdot \frac{km}{k} = \frac{a}{k+l+m+n} \cdot m$$

$$s = p \cdot \frac{n}{k} = \frac{a}{k+l+m+n} \cdot \frac{kn}{k} = \frac{a}{k+l+m+n} \cdot n.$$

Diese allgemeinen Ausdrücke für p, q, r, s drücken dieselbe Regel aus, die zuerst bey der Theilung in 2 Theile gefunden wurde; und es ist leicht einzusehen, daß sie auch für jede andere Anzahl von Theilen gilt, folglich allgemein ist.

368. Diese Rechnung stellt das Allgemeine der sogenannten Gesellschaftsrechnung dar, die auch den Namen der Gewinn- und Verlustrechnung, ingleichen der Vermischungsrechnung führt, nach der verschiedenen Beschaffenheit der Gegenstände, auf welche sie angewandt wird.

1. Wenn z. B. mehrere Personen sich zu irgend einer Unternehmung in eine Gesellschaft vereinigen, und den Gewinn oder Verlust nach Verhältniß ihrer Beyträge oder des Antheils, den sie daran genommen, insofern dieser durch bestimmte Zahlen ausgedrückt werden kann, unter sich theilen wollen, so wird das, was eine jede erhalten soll, durch diese Rechnung gefunden, indem man die zu theilende Masse durch die Summe der Beyträge (oder überhaupt der Verhältnißzahlen) dividirt und den Quotienten mit den einzelnen Beyträgen der Reihe nach multiplizirt.

2. Sind die Verhältnisse der Bestandtheile einer künstlichen Mischung gegeben, und es soll eine bestimmte Quantität von dieser verfertigt werden, so läßt sich die dazu erforderliche Menge eines jeden Bestandtheils gleichfalls durch diese Rechnung finden.

3. Die Gesellschaftsrechnung führt bey einer gewissen Art der Behandlung noch den Namen der regula falsi: *wenn man nehmlich die gesuchten* Theile nicht geradezu aus

den gegebenen Verhältnissen berechnet, sondern für den ersten Theil eine beliebige Größe annimmt, die falsch seyn kann; nach dieser aber die andern Theile den gegebenen Verhältnissen gemäß bestimmt, und dann zusieht, ob ihre Summe der zu theilenden Größe gleich sey oder nicht. Wäre sie ihr gleich, so hätte man zufällig die wahre Größe des ersten Theils getroffen, und folglich auch die übrigen Theile richtig bestimmt; ist sie ihr aber ungleich, so sind auch alle Theile unrichtig. Man kann aber schließen: so wie sich die falsche Summe zu der wahren (der zu theilenden Größe) verhält, so auch der falsche erste Theil, zu dem wahren ersten Theil; und so findet sich dann dieser durch eine Regel de tri.

Wer etwas geübt ist, und die Verhältnißzahlen aus der Aufgabe selbst abzuleiten versteht, wird nicht zur regula falsi seine Zuflucht nehmen.

Mehr über die Gesellschaftsrechnung s. in meiner Anweis. z. Rechenk. §. 259. ff.

Eilfter Abschnitt.

Von den Progressionen.

369. So wie eine stetige Proportion drey Zahlen verbindet, die so beschaffen sind, daß die zweyte aus der ersten auf eben die Art entsteht, wie die dritte aus der zweyten; so kann man zu diesen eine vierte hinzusetzen, die aus der dritten eben so entsteht, als diese aus der zweyten; ferner eine fünfte, die aus der vierten so entsteht, als diese aus der dritten, und so fort. Auf diese Art erhält man eine Reihe von Zahlen, von denen jede zwey auf einander folgende in gleichem Verhältniß zu einander stehen — und diese nennt man eine Progression.

370. Je nachdem das Verhältniß, welches die verschiedenen Glieder einer solchen Reihe verknüpfet, ein

arithmetiſches, oder ein geometriſches iſt, heißt auch die Progreſſion eine arithmetiſche oder geometriſche.

371. Iſt das zweyte Glied größer als das erſte; folglich auch das dritte größer als das zweyte, u. ſ. f.: ſo heißt die Progreſſion eine ſteigende oder wachſende (progressio adscendens); werden die Glieder aber im Vergleich mit den vorhergehenden immer kleiner, ſo heißt es eine fallende oder abnehmende Progreſſion (prog. descendens).

1. Ein Beyſpiel einer ſteigenden arithmetiſchen Progreſſion gibt ſchon die Reihe der natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 u. ſ. w.

2. Ein Beyſpiel einer ſteigenden geometriſchen iſt folgendes:

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, u. ſ. w.

3. Eine ſteigende Reihe rückwärts genommen macht eine fallende aus.

Von der arithmetiſchen Progreſſion insbeſondere.

372. Eine arithmetiſche Progreſſion iſt durch das erſte Glied, durch den Unterſchied des erſten und zweyten Gliedes, und durch die Anzahl der Glieder beſtimmt.

Es ſey z. B. das erſte Glied 5, der Unterſchied 3, und die Anzahl der Glieder 10, ſo iſt die Reihe folgende:

5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, 32.

Muß man den Unterſchied von jedem Gliede abziehen um das nächſtfolgende zu erhalten, ſo entſteht eine fallende Progreſſion. Man kann alsdann auch den Unterſchied als negativ betrachten.

373. Um eine ſolche Reihe auf eine allgemeine Art darzuſtellen, ſetze man das erſte Glied $= a$, und den Unterſchied $= \pm d$. Alsdann iſt

1stes Gl. 2s Gl. 3s 4s 5s 6s

$a,\ a \pm d,\ a \pm 2d,\ a \pm 3d,\ a \pm 4d,\ a \pm 5d,$

etc.

374. Hier zeigt sich, daß jedes Glied, das erste ausgenommen, aus zwey Theilen besteht, nehmlich: aus dem ersten Gliede und einem Produkt der Differenz mit einer Zahl, die um 1 kleiner ist, als die Anzahl des Gliedes. Das Produkt wird bey einer steigenden Reihe zu dem ersten Gliede hinzuaddirt, und bey einer fallenden von demselben abgezogen.

375. Setzt man also die Zahl, wodurch die Stelle eines Gliedes in der Progression bezeichnet wird, $= n$, so ist das Glied selbst $= a \pm (n - 1)\, d$.

Dieser Ausdruck heißt das allgemeine Glied der arithmetischen Reihe. Denn man kann darnach ein jedes Glied einer solchen Reihe außer der Ordnung finden, sobald man für a, d und n bestimmte Zahlen setzt.

Es sey z. B. $a = 9$, $d = 4\frac{1}{2}$, $n = 13$, so ist das 13te Glied der Reihe $= 9 + \frac{9}{2} \cdot 12 = 63$.

In einer fallenden Reihe sey $a = 125$, $d = 5$, $n = 16$, so ist das 16te Glied der Reihe $= 125 - 5 \cdot 15 = 50$.

376. Wenn man das nte Glied einer Reihe als das letzte derselben betrachtet, und es $= z$ setzet, so ist

$$z = a \pm (n - 1)\, d.$$

377. Hieraus lassen sich auch allgemeine Ausdrücke für a, d und n finden. Es ist nehmlich

$$a = z \mp (n - 1)\, d$$

$$d = \frac{z - a}{n - 1} \text{ oder,}$$

bey einer fallenden Reihe $= \frac{a - z}{n - 1}$

$$n = \frac{z - a}{d} + 1 \text{ oder,}$$

bey einer fallenden Reihe $= \frac{a - z}{d} + 1.$

Wenn alſo von den vier Stücken a, d, n, z einer arithmetiſchen Progreſſion je drey gegeben ſind, ſo läßt ſich immer das vierte daraus finden.

378. Wenn man das erſte und letzte Glied einer arithmetiſchen Reihe, ferner das zweyte und vorletzte, alsdann das dritte von vorne herein und das dritte vom Ende, und ſo fort, je zwey Glieder, die von beyden Enden gleich weit entfernt liegen, zuſammenaddirt, ſo ſind die Summen alle einander gleich.

379. Der Grund davon ergibt ſich leicht aus obiger allgemeinen Darſtellung einer ſolchen Reihe.

Es iſt daſelbſt $a + (a \pm 5\,d) = (a \pm d) + (a \pm 4\,d) = (a \pm 2\,d) + (a \pm 3\,d) = 2a \pm 5\,d$.

Betrachtet man die Reihe als ſteigend, ſo iſt das zweyte Glied zwar um d größer, als das erſte, aber dafür das vorletzte um d kleiner als das letzte; eben ſo iſt das dritte zwar um d größer als das zweyte, aber dafür das dritte vom Ende um d kleiner, als das vorletzte; und ſo geht es fort: ſo viel das mte Glied auf der einen Seite gegen das $(m-1)$ſte gewinnt, ſo viel verliert das mte Glied auf der andern Seite gegen das $(m-1)$ſte daſelbſt. Daher müſſen die Summen ſolcher Glieder immer gleich ſeyn.

Bey einer fallenden Reihe verhält es ſich eben ſo, daß das, was die Glieder auf der einen Seite gegen einander gewinnen, ſie auf der andern wieder verlieren, nur mit dem Unterſchiede, daß ſie von vorne herein immer kleiner, vom Ende an gerechnet aber immer größer werden.

380. Wenn eine Reihe n Glieder hat, ſo ſind die Glieder von gleicher Summe, das 1ſte und nte; das 2te und $(n-1)$ſte; das 3te und $(n-2)$te; .... das mte und $(n-(m-1))$te. Die Summe zweyer ſolcher Glieder iſt $= 2a \pm (n-1)\,d$.

381. In einer Reihe von n Gliedern finden $\frac{n}{2}$ Verbindungen von Gliedern gleicher Summe statt, und da jede dieser Summen $= 2a \pm (n-1)d$ ist, so ist die Summe aller dieser Summen oder die Summe der ganzen Reihe $= \frac{n}{2} \cdot (2a \pm (n-1)d) = an \pm \frac{n \cdot (n-1)}{2} d$.

Man kann also aus dem ersten Gliede, aus dem Unterschiede, und aus der Anzahl der Glieder die Summe der ganzen Reihe finden.

382. Da das letzte Glied, $z = a \pm (n-1)d$ ist, so ist $2a \pm (n-1)d = a + z$; folglich kann die Summe der ganzen Reihe auch durch $\frac{n}{2} \cdot (a+z)$ ausgedrückt werden, d. h. sie ist gleich der Summe des ersten und letzten Gliedes multiplizirt mit der halben Anzahl der Glieder.

383. Man setze die Summe der ganzen Reihe $= s$, so ist

$$s = an \pm \frac{n \cdot (n-1)}{2} d \text{ oder}$$

$$= (a + z) \cdot \frac{n}{2}.$$

In dem erstern Ausdruck für s gilt das Zeichen + bey der steigenden, das Zeichen — bey der fallenden Reihe.

384. Die Summe s macht die fünfte Größe aus, die man nebst den obigen vieren, a, d, n und z, als vorzügliche Stücke einer arithmetischen Progression anzusehen hat.

385. Wenn von diesen fünfen je drey Stücke gegeben sind, so können die andern beyden daraus gefunden werden.

386. Hierbey sind folgende Fälle möglich:

	Gegeben.			Gesucht.	
1)	a,	d,	n	z,	s
2)	a,	d,	z	n,	s
3)	a,	d,	s	n,	z
4)	a,	n,	z	d,	s
5)	a,	n,	s	d,	z
6)	a,	z,	s	d,	n
7)	d,	n,	z	a,	s
8)	d,	n,	s	a,	z
9)	d,	z,	s	a,	n
10)	n,	z,	s	a,	d

Unter diesen Fällen führt die Auflösung von Nr. 3 und auf eine sogenannte quadratische Gleichung, von ren Behandlungsart erst weiter unten die Rede ist. Die rigen Fälle werden durch eine einfache Gleichung aufgelöst.

---

on der geometrischen Progression insbe- sondere.

387. Der Exponent des Verhältnisses, welches zwi- en je zwey auf einander folgenden Gliedern einer geo- etrischen Progression statt findet, heißt der Exponent r Progression überhaupt.

388. Eine geometrische Progression wird durch das ste Glied, durch den Exponenten und durch e Anzahl der Glieder bestimmt.

Es sey z. B. das erste Glied 2, der Exponent 3, die zahl der Glieder 8, so ist die Reihe folgende:

2, 6, 18, 54, 162, 486, 1458, 4374.

389. Ist der Exponent ein eigentlicher Bruch, wird die Reihe eine fallende.

390. *Allgemein* läßt sich die geometrische Progres-

ben, wobey wiederum die gebrauchten Zwischenglieder, als gleiche Factoren auf beyden Seiten, sich gegen einander aufheben.

Das vorige Exempel wird hiernach auf folgende Art angesetzt:

$$nA = mC$$
$$pC = oD$$
$$rD = qE$$
$$tE = sB$$

Multiplizirt man hier die unter einander stehenden Produkte auf beyden Seiten des Gleichungszeichens — nachdem man vorher die gleichen Factoren gegen einander aufgehoben hat — so erhält man

$$nprtA = moqsB$$

Dasselbe gibt die vorhin gefundene Proportion, wenn man die äußeren und mittleren Glieder derselben zusammen multiplizirt.

362. Wenn das Verhältniß zweyer Größen zu einander gefunden ist, oder wenn man weiß, wie viel eine gewisse Menge der einen Art in Größen der andern Art ausmacht, so ist eine bloße Regel de tri hinreichend, eine jede gegebene Menge der einen Art in Größen der andern Art überzutragen. Man kann aber auch diese Rechnung unmittelbar mit der Kettenregel in Verbindung bringen, wodurch der Gebrauch derselben sich noch mehr erweitert.

Wenn man z. B. wissen wollte, wie viel b Stücke von A in Stücken von B ausmachen, und man setzte die Anzahl der letztern = x, so könnte man entweder den obigen Proportionen (360. 1.) noch die Proportion

$$b : x = B : A$$

beyfügen; wo sich dann bey der Zusammensetzung derselben alle Glieder in der dritten und vierten Stelle gegen einander aufheben, folglich das Verhältniß 1 : 1 geben würden; oder man könnte zu den Produkten (361.) noch die Produkte $xB = bA$ hinzusetzen; alsdann heben, beym Zusammenmultipliziren derselben, alle mit den großen Buchstaben bezeich-

neten Größen sich gegen einander auf, und man erhält $nprtx = moqsb$, folglich

$$x = \frac{moqsb}{nprt}.$$

(Ein mehreres über den praktischen Gebrauch der Kettenregel, so wie über die regula quinque s. in meiner Anweis. z. Rechenk. §. 244 ff. und 254 ff.)

363. Wenn eine Größe in mehrere Theile getheilt werden soll, die sich unter einander wie gewisse gegebene Zahlen verhalten, so kann man sich vorstellen, es wäre die Summe der Theile und ihr gegenseitiges Verhältniß gegeben, man soll daraus die Theile selbst finden.

364. Um diese Aufgabe aufzulösen, setze man zuerst, die Größe solle nur in 2 Theile getheilt werden. Die Größe sey $= a$, und das Verhältniß ihrer Theile $= m : n$.

Die beyden gesuchten Theile nenne man p und q; so daß $p + q = a$ ist. Es wird also

$$m : n = p : q$$

seyn; folglich $q = \frac{np}{m}$. Da nun $p + q = a$ ist, so ist auch $p + \frac{np}{m} = a$; d. i. $\frac{mp+np}{m} = a$, oder $\frac{m+n}{m} p = a$; folglich $p = a : \frac{m+n}{m} = a \cdot \frac{m}{m+n} = \frac{am}{m+n} = \frac{a}{m+n} \cdot m$; und $q = \frac{np}{m} = \frac{n}{m} \cdot \frac{am}{m+n} = \frac{a}{m+n} \cdot n$.

365. Man muß also die Größe a durch die Summe der Verhältnißzahlen, m und n, dividiren, und den Quotienten $\left(\frac{a}{m+n}\right)$ mit jeder der Verhältnißzahlen insbesondere multipliziren, so bekommt man die gesuchten *Theile.*

Es sey z. B. 100 in zwey Theile zu theilen, die sich wie 2 : 3 verhalten, so ist der eine $= \frac{100}{5} \cdot 2 = 40$; und der andere $= \frac{100}{5} \cdot 3 = 60$.

366. Man sieht wohl, daß es bey dieser Art der Theilung darauf ankommt, eine Größe in so viele gleiche Theile zu theilen, als die Summe der Verhältnißzahlen Einheiten hat, und von diesen gleichen Theilen so viele auf jeden der gesuchten Theile zu rechnen, als jede der Verhältnißzahlen einzeln genommen, Einheiten hat. So verhält es sich auch, wenn die Größe in mehr als zwey Theile getheilt werden soll.

367. Denn man setze, eine Größe $= a$ solle in vier Theile getheilt werden, die sich zu einander wie die Zahlen k, l, m, n verhalten, und nenne die gesuchten Theile p, q, r, s, so hat man folgendes:

1) $p + q + r + s = a$.
2) $k : l = p : q$
   $k : m = p : r$
   $k : n = p : s$

Es ist also

$$q = \frac{l}{k} \cdot p;$$

$$r = \frac{m}{k} p$$

$$s = \frac{n}{k} p;$$

folglich ist

$$a = p + \frac{l}{k} p + \frac{m}{k} p + \frac{n}{k} p$$

$$= p + \frac{l+m+n}{k} p = \frac{k+l+m+n}{k} p;$$

folglich

$$= a : \frac{k+l+m+n}{k} = a \cdot \frac{k}{k+l+m+n} = \frac{a}{k+l+m+n} \cdot k$$

$$= p \cdot \frac{l}{k} = \frac{a}{k+l+m+n} \cdot \frac{kl}{k} = \frac{a}{k+l+m+n} \cdot l$$

$$= p \cdot \frac{m}{k} = \frac{a}{k+l+m+n} \cdot \frac{km}{k} = \frac{a}{k+l+m+n} \cdot m$$

$$= p \cdot \frac{n}{k} = \frac{a}{k+l+m+n} \cdot \frac{kn}{k} = \frac{a}{k+l+m+n} \cdot n.$$

Diese allgemeinen Ausdrücke für p, q, r, s drücken eselbe Regel aus, die zuerst bey der Theilung in 2 Theile funden wurde; und es ist leicht einzusehen, daß sie ich für jede andere Anzahl von Theilen gilt, folglich lgemein ist.

368. Diese Rechnung stellt das Allgemeine der so nannten Gesellschaftsrechnung dar, die auch den amen der Gewinn- und Verlustrechnung, ingleichen der Vermischungsrechnung führt, nach er verschiedenen Beschaffenheit der Gegenstände, auf elche sie angewandt wird.

1. Wenn z. B. mehrere Personen sich zu irgend einer nternehmung in eine Gesellschaft vereinigen, und den Geinn oder Verlust nach Verhältniß ihrer Beyträge oder des ntheils, den sie daran genommen, insofern dieser durch bestimmte Zahlen ausgedrückt werden kann, unter sich theilen ollen, so wird das, was eine jede erhalten soll, durch diese echnung gefunden, indem man die zu theilende Kasse durch die Summe der Beyträge (oder überaupt der Verhältnißzahlen) dividirt und den Quotienten mit den einzelnen Beyträgen der Reihe nach multiplizirt.

2. Sind die Verhältnisse der Bestandtheile einer künstlichen Mischung gegeben, und es soll eine bestimmte Quantität von dieser verfertigt werden, so läßt sich die dazu erforderliche Menge eines jeden Bestandtheils gleichfalls durch diese Rechnung finden.

3. Die Gesellschaftsrechnung führt bey einer gewissen Art der Behandlung noch den Namen der regula falsi: wenn man nehmlich die gesuchten Theile nicht geradezu aus

den gegebenen Verhältnissen berechnet, sondern für den ersten Theil eine beliebige Größe annimmt, die falsch seyn kann; nach dieser aber die andern Theile den gegebenen Verhältnissen gemäß bestimmt, und dann zusieht, ob ihre Summe der zu theilenden Größe gleich sey oder nicht. Wäre sie ihr gleich, so hätte man zufällig die wahre Größe des ersten Theils getroffen, und folglich auch die übrigen Theile richtig bestimmt; ist sie ihr aber ungleich, so sind auch alle Theile unrichtig. Man kann aber schließen: so wie sich die falsche Summe zu der wahren (der zu theilenden Größe) verhält, so auch der falsche erste Theil, zu dem wahren ersten Theil; und so findet sich dann dieser durch eine Regel de tri.

Wer etwas geübt ist, und die Verhältnißzahlen aus der Aufgabe selbst abzuleiten versteht, wird nicht zur regula falsi seine Zuflucht nehmen.

Mehr über die Gesellschaftsrechnung s. in meiner Anweis. z. Rechenk. §. 259. ff.

Eilfter Abschnitt.

Von den Progressionen.

369. So wie eine stetige Proportion drey Zahlen verbindet, die so beschaffen sind, daß die zweyte aus der ersten auf eben die Art entsteht, wie die dritte aus der zweyten; so kann man zu diesen eine vierte hinzusetzen, die aus der dritten eben so entsteht, als diese aus der zweyten; ferner eine fünfte, die aus der vierten so entsteht, als diese aus der dritten, und so fort. Auf diese Art erhält man eine Reihe von Zahlen, von denen jede zwey auf einander folgende in gleichem Verhältniß zu einander stehen — und diese nennt man eine Progression.

370. Je nachdem das Verhältniß, welches die verschiedenen Glieder einer solchen Reihe verknüpfet, ein

rithmetisches, oder ein geometrisches ist, heißt auch die Progression eine arithmetische oder geometrische.

371. Ist das zweyte Glied größer als das erste; lglich auch das dritte größer als das zweyte, u. s. f.: heißt die Progression eine steigende oder wachsene (progressio adscendens); werden die Glieder aber n Vergleich mit den vorhergehenden immer kleiner, so eißt es eine fallende oder abnehmende Progression prog. descendens).

1. Ein Beyspiel einer steigenden arithmetischen Proression gibt schon die Reihe der natürlichen Zahlen 1, 2, , 4, 5 u. s. w.

2. Ein Beyspiel einer steigenden geometrischen ist folendes:

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, u. s. w.

3. Eine steigende Reihe rückwärts genommen macht ine fallende aus.

Von der arithmetischen Progression insbesondere.

372. Eine arithmetische Progression ist durch das rste Glied, durch den Unterschied des ersten und zweyten Gliedes, und durch die Anzahl der Glieder bestimmt.

Es sey z. B. das erste Glied 5, der Unterschied 3, nd die Anzahl der Glieder 10, so ist die Reihe folgende:

5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, 32.

Muß man den Unterschied von jedem Gliede abziehen um das nächstfolgende zu erhalten, so entsteht eine fallende Progression. Man kann alsdann auch den Unterschied als negativ betrachten.

373. Um eine solche Reihe auf eine allgemeine Art darzustellen, setze man das erste Glied = a, und den Unterschied = $\pm d$. Alsdann ist

1stes Gl. 2s Gl. 3s 4s 5s 6s

$a,\ a \pm d,\ a \pm 2d,\ a \pm 3d,\ a \pm 4d,\ a \pm 5d,$

etc.

374. Hier zeigt sich, daß jedes Glied, das erste ausgenommen, aus zwey Theilen besteht, nehmlich: aus dem ersten Gliede und einem Produkt der Differenz mit einer Zahl, die um 1 kleiner ist, als die Anzahl des Gliedes. Das Produkt wird bey einer steigenden Reihe zu dem ersten Gliede hinzuaddirt, und bey einer fallenden von demselben abgezogen.

375. Setzt man also die Zahl, wodurch die Stelle eines Gliedes in der Progression bezeichnet wird, $= n$, so ist das Glied selbst $= a \pm (n - 1)\,d$.

Dieser Ausdruck heißt das allgemeine Glied der arithmetischen Reihe. Denn man kann darnach ein jedes Glied einer solchen Reihe außer der Ordnung finden, sobald man für a, d und n bestimmte Zahlen setzt.

Es sey z. B. $a = 9$, $d = 4\frac{1}{2}$, $n = 13$, so ist das 13te Glied der Reihe $= 9 + \frac{9}{2} \cdot 12 = 63$.

In einer fallenden Reihe sey $a = 125$, $d = 5$, $n = 16$, so ist das 16te Glied der Reihe $= 125 - 5 \cdot 15 = 50$.

376. Wenn man das nte Glied einer Reihe als das letzte derselben betrachtet, und es $= z$ setzet, so ist

$$z = a \pm (n - 1)\,d.$$

377. Hieraus lassen sich auch allgemeine Ausdrücke für a, d und n finden. Es ist nehmlich

$$a = z \mp (n - 1)\,d$$

$$d = \frac{z - a}{n - 1} \text{ oder,}$$

bey einer fallenden Reihe $= \frac{a - z}{n - 1}$

$$n = \frac{z - a}{d} + 1 \text{ oder,}$$

bey einer fallenden Reihe $= \frac{a - z}{d} + 1$.

Wenn also von den vier Stücken a, d, n, z einer arithmetischen Progression je drey gegeben sind, so läßt sich immer das vierte daraus finden.

378. Wenn man das erste und letzte Glied einer arithmetischen Reihe, ferner das zweyte und vorletzte, alsdann das dritte von vorne herein und das dritte vom Ende, und so fort, je zwey Glieder, die von beyden Enden gleich weit entfernt liegen, zusammenaddirt, so sind die Summen alle einander gleich.

379. Der Grund davon ergibt sich leicht aus obiger allgemeinen Darstellung einer solchen Reihe.

Es ist daselbst $a + (a \pm 5\,d) = (a \pm d) + (a \pm 4\,d) = (a \pm 2\,d) + (a \pm 3\,d) = 2a \pm 5d$.

Betrachtet man die Reihe als steigend, so ist das zweyte Glied zwar um d größer, als das erste, aber dafür das vorletzte um d kleiner als das letzte; eben so ist das dritte zwar um d größer als das zweyte, aber dafür das dritte vom Ende um d kleiner, als das vorletzte; und so geht es fort: so viel das mte Glied auf der einen Seite gegen das $(m-1)$ste gewinnt, so viel verliert das mte Glied auf der andern Seite gegen das $(m-1)$ste daselbst. Daher müssen die Summen solcher Glieder immer gleich seyn.

Bey einer fallenden Reihe verhält es sich eben so, daß das, was die Glieder auf der einen Seite gegen einander gewinnen, sie auf der andern wieder verlieren, nur mit dem Unterschiede, daß sie von vorne herein immer kleiner, vom Ende an gerechnet aber immer größer werden.

380. Wenn eine Reihe n Glieder hat, so sind die Glieder von gleicher Summe, das 1ste und nte; das 2te und $(n-1)$ste; das 3te und $(n-2)$te; .... das mte und $(n-(m-1))$te. Die Summe zweyer solcher Glieder ist $= 2a \pm (n-1)\,d$.

381. In einer Reihe von n Gliedern finden $\frac{n}{2}$ Verbindungen von Gliedern gleicher Summe ſtatt, und da jede dieſer Summen $= 2a \pm (n-1)d$ iſt, ſo iſt die Summe aller dieſer Summen oder die Summe der ganzen Reihe $= \frac{n}{2} \cdot (2a \pm (n-1)d) = an \pm \frac{n \cdot (n-1)}{2} d$.

Man kann alſo aus dem erſten Gliede, aus dem Unterſchiede, und aus der Anzahl der Glieder die Summe der ganzen Reihe finden.

382. Da das letzte Glied, $z = a \pm (n-1)d$ iſt, ſo iſt $2a \pm (n-1)d = a + z$; folglich kann die Summe der ganzen Reihe auch durch $\frac{n}{2} \cdot (a+z)$ ausgedrückt werden, d. h. ſie iſt gleich der Summe des erſten und letzten Gliedes multiplizirt mit der halben Anzahl der Glieder.

383. Man ſetze die Summe der ganzen Reihe $= s$, ſo iſt

$$s = an \pm \frac{n \cdot (n-1)}{2} d \text{ oder}$$

$$= (a + z) \cdot \frac{n}{2}.$$

In dem erſtern Ausdruck für s gilt das Zeichen + bey der ſteigenden, das Zeichen — bey der fallenden Reihe.

384. Die Summe s macht die fünfte Größe aus, die man nebſt den obigen vieren, a, d, n und z, als vorzügliche Stücke einer arithmetiſchen Progreſſion anzuſehen hat.

385. Wenn von dieſen fünfen je drey Stücke gegeben ſind, ſo können die andern beyden daraus gefunden werden.

386. Hierbey sind folgende Fälle möglich:

	Gegeben.	Gesucht.
1)	a, d, n	z, s
2)	a, d, z	n, s
3)	a, d, s	n, z
4)	a, n, z	d, s
5)	a, n, s	d, z
6)	a, z, s	d, n
7)	d, n, z	a, s
8)	d, n, s	a, z
9)	d, z, s	a, n
10)	n, z, s	a, d

Unter diesen Fällen führt die Auflösung von Nr. 3 und auf eine sogenannte quadratische Gleichung, von ren Behandlungsart erst weiter unten die Rede ist. Die rigen Fälle werden durch eine einfache Gleichung aufgelöst.

---

on der geometrischen Progression insbe- sondere.

387. Der Exponent des Verhältnisses, welches zwi- ien je zwey auf einander folgenden Gliedern einer geo- etrischen Progression statt findet, heißt der Exponent :r Progression überhaupt.

388. Eine geometrische Progression wird durch das ste Glied, durch den Exponenten und durch e Anzahl der Glieder bestimmt.

Es sey z. B. das erste Glied 2, der Exponent 3, die zahl der Glieder 8, so ist die Reihe folgende:

2, 6, 18, 54, 162, 486, 1458, 4374.

389. Ist der Exponent ein eigentlicher Bruch, wird die Reihe eine fallende.

390. *Allgemein* läßt sich die geometrische Progres-

sion auf folgende Art darstellen — wo a das erste Glied und e den Exponenten bedeutet:

1stes Gl. 2tes Gl. 3s 4s 5s 6s

$a, \quad ae, \quad ae^2, \quad ae^3, \quad ae^4, \quad ae^5$, etc.

391. Hier ist jedes Glied, das erste ausgenommen, ein Produkt des ersten Gliedes mit einer Potenz des Exponenten der Progression. Der Exponent dieser Potenz aber ist immer um 1 kleiner, als die Anzahl des Gliedes.

392. Setzt man also die Zahl, welche die Stelle eines Gliedes in der Progression bezeichnet, $= n$, so ist das Glied selbst $= ae^{n-1}$. Dieser Ausdruck ist das allgemeine Glied der geometrischen Reihe.

1. Man verwechsle diesen Ausdruck nicht mit $(ae)^{n-1}$, d. h. man erhebe nicht das Produkt des ersten Gliedes und des Exponenten auf die $(n-1)$ste Potenz, sondern nur den Exponenten, e, allein, und multiplizire die $(n-1)$ste Potenz desselben mit a.

2. Das allgemeine Glied zeigt uns die Beschaffenheit eines jeden Gliedes einer geometrischen Progression im Allgemeinen; allein um irgend ein Glied außer der Ordnung zu berechnen, gewährt es eben keinen großen Vortheil, wenn man sich nicht etwa noch eines besondern Hülfsmittels, als: Tafeln der Potenzen oder der Logarithmen bedient.

393. Betrachtet man das nte Glied als das letzte einer geometrischen Progression, und setzt es $= z$, so ist

$$z = ae^{n-1}.$$

394. Aus diesem Ausdrucke lassen sich allgemeine Ausdrücke für a, e und n finden. Es ist nehmlich

$$a = z : e^{n-1}$$

$$e = \sqrt[n-1]{(z : a)}.$$

n kann ohne Hülfe der Logarithmen, von denen der folgende Abschnitt handelt, nicht gefunden werden. Schon e kann in vielen Fällen nicht ohne Schwierigkeit anders als mit Logarithmen aufgefunden werden. Der Vollstän-

digkeit wegen also stehe hier nur der allgemeine Ausdruck für n. Es ist nehmlich

$$n = \frac{\log. z - \log. a}{\log. e} + 1.$$

395. Es verhält sich also hier auf eine ähnliche Weise, wie bey der arithmetischen Progression, nehmlich: wenn von den vier Größen a, e, n, z je drey gegeben sind, so läßt sich daraus die vierte finden.

396. Um die Summe einer geometrischen Progression zu finden, setze man zuerst das erste Glied = 1: alsdann ist die Summe der ganzen Reihe von n Gliedern, die wir mit s′ bezeichnen wollen, =

$$1 + e + e^2 + e^3 + e^4 + \ldots\ldots + e^{n-1}.$$

Folglich ist

$$e + e^2 + e^3 + e^4 + \ldots\ldots + e^{n-1} = s' - 1;$$

oder

$$e\,(1 + e + e^2 + e^3 + \ldots\ldots + e^{n-2}) = s' - 1.$$

Hier ist die in Klammern eingeschlossene Reihe der ursprünglichen Reihe weniger dem letzten Gliede derselben gleich, d. i. $= s' - e^{n-1}$. Man erhält also

$$e\,(s' - e^{n-1}) = s' - 1$$

oder $es' - e^n = s' - 1.$

Zieht man hier auf beyden Seiten einmal s′ ab, so bleibt übrig

$$(e - 1)\,s' - e^n = -1.$$

Folglich $(e - 1)\,s' = e^n - 1.$

Folglich $s' = \frac{e^n - 1}{e - 1}$

welches die gesuchte Summe ist.

397. Ist aber das erste Glied der Progression = a, so ist die Summe von n Gliedern derselben, die wir mit $\int$ bezeichnen wollen, =

$$a + ae + ae^2 + ae^3 + ae^4 + \ldots + ae^{n-1}$$

oder es ist

$$a(1 + e + e^2 + e^3 + e^4 + \ldots + e^{n-1}) = \int$$

das heißt

$$as' = \int$$

Folglich

$$\int = a\frac{e^n - 1}{e - 1} = \frac{ae^n - a}{e - 1}.$$

398. Da nun $z = ae^{n-1}$ ist, so kann man auch setzen

$$\int = \frac{ez - a}{e - 1}$$

399. Auch hier lassen sich von den 5 Größen, a, e, n, z und $\int$, je zwey aus den drey übrigen finden. Es sind folglich ebenfalls zehn Fälle möglich, wie bey der arithmetischen Progression, die sich nach obiger Tabelle (386.) angeben lassen, wenn man darin e statt d setzt.

Unter diesen sind auch zwey Fälle, deren Auflösung schwieriger, als die der übrigen ist, nehmlich: wenn e und z aus a, n und $\int$; und wenn a und e aus n, z und $\int$ gefunden werden sollen. Zur Auflösung derselben gehört die Theorie der höhern Gleichungen.

400. Wenn $a = 1$, und $e = 2$ ist, so wird

$$\int = 2^n - 1.$$

401. Ist $e < 1$, folglich ein eigentlicher Bruch, so ist sowohl $e^n - 1$ als $e - 1$ negativ, der Quotient selbst aber positiv (135). In diesem Fall setzt man schicklicher

$$\int = a\frac{1 - e^n}{1 - e}$$

402. Geht in diesem Fall die Reihe ins Unendliche fort, so wird $e^n = 0$ und folglich

$$\int = a\frac{1}{1 - e}.$$

Es sey z. B. $a = 1$, $e = \frac{1}{2}$, so ist die Summe der unendlichen Reihe

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} \text{ &c.} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2.$$

In dem bekannten Schluß, der Achilles genannt, dem zufolge Achilles eine Schildkröte nie einholen könnte, wenn diese vom Anfang einen gewissen Vorsprung hätte, liegt der Irrthum zum Grunde, daß die Summe einer unendlichen abnehmenden Reihe selbst etwas unendlich Großes wäre. Gesetzt Achilles habe eine zehnmal größere Geschwindigkeit als die Schildkröte, und diese sey anfangs 10 Fuß voran, so durchläuft sie 1 Fuß, während Achilles 10 durchläuft, ferner $\frac{1}{10}$ Fuß, während A. 1 F.: ferner $\frac{1}{100}$ F., während A. $\frac{1}{10}$ F. u. s. w. — Hier ist der ganze Raum, den die Schildkröte am Ende der ganzen unendlichen Reihe durchlaufen ist $= 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \text{ꝛc.} = \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{1}{\frac{9}{10}} = \frac{10}{9} =$ $1\frac{1}{9}$ Fuß; und die dazu angewandte Zeit, wenn auf den ersten Fuß auch 1 Minute gerechnet wird, $= 1\frac{1}{9}$ Minute. In dieser Zeit also ist sie vom Achilles, der jede Minute 10 Fuß durchläuft, eingeholt.

403. Zuletzt verdient noch der Fall betrachtet zu werden, wenn $e = 1$ gesetzt wird. Alsdann sind alle Glieder einander gleich. Es sey z. B. $a = 3$, so ist die Reihe

3 3 3 3 3 3 3 ꝛc.

von der niemand zweifeln wird, daß jede zwey auf einander folgende Glieder einerley Verhältniß haben. Die Summe von n Gliedern einer solchen Reihe ist offenbar $= an$. Allein nach dem obigen allgemeinen Ausdruck für $\int$ wäre sie $= a\frac{1^n - 1}{1 - 1} = a\frac{0}{0}$, ein Ausdruck, der nichts entscheidet, indem $\frac{0}{0}$ etwas Unbestimmtes anzeigt, dessen Werth für jeden Fall besonders zu entwickeln ist. Wie man für diesen Fall den wahren Werth der Summe herausbringt, zeigt unter andern Klügel in s. Mathemat. Wörterbuch 2r Th. Art. Geometrische Reihe.

Man kann übrigens dieselbe Reihe auch als eine *arithmetische betrachten*, in welcher der Unterschied der Glie-

der = 0 ist; und wendet man auf sie die obigen allgemeinen Ausdrücke für die Summe einer arithmetischen Reihe an, so ergibt sich sogleich $f = an$.

Zwölfter Abschnitt.

Von den Logarithmen.

404. Wenn das erste Glied einer geometrischen Reihe = 1 ist, so werden alle folgenden Glieder Potenzen des Exponenten der Reihe (396.). Eine solche Reihe ist

$$1, e, e^2, e^3, e^4, e^5, e^6, \ldots$$

405. In dieser Reihe kann ein jedes Glied als ein Glied eines aus dem Verhältniß 1 : e zusammengesetzten Verhältnisses angesehen werden; und wie vielmal das Verhältniß 1 : e zur Zusammensetzung genommen werden muß, zeigt der Exponent der Potenz dieses Gliedes an.

Z. B. das vierte Glied, e^3, entsteht aus der dreyfachen Verbindung des Verhältnisses 1 : e. Denn aus der Zusammensetzung der Verhältnisse

$$\begin{array}{r} 1 : e \\ 1 : e \\ 1 : e \\ \hline 1 : e^3. \end{array}$$

entsteht das Verhältniß

Auf gleiche Weise entsteht e^6 aus der sechsfachen Zusammensetzung des Verhältnisses 1 : e; und so überhaupt e^n aus der nfachen Zusammensetzung dieses Verhältnisses.

406. Insofern nun die Exponenten der Potenzen der verschiedenen Glieder anzeigen, wie vielfach die Zusammensetzung des Grundverhältnisses (1 : e) sey, aus welcher diese Glieder entsprungen sind, heißen sie die Logarithmen dieser Glieder.

Die Benennung kommt von λόγων ἀριθμὸς her, d. i. Anzahl der Verhältnisse, nehmlich, aus welchen das-

jenige Verhältniß zusammengesetzt ist, dem das Glied zugehört, dessen Logarithme diese Anzahl ausdrückt.

407. Die Logarithmen sind also nichts anders als Exponenten von Potenzen, die aber diese Benennung in etwas andrer Beziehung erhalten. Exponent ist eine allgemeine Benennung einer Zahl, die anzeigt, wie vielmal die Einheit mit einer gewissen Zahl (der Wurzel) multiplizirt oder dividirt werden muß, um eine gewisse Größe (die Potenz) zu erzeugen. Logarithme heißt dieselbe Zahl, in Beziehung auf die Potenz, und mit Rücksicht auf ein gewisses Grundverhältniß, oder auf eine Zahl, deren Verhältniß zur Einheit als Grundlage (basis) angenommen wird, und die daher selbst die Grundzahl heißt, und hier dasselbe ist, was dort die Wurzel ist.

Z. B. wenn $5^3 = 125$ ist, so ist 3 der Exponent der Potenz 125, wenn 5 die Wurzel ist; es ist aber auch der Logarithme von 125, insofern 1 : 5 als Grundverhältniß oder 5 als Grundzahl angesehen wird.

408. Ein wesentlicher Unterschied zwischen Exponent und Logarithme findet durchaus nicht statt. Nur braucht man den Ausdruck Exponent da, wo überhaupt von Potenzen die Rede ist, deren Wurzel diese oder jene Größe seyn mag. Logarithmen aber nennt man nur die Exponenten, wenn ihre Potenzen alle aus einerley Wurzel entstanden sind, und besonders in Beziehung auf den Gebrauch, der sich alsdann in den Rechnungen von ihnen machen läßt, und der eben hier erklärt werden soll.

Z. B. wenn $a^x = y$ ist, so nennt man gewöhnlich x den Exponenten von y für die Wurzel a; man kann aber auch x den Logarithmen von y nennen, wenn man a^x als ein Glied einer ähnlichen Reihe wie die obige (404.), $1, a, a^2, a^3, \ldots$ betrachtet, oder sich eine unbestimmte Menge von Potenzen der Zahl a denkt, unter welchen auch a^x ist.

409. Wenn man in der Reihe $1, a, a^2, a^3, \ldots$ einen *bestimmten Werth* für a setzt, so erhalten alle Glie-

der derselben einen bestimmten Werth oder werden durch bestimmte Zahlen ausgedrückt, und die Exponenten von a sind die Logarithmen dieser Zahlen. Man kann aber für a unzählig verschiedene Werthe setzen, folglich für dasselbe Glied der Reihe unzählig verschiedene Zahlen erhalten. Der Exponent eines Gliedes kann daher der Logarithme unzählig verschiedener Zahlen seyn.

Z. B. wenn $a^s = p$ ist, so ist 3 der Logarithme von p; der Werth von p aber ändert sich, so wie sich der Werth von a ändert.

410. Setzt man dagegen p unveränderlich, und $a^x = p$, so muß der Werth von x sich ändern, so oft sich a ändert; immer aber bleibt x der Logarithme von p. Folglich kann dieselbe Zahl unzählig verschiedene Logarithmen haben.

411. Es läßt sich also im Allgemeinen weder bestimmen, welche Zahlen irgend einem bestimmten Logarithmen, noch welcher Logarithme irgend einer bestimmten Zahl zugehöre; sondern es muß erst festgesetzt werden, welche Zahl dabey als Grundzahl anzusehen sey.

412. Wenn man für eine bestimmte Grundzahl die Zahlen, welche die verschiedenen Potenzen derselben ausmachen, und die ihnen zugehörigen Logarithmen berechnet, so erhält man ein logarithmisches System.

413. Jede positive Zahl, die Einheit ausgenommen, kann Grundzahl eines logarithmischen Systems seyn. Es sind daher unzählige verschiedene Systeme möglich.

1. Die Einheit kann deßwegen nicht Grundzahl eines logarithmischen Systems werden, weil alle Potenzen derselben wiederum = 1 sind.

2. Warum negative Zahlen es nicht seyn können, ergibt sich aus §. 417.

414. Man setze die Grundzahl = 2, so gibt die geometrische Reihe

$1, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, 2^7, 2^8, 2^9, 2^{10} \ldots$

folgende Zahlen:

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024 . . .

deren Logarithmen sind:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 . . .

Der Logarithme von 1 ist jederzeit = 0, weil jede Zahl auf die Potenz Null erhoben = 1 ist (215.).

415. Hier stellen die Zahlen 1, 2, 4, 8 . . . mit ihren Logarithmen 0, 1, 2, 3, . . . ein Bruchstück eines logarithmischen Systems dar, dessen Grundzahl 2 ist. Jene Reihe von Zahlen bildet eine geometrische Progression, während diese eine arithmetische ausmacht. Dasselbe findet bey jedem andern logarithmischen Systeme statt.

416. Vergleicht man die Reihe der Zahlen 1, 2, 4, 8 . . . mit der Reihe der natürlichen Zahlen, so sieht man, daß viele von dieser in jener fehlen. Wenn man also das logarithmische System der Grundzahl 2 auf die Art, wie es hier angefangen ist, weiter fortsetzen wollte, so würden sich eine Menge von Zahlen mit ihren Logarithmen nicht darin finden, und es würde in dieser Rücksicht ein sehr lückenhaftes System seyn.

Eben das würde geschehen, wenn man irgend eine andre Zahl zur Grundzahl, und lauter ganze Zahlen zu Exponenten derselben nehmen wollte.

417. Die Brauchbarkeit eines logarithmischen Systems aber hängt davon ab, daß die Glieder der geometrischen Reihe die natürlichen Zahlen in ihrer Ordnung und ohne Lücke darstellen, und jede derselben mit ihrem Logarithmen verbunden sey. Da nun die Glieder der geometrischen Reihe lauter Potenzen der Grundzahl sind, so müssen *in einem logarithmischen* System die natürli-

chen Zahlen als Potenzen einer und ebenderselben Zahl, der Grundzahl, betrachtet und dargestellt werden. Dieß kann aber nicht geschehen, wenn man zu Exponenten der Potenzen nur ganze Zahlen nehmen wollte. Man muß also, zum Theil gebrochene Exponenten gebrauchen. Dann ist es möglich, Potenzen einer jeden Grundzahl zu finden, die wenigstens von den ganzen Zahlen, welche durch sie ausgedrückt werden sollen, nicht sehr verschieden sind. Und sehr kleine Verschiedenheiten können hierbey außer Acht gelassen werden.

1. Durch Potenzen einer negativen Zahl ist es unmöglich, die Reihe der natürlichen Zahlen darzustellen, was für Exponenten man auch gebrauche. Daher kann die Grundzahl nicht negativ seyn.

2. Auch gibt es keine positive Zahl, weder ganze noch gebrochene, die so beschaffen wäre, daß sich aus ihr die Reihe der natürlichen Zahlen vollständig und mit vollkommener Genauigkeit, selbst vermittelst der gebrochenen Exponenten, ableiten ließe; sondern man muß sich begnügen, die meisten Zahlen nur durch Annäherung zu erhalten.

418. Die Art und Weise, wie diese gebrochenen Exponenten gefunden werden, kann hier unerörtert bleiben, da es zum Verständniß des Gebrauchs der Logarithmen nicht erforderlich ist, die Methoden ihrer Berechnung zu kennen; auch die heutzutage gebräuchlichen Methoden Kenntnisse der höhern Mathematik voraussetzen. Indessen wird es nicht überflüssig seyn, ein Paar Worte von dem Verfahren, wodurch man anfangs die Logarithmen berechnete, zu sagen, da dasselbe zwar sehr mühsam in der Ausübung, aber leicht zu verstehen ist. Man nennt es die Methode der Interpolation.

419. Diese besteht darin, daß, wenn man zuerst eine geometrische Reihe, wie die obige (414.), gebildet hat, in welcher die Glieder Potenzen der Grundzahl mit *ganzen* Exponenten sind, man alsdann zwischen zweyen

zunächst auf einander folgenden Gliedern, die in Vergleich mit der Reihe der natürlichen Zahlen eine Lücke zwischen sich übrig lassen, die mittlere Proportionalzahl sucht (332.); ferner zwischen dieser und derjenigen der beyden erstern, zwischen welche die fehlende Zahl, die gesucht wird, fällt, wiederum die mittlere Proportionalzahl. Auf diese Art muß man so lange fortfahren, mittlere Proportionalzahlen zu suchen, bis man auf eine Zahl kommt, die von der fehlenden um ein sehr Kleines, etwa um weniger als $\frac{1}{10000000}$ verschieden ist. Zu gleicher Zeit muß man das arithmetische Mittel (323.) zwischen den Exponenten derjenigen Glieder suchen, zwischen welchen die mittlere Proportionalzahl gesucht worden ist; ferner zwischen diesem und dem Exponenten desjenigen Gliedes, das bey der Aufsuchung der mittlern Proportionalzahl in Betrachtung gezogen werden mußte, wieder das arithmetische Mittel, und so fort, immer das arithmetische Mittel der Exponenten derjenigen Glieder, zwischen denen eine mittlere Proportionalzahl gesucht worden ist. Jedes dieser arithmetischen Mittel macht den Logarithmen der zugehörigen mittlern Proportionalzahl aus; folglich gibt dasjenige Mittel, das auf die mittlere Proportionalzahl fällt, welche für die fehlende Zahl genommen wird, den Logarithmen derselben.

420. Von allen diesen mittlern Proportionalzahlen behält man nur diejenigen, nebst ihren Logarithmen, bey, die an die Stelle der fehlenden ganzen Zahlen gesetzt werden können; die übrigen verwirft man, als unbrauchbar.

421. Dadurch leidet zwar die Vollständigkeit sowohl der geometrischen Reihe der Potenzen, als der arithmetischen ihrer Logarithmen — jene sind nur noch als einzelne Glieder einer geometrischen, und diese als einzelne Glieder einer arithmetischen Progression zu betrachten —

aber in diesem Zustande, in welchem sie einen logarithmischen Canon ausmachen, sind sie brauchbarer, als wenn sie vollständige Progressionen bildeten.

Das Mühsame und Beschwerliche der Interpolations-Methode wird dadurch gemildert, daß man nur die Logarithmen der Primzahlen auf diese Art zu suchen braucht, indem sich daraus die Logarithmen der übrigen Zahlen herleiten lassen.

422. Der Gebrauch der Logarithmen in den Rechnungen gründet sich auf dasjenige, was oben von den Rechnungen mit Potenzen von einerley Wurzel gesagt worden ist (208. ff.). Hiernach sind vier Fälle zu unterscheiden:

423. I. Wenn zwey oder mehrere Zahlen zusammen multiplizirt werden sollen, so braucht man nur die Logarithmen der Zahlen zu addiren, um den Logarithmen des Produkts zu erhalten.

Z. B. man soll aus dem oben dargestellten Bruchstück eines logarithmischen Systems der Grundzahl 2 (414.) die Zahlen 64 und 4 zusammen multipliziren, so addire man ihre Logarithmen 6 und 2; die Summe 8 macht den Logarithmen des Produkts aus. Bey diesem Logarithmen aber findet sich die Zahl 256, folglich ist diese das Produkt von 64 . 4.

Der Beweis hiervon gründet sich darauf, daß, wenn man Potenzen von einerley Wurzel zusammen multipliziren soll, das Produkt eine Potenz derselben Wurzel wird, deren Exponent der Summe der Exponenten der Factoren gleich ist. Es ist $64 = 2^6$, $4 = 2^2$; folglich $64 . 4 = 2^6 . 2^2 = 2^8$. Die Exponenten 6, 2, 8 machen aber die Logarithmen der 6ten, 2ten und 8ten Potenz von 2 aus, folglich muß die Summe der Logarithmen der *Factoren* dem Logarithmen des Produkts gleich seyn.

424. II. Wenn eine Zahl durch eine an-

dere dividirt werden soll, so muß man den Logarithmen des Divisors von dem Logarithmen des Dividendus abziehen, um den Logarithmen des Quotienten zu erhalten.

Z. B. es soll 512 durch 32 dividirt werden, so ziehe man den Logarithmen 5 in obiger Tabelle von dem Logarithmen 9 ab; die Differenz 4 ist der Logarithme des Quotienten, 16.

Denn es ist $512 : 32 = 2^9 : 2^5 = 2^{9-5} = 2^4$ (213.). Die Exponenten 9, 5, 4, aber sind die Logarithmen der 9ten, 5ten und 4ten Potenz von 2; folglich gibt die Differenz der Logarithmen des Dividendus und Divisors den Logarithmen des Quotienten.

425. III. Wenn eine Zahl auf eine Potenz erhoben werden soll, so muß man den Logarithmen der Zahl mit dem Exponenten der Potenz multipliziren, um den Logarithmen der Potenz zu erhalten.

Z. B. es soll 4 auf die 5te Potenz erhoben werden, so multiplizire man den Logarithmen von 4 in obiger Tabelle, nehmlich 2, mit dem Exponenten 5. Das Produkt 10 ist der Logarithme der gesuchten Potenz, 1024.

Denn es ist $4^5 = (2^2)^5 = 2^{10}$ (218.). Die Exponenten 2 und 10 aber sind die Logarithmen von 4 und 1024; folglich findet sich der Logarithme der letztern Zahl, wenn man den Logarithmen der erstern mit dem Exponenten 5 multiplizirt.

Hieraus erklärt sich der obige Ausdruck für die Anzahl (n) der Glieder einer geometrischen Progression (394.). Es war nehmlich $z = ae^{n-1}$;

folglich ist $\log. z = \log. a + (n - 1) \log. e$;

folglich $\log. z - \log. a = (n - 1) \log. e$,

und daher $n - 1 = \frac{\log. z - \log. a}{\log. e}$,

oder $n = \frac{\log. z - \log. a}{\log. e} + 1$.

426. IV. **Wenn man aus einer Zahl die Wurzel ziehen will, so muß man den Logarithmen der Zahl durch den Wurzelexponenten dividiren; der Quotient gibt den Logarithmen der gesuchten Wurzel.**

Z. B. es soll die Cubikwurzel aus 512 gezogen werden, so dividire man den Logarithmen von 512, in obiger Tabelle, nehmlich 9, durch den Wurzelexponenten 3; der Quotient 3 ist der Logarithme der Wurzel, 8.

Denn es ist $\sqrt[3]{512} = \sqrt[3]{2^9} = 2^{\frac{9}{3}}$ (224.). Die Exponenten 9 und $\frac{9}{3} = 3$ aber sind die Logarithmen von 512 und 8. Man findet also den Logarithmen der letztern Zahl, wenn man den Logarithmen der erstern durch 3 dividirt.

427. Die Operationen des Multiplizirens, Dividirens, Potenzirens und Extrahirens sind es also, in denen die Logarithmen sich mit so vielem Vortheil gebrauchen lassen. Hierbey wäre es im Grunde einerley, was für ein logarithmisches System man dazu anwendete, oder was für eine Zahl man zur Grundzahl des Systems machte. Indessen können mancherley andere Rücksichten dem einen System Vorzüge vor dem andern gewähren. So hat man zum Behufe der Integral-Rechnung das System der sogenannten **natürlichen Logarithmen** nöthig gefunden, dessen Grundzahl 2,718 ... — also eine ganze Zahl und ein Bruch — ist. Und eben so hat man zu gewöhnlichem Gebrauch das System eingeführt, dessen Grundzahl die Zahl 10 ist, weil es bey unserm dekadischen Zahlensystem gleichfalls manche Vortheile vor den übrigen hat.

428. Uebrigens haben Logarithmen verschiedener Systeme, die gleichen Zahlen zugehören, einerley Verhältniß zu einander. Es sey z. B. $a^m = p$ und $a^x = u$; *ingleichen* $b^n = p$ und $b^y = u$; so ist $m : n = x : y$.

Denn es ist $a^m = b^n$, folglich $a = b^{\frac{n}{m}}$; ingleichen ist $a^x = b^y$, folglich $a = b^{\frac{y}{x}}$ also ist $b^{\frac{n}{m}} = b^{\frac{y}{x}}$; folglich $\frac{n}{m} = \frac{y}{x}$ und daher $m : n = x : y$.

429. Man kann daher die Logarithmen des einen Systems in die des andern verwandeln, wenn man sie mit einer und ebenderselben (ganzen oder gebrochenen) Zahl, die freylich für jedes System erst zu bestimmen ist, multiplizirt.

430. Erhebt man die Zahl 10 auf ihre Potenzen mit ganzen Exponenten, so erhält man folgende Reihe:

10^0	10^1	10^2	10^3	10^4	10^5	ꝛc.
1	10	100	1000	10000	100000	ꝛc.

Die Logarithmen dieser Zahlen sind der Reihe nach 0, 1, 2, 3, 4, 5 ꝛc. Es zeigt sich also, daß die Logarithmen aller Zahlen unter 10 kleiner als 1, die Logarithmen aller Zahlen unter 100 kleiner als 2, die der Zahlen unter 1000 kleiner als 3 u. s. w. sind; und daß nur die Logarithmen der wenigen Zahlen, welche diese Reihe aufstellt, genau ganze Zahlen sind. Bey den Logarithmen der übrigen Zahlen muß man noch zu Brüchen seine Zuflucht nehmen, und diese werden als Decimalbrüche ausgedrückt.

431. Man unterscheidet daher an einem Logarithmen die ganze Zahl und den Bruch, aus welchem er besteht. Die ganze Zahl, wozu man bey den Logarithmen der Zahlen unter 10 auch die Null rechnet, nennt man ihre Kennziffer oder Charakteristik; und den Decimalbruch, die Mantisse.

432. Folglich ist die Kennziffer der Logarithmen aller Zahlen von 1 bis 9 = 0, von 10 bis 99 = 1, von 100 bis 999 = 2, u. s. w. also jedesmal dem Ordnungs-

exponenten der höchsten Ziffer einer Zahl gleich; welche unstreitig eine große Bequemlichkeit in den Rechnunge gewährt. Bey ganzen Zahlen ist die Kennziffer immer u 1 kleiner, als die Anzahl der Ziffern, mit welcher die Za geschrieben wird. Man kann also schon aus der bloß Kennziffer eines Logarithmen erkennen, von welcher Or nung die zugehörige Zahl ist; und umgekehrt, aus d bloßen Anzahl der Ziffern einer Zahl, die Kennziffer d zugehörigen Logarithmen bestimmen.

433. Ferner haben Zahlen, die nur darin von ei ander verschieden sind, daß die eine am Ende keine Nu len hat, die andern aber eine oder mehrere Nullen en halten, einerley Logarithmen, in Absicht auf die Ma tisse, und nur die Kennziffern derselben sind verschiede z. B. die Logarithmen von 8, 80, 800, 8000 sind n in ihren Kennziffern verschieden. Denn da 80 = 8 . 1 ist, so ist der Logarithme von 80 = Log. 8 + Log. 1 Der Logarithme von 10 aber ist = 1; folglich ände sich durch ihn nur die Kennziffer des Log. von 8. A ähnliche Art verhält es sich mit den Logarithmen v 800, 8000.

434. Auch die Logarithmen solcher Zahlen, die ga mit einerley Ziffern geschrieben und nur dadurch von ei ander verschieden sind, daß ein Theil der einen einen D cimalbruch ausmacht, sind in ihrer Mantisse einand gleich, und nur in der Kennziffer verschieden. Z. B. d Logarithmen von 7825 und von 7,825.

Denn 7,825 ist = 7825 : 1000; folglich ist Lo 7,825 = Log. 7825 — Log. 1000; der Log. 1000 ab ist = 3, folglich wird durch ihn nur die Kennziffer de Log. 7825 geändert.

Dieser Umstand sowohl, als der vorher angeführte, gi dem logarithmischen System der Zahl 10 im Gebrauch ein große Bequemlichkeit.

435. Aus dem zuletzt angeführten Beyspiele ergibt sich auch, wie man den Logarithmen eines bloßen Decimalbruchs finden könne. Man betrachtet nehmlich den Decimalbruch als eine ganze Zahl, nimmt den Logarithmen derselben, und zieht von ihm den Logarithmen des dem Decimalbruch zugehörigen Nenners ab. Indessen würde dieß bey einem bloßen Decimalbruch einen negativen Logarithmen geben. Dafür behält man die Logarithmen des Zählers und Nenners selbst bey, und setzt sie mit einem Subtractionszeichen neben einander. Der Nenner eines Decimalbruchs aber ist eine Potenz von 10, daher sein Logarithme eine ganze Zahl. Z. B. es ist Log. 0,3478 = Log. 3478 — Log. 10000 = 3,5413296 — 4. Doch setzt man lieber den Logarithmen des Nenners jederzeit = 10; also den Nenner selbst = 10 000 000 000, und richtet darnach den Logarithmen des Zählers ein. Z. B. Log. 0,3478 = 9,5413296 — 10. Dieß geschieht theils der Gleichförmigkeit, theils der Uebereinstimmung wegen mit den Logarithmen der trigonometrischen Linien. Auf ähnliche Weise ist Log. 0,03478 = 8,5413296 — 10. So kann man sich die negativen Logarithmen ersparen.

Will man den einem solchen Logarithmen zugehörigen Decimalbruch in den Tafeln aufsuchen, so schlägt man die Mantisse unter der Kennziffer 3 auf, und schreibt die dazu gehörige ganze Zahl als einen Decimalbruch, wobey die Differenz zwischen der Kennziffer des Logarithmen und der am Ende abgezogenen Zahl 10 anzeigt, in welcher Stelle der Decimalen der Bruch anfangen müsse.

436. Nach dieser Methode verfährt man auch, wenn man den Logarithmen eines gemeinen eigentlichen Bruchs haben will. Anstatt des negativen Logarithmen, den man eigentlich erhalten müßte, vermehrt man die Kennziffer des Logarithmen des Zählers um 10, zieht darauf den Logarithmen des Nenners von ihm ab, und

fügt der Differenz am Ende — 10 bey. Man erhält auf dieſe Weiſe den Logarithmen des Decimalbruchs, der dem gegebenen Bruche gleich iſt.

1. Z. B. um den Log. $\frac{1}{3}$ zu bekommen, zieht man den Log. 4 (d. i. 0,6020600) von dem Log. 3 (d. i. 0,4771213) ab, nachdem man vorher die Kennziffer des letztern um 10 vermehrt hat. Man erhält alſo 10,4771213 — 0,6020600 = 9, 8750613. Dieſem Logarithmen ſetzt man noch — 10 hinzu. Es iſt alſo Log. $\frac{1}{3}$ = 9,8750613 — 10. Schlägt man dieſen Logarithmen in den Tafeln unter der Kennziffer 3 auf, ſo findet man 7500, und da 9 — 10 = — 1 iſt, ſo fängt der Decimalbruch in der erſten Stelle an, und iſt alſo = 0,7500 . . ., welches = $\frac{1}{3}$ iſt.

2. Negative Logarithmen ſind alſo Logarithmen eigentlicher Brüche, ſo wie auch negative Exponenten der Potenzen Brüche andeuten (197. 202, 3.).

3. Logarithmen negativer Zahlen ſind in einem Syſtem, deſſen Grundzahl poſitiv iſt, unmöglich. Dieß hindert aber nicht, daß man von den Logarithmen auch bey negativen Ausdrücken Gebrauch mache, indem man dieſe einſtweilen als poſitiv betrachtet.

---

437. Um von den Logarithmen den Nutzen in den Rechnungen zu haben, den ſie gewähren können, muß man Tabellen haben, in denen die Zahlen nach ihrer natürlichen Ordnung mit den ihnen zugehörigen Logarithmen auf eine ſchickliche Weiſe aufgeſtellt ſind. Dergleichen Tabellen führen den Namen der logarithmiſchen Tafeln.

438. Die erſten Tafeln dieſer Art hat man dem ſchottländiſchen Baron Johann Neper zu verdanken, der gewöhnlich auch als der Erfinder der Logarithmen angeſehen wird. Zwar hat um eben die Zeit, als Neper, ein Schweizer, Juſtus Byrg, ohne von Nepers Erfindung etwas zu wiſſen, nicht nur den Gedanken zur Verfertigung logarithmiſcher Tafeln (doch ohne dieſen Na-

men zu gebrauchen) gehabt, sondern auch ausgeführt. Aber Byrgs Tafeln erschienen nicht nur später als Nepers, sondern sind auch nie sehr bekannt geworden und in Gebrauch gekommen.

Der Titel des Neperischen Werkes ist: Mirifici Logarithmorum Canonis descriptio etc. Autore et Inventore Joanne Nepero. Edinburgi 1614. 4to.

Byrgs Tafeln führen den Titel: Arithmetische und Geometrische Progreſs Tabulen ꝛc. Gedruckt in der alten Stadt Prag, im Jahre 1620. in 4to.

439. Nepers Logarithmen sind nicht mit den heutzutage gebräuchlichen übereinstimmend. Die ersten dieser Art rühren von dem Engländer Henry Briggs, einem Zeitgenossen Nepers, her, der selbst mit Nepers Zustimmung den Logarithmen diese veränderte Einrichtung gab, und die Zahl 10 zur Grundlage des logarithmischen Systems machte. Daher werden die nach diesem Systeme eingerichteten Logarithmen jetzt noch häufig Briggische Logarithmen genannt.

Das Briggische Hauptwerk erschien 1624 zu London unter dem Titel Arithmetica Logarithmica — und enthält die Logarithmen der Zahlen von 1 bis 20000, und von 90000 bis 100000 bis auf 14 Decimalstellen.

Der ungemeine Vortheil, den die Logarithmen gewähren, machte, daß bald mehrere Ausgaben derselben erschienen. Nach und nach vermehrte sich die Anzahl derselben, vornehmlich im Auslande, beträchtlich. In Deutschland waren sie seltener, bis sie in den neuesten Zeiten vornehmlich durch Schulze's und Vega's Verdienste auch hier mehr verbreitet wurden.

Dem letztern verdankt man mehrere Ausgaben logarithmischer Tafeln, unter denen für Schulen besonders zu empfehlen:

Logarithmisch - trigonometrisches Handbuch, anstatt der kleinen Vlackischen, Wolfischen und andern dergleichen, meistens sehr fehlerhaften Tafeln, für die Mathematikbeflissenen eingerichtet. 13te Aufl. od. 8te Stereotyp. Aufl. Leipz. 1834. kl. 4.

Sehr wohlfeil und doch recht brauchbar sind die kleinen Logarithmischen Tafeln von Moritz von Prasse, Leipz. 1810. kl. 8. — Revidirt und vermehrt von C. B. Mollweide. Ebendas. 1826. 12.

Umständlichere Nachrichten von logarithmischen Tafeln findet man in Kästners astronom. Abhh. II. Samml. S. 1 ff. und in seiner Fortsetzung der Rechenkunst S. 79 ff. Ferner in Scheibels Einleitung zur mathemat. Bücherkenntniß II. Bd. S. 1 ff. und S. 403 ff. — Ingleichen in Murhards Litteratur der mathemat. Wiss. II. Bd. S. 183 ff.

440. Die Einrichtung der Tafeln ist nicht immer einerley, man muß sich daher aus der ihnen gewöhnlich vorgesetzten Einleitung darüber unterrichten, wenn man sie gebrauchen will. Die angeführten logarithmischen Tafeln von Vega sind hinreichend, die Logarithmen der Zahlen bis zu 1000000 zu finden; wie man aber dabey verfahren müsse, wenn die Zahl mit mehr als 4 Ziffern geschrieben wird, lehrt die Einleitung. Eben daselbst ist auch gezeigt, wie man zu einem Logarithmen, der nicht genau in den Tafeln steht, die zugehörige Zahl, und zu einer Zahl, die nicht in den Tafeln steht, den zugehörigen Logarithmen finden könne.

1. Wenn eine Zahl am Ende Nullen hat, und es steht nur der übrige Theil derselben, der nach Wegnahme der Nullen übrig bleibt, in den Tafeln, so braucht man nur die Kennziffer des Logarithmen dieses Theils um so viele Einheiten zu vermehren, als Nullen am Ende stehen, um den Logarithmen der ganzen Zahl zu erhalten. Der Grund davon ergibt sich aus §. 433.

2. Wenn eine Zahl, die nicht in den Tafeln steht, sich in Factoren zerlegen läßt, so kann man die Logarithmen dieser Factoren aufsuchen, und sie zusammenaddiren. Die Summe derselben gibt den Logarithmen der ganzen Zahl.

Dreyzehnter Abschnitt.

Von der Rechnung zusammengesetzter Interessen.

441. Interessen oder Zinsen sind der wirkliche Ertrag eines Capitals; Procente hingegen drücken das Verhältniß der Interessen zum Capital, nach Verlauf eines Jahres, aus.

442. Wenn die Interessen bloß nach der Anzahl der Procente und dem Verhältniß der Zeit zu einem Jahre bestimmt werden, so heißen sie einfache Interessen: werden sie aber nach einer gewissen Zeit selbst als Capital betrachtet und gleichfalls verzinset, so entstehen zusammengesetzte Interessen (usurae simplices und compositae).

443. Einfache Interessen werden durch eine einfache oder zusammengesetzte Regel de tri gefunden; die Berechnung zusammengesetzter Interessen erfordert ein eigenes Verfahren, das hier gelehrt werden soll. Die Logarithmen leisten dabey nicht nur sehr gute Dienste, sondern sind zum Theil unentbehrlich dabey.

444. Man setze, es sey ein Capital = a, es werde zu m Procenten ausgeliehen, die Interessen werden jährlich zum Capital geschlagen; wie groß wird das Capital nach n Jahren seyn?

Zuerst müssen die einfachen jährlichen Interessen eines Capitals = a bestimmt werden, und diese finden sich durch die Regel de tri $100 : a = m : \frac{m}{100} a$. Folglich *macht das Capital nebst* den Interessen am Ende des er-

sten Jahres aus

1) $a + \frac{m}{100} a = \left(1 + \frac{m}{100}\right) a = \frac{100+m}{100} a.$

Dieser Werth sey = b, so ist das Capital am Anfange des zweyten Jahres = b, folglich am Ende desselben, nebst den Interessen, $= b + \frac{m}{100} b = \left(1 + \frac{m}{100}\right) b = \frac{100+m}{100} b.$ Und setzt man in diesen Ausdruck statt b den Werth desselben aus Nr. 1., so macht das Capital mit den Interessen am Ende des zweyten Jahres

2) $\frac{100+m}{100} \cdot \frac{100+m}{100} \cdot a = \left(\frac{100+m}{100}\right)^2 a.$

Dieses sey = c, so ist das Capital nebst den Interessen am Ende des dritten Jahres $= c + \frac{m}{100} c = \left(1 + \frac{m}{100}\right) \cdot c = \frac{100+m}{100} c.$ Und nimmt man für c den Werth desselben aus Nr. 2., so ist das Capital mit den Interessen am Ende des dritten Jahres =

3) $\frac{100+m}{100} \cdot \left(\frac{100+m}{100}\right)^2 \cdot a = \left(\frac{100+m}{100}\right)^3 a.$

Auf diese Weise ergibt sich, daß die Exponenten der Potenzen von $\frac{100+m}{100}$ mit jedem Jahre um 1 wachsen, daß folglich der Werth des Capitals nebst den Interessen am Ende von n Jahren $= \left(\frac{100+m}{100}\right)^n a$ ist. Man setze diesen Werth = x, so hat man den allgemeinen Ausdruck

$$x = \left(\frac{100+m}{100}\right)^n a.$$

445. Wollte man den Betrag der zusammengesetzten Interessen allein wissen, so brauchte man nur von

dem Werthe des Capitals am Ende der n Jahre die unveränderte Größe desselben am Anfange abzuziehen, d. h. die zusammengesetzten Interessen am Ende von n Jahren sind $= x - a$.

1. Es sey $a = 1860$ Rthlr., $m = 5$, $n = 10$, so ist $x = (\frac{105}{100})^{10} \cdot 1860 = 3029{,}74$ Rthlr., d. i. sehr nahe 3029 Rthlr. 18 gl. Die Interessen allein betragen also, ohne die Groschen, 3029 Rthlr. — 1860 Rthlr. = 1169 Rthlr. — Dagegen würden die einfachen Interessen in dieser Zeit nur 930 Rthlr. betragen.

2. Der Unterschied in dem Ertrag eines Capitals bey einfachen und bey zusammengesetzten Interessen wird desto auffallender, je größer die Anzahl der Jahre ist. Z. B. 1 Rthlr. Capital würde zu 5 Proc. in einem Jahre $\frac{1}{20}$ Rthlr. Interessen bringen; folglich in 500 Jahren, bey einfachen Zinsen, $500 \cdot \frac{1}{20} = 25$ Rthlr. Hingegen bey zusammengesetzten Zinsen $\left(\frac{105}{100}\right)^{500} \cdot 1 - 1$ welches über 39323 Millionen Rthlr. ausmacht.

446. Um sich die Rechnung zu erleichtern, gebrauche man Logarithmen. Es ist nehmlich

$$\log. x = \log. a + n\,[\log.(100 + m) - \log. 100].$$

447. Wenn von den vier Größen a, m, n und x je drey gegeben sind, so kann die vierte daraus gefunden werden. Denn es ist

$$1)\ a = x \cdot \left(\frac{100}{100+m}\right)^n;$$

folglich

$$\log. a = \log. x + n\,[\log. 100 - \log.(100 + m)];$$
$$\text{oder} = \log. x - n\,[\log.(100 + m) - \log. 100].$$

Hierdurch findet man den gegenwärtigen Werth eines Capitals, das erst nach n Jahren zahlbar ist.

$$2)\ m = 100 \cdot \sqrt[n]{\left(\frac{x}{a}\right)} - 100.$$

Um in diesem Fall die Logarithmen bequem zu gebrauchen, setze man

$$100 + m = 100 \cdot \sqrt[n]{\left(\frac{x}{a}\right)}.$$

gezogen, gibt den gesuchten Werth des Capitals, den wi
y nennen wollen, $y = \left(\frac{100+m}{100}\right)^n a - \left[\left(\frac{100+m}{100}\right)^n \frac{100\,b}{m} - \frac{100\,b}{m}\right] = \left(\frac{100+m}{100}\right)^n \cdot \left(a - \frac{100\,b}{m}\right) + \frac{100\,b}{m}$.

454. Hieraus ergibt sich ferner

$$a = \left(\frac{100}{100+m}\right)^n \cdot \left(y - \frac{100\,b}{m}\right) + \frac{100\,b}{m}$$

$$b = \frac{(100+m)^n a - 100^n y}{(100+m)^n - 100^n} \cdot \frac{m}{100}$$

$$n = \frac{\log.(my - 100\,b) - \log.(ma - 100\,b)}{\log.(100+m) - \log.100}.$$

Ein allgemeiner Ausdruck für m läßt sich nicht geben, weil die Bestimmung desselben von der Auflösung einer Gleichung vom nten Grade abhängt.

1. Diese Formeln sind allerdings etwas zusammengesetzter, und für die Anwendung der Logarithmen nicht so bequem als die obigen (447.); indessen daß selbst b — für welche Größe der Ausdruck am wenigsten vortheilhaft erscheint — ohne Schwierigkeit hiernach gefunden werden könne, mag ein Beyspiel lehren.

Es sey $a = 8400$; $y = 5260$; $m = 4\frac{1}{2} = 4{,}5$; $n = 12$, so ist

$$b = \frac{104{,}5^{12} \cdot 8400 - 100^{12} \cdot 5260}{104{,}5^{12} - 100^{12}} \cdot \frac{4{,}5}{100}$$

log. $104{,}5^{12}$ = 24,2293956 = log. 169588 . . .
log. 8400 = 3,9242793
28,1536749 = log. 142454[23] . . .
hiervon abgez. $100^{12} \cdot 5260$ = 52600 . . .
89854 . . .
$104{,}5^{12}$ = 169588[19] . . .
abgezogen 100^{12} = 100000 . . .
log. 69588 . . . = 23,8425344
log. 100 = 2,0000000
25,8425344

$\log. 89854^{23} \ldots = 27{,}9535374$

$\log. 4{,}5 \quad = 0{,}6532125$

$28{,}6067499$

abgez. $25{,}8425344$

$2{,}7642155 = \log. 581{,}05 \ldots$

also $b = 581{,}05 \ldots$

2. In dem Fall, daß in dem Ausdruck für n $my - 100b$ und $ma - 100b$ negativ werden, setze man $100b - my$ und $100b - ma$. Denn ein Bruch, dessen Zähler und Nenner negativ ist, ist selbst positiv (135.), und daher $\frac{my - 100b}{ma - 100b} = \frac{100b - my}{100b - ma}$

455. Für den Fall, da das Capital durch die jährlich abgehenden Summen ganz aufgezehrt werden soll, wird $y = 0$, und dann ist

$$\left(\frac{100+m}{100}\right)^n a = \left(\frac{100+m}{100}\right)^n \cdot \frac{100b}{m} - \frac{100b}{m}.$$

Folglich:

$$a = \frac{100b}{m} - \left(\frac{100}{100+m}\right)^n \cdot \frac{100b}{m}$$

$$b = \frac{(100+m)^n a}{(100+m)^n - 100^n} \cdot \frac{m}{100}$$

$$n = \frac{\log. 100b - \log. (100b - ma)}{\log. (100+m) - \log. 100}.$$

Von diesen Rechnungen wird unter andern bey Berechnung von Leibrenten Gebrauch gemacht.

Vierzehnter Abschnitt.

Von den Gleichungen.

456. Aus allem bisher Vorgetragenen erhellet, wie die verschiedenen Theile einer jeden Rechnungsart einander gegenseitig bestimmen, und wie es dadurch möglich wird, *den einen aus den übrigen* zu finden.

457. Alles Rechnen überhaupt besteht darin, au dem Verhältniß, in welchem eine Größe zu einer od mehrern andern steht, die Größe selbst zu finden. D verschiedene Beschaffenheit dieses Verhältnisses gibt d verschiedenen Arten der Rechnungen.

458. Um das Verhältniß einer Größe zu ander zu bestimmen, muß man gewisse Verbindungen der Gr ßen angeben, deren Werthe einander gleich sind.

459. Solche gleichgeltende Verbindungen verschi dener Größen heißen eine Gleichung (aequatio).

460. Jede Gleichung besteht daher aus zwey Thei len (membra), die einander gleich sind; jeder Theil ab kann aus mehrern Gliedern (termini) bestehen.

461. Die verschiedenen Größen einer Gleichun bestimmen einander gegenseitig, das heißt, es ist möglic eine jede derselben aus den übrigen zu finden.

462. Diejenige Größe einer Gleichung, deren Wert aus den übrigen gefunden werden soll, heißt die unbe kannte Größe derselben. Man pflegt diese durch ei nen der letzten Buchstaben des Alphabets, x, oder y oder z, zu bezeichnen; doch ist diese Bezeichnungsart et was ganz Willkührliches, und daher können mancherle Umstände eine Abweichung davon veranlassen.

463. Den Werth der unbekannten Größe aus eine Gleichung herausbringen, d. i. ihn in lauter bekannte Größen ausdrücken, heißt die Gleichung auflösen. Das Verfahren hierzu ist nach der verschiedenen Beschaf fenheit der Gleichung verschieden.

464. Den Werth einer Größe durch Auflösung ei ner Gleichung finden, macht das eigenthümliche Verfah ren der Algebra aus. Die gesuchte Größe wird dabey als gegeben angenommen und erst mit den bekannten Größen in die der Aufgabe gemäße Verbindung gesetzt, alsdann aus diesen entwickelt. Die gemeine Arithmeti

hingegen setzt die unbekannte Größe nicht erst als gegeben voraus, sondern sucht sie unmittelbar, und ist daher auf einfachere Verhältnisse eingeschränkt.

465. Eine Gleichung kann auch mehr als eine unbekannte Größe enthalten, doch ist es alsdann nicht möglich, wie sich weiter unten zeigen wird, einen bestimmten Werth dieser Größen aus einer einzigen Gleichung zu erhalten.

466. Was die Auflösungsart der Gleichungen anbetrifft, so macht es einen wesentlichen Unterschied, ob die unbekannte Größe in der ersten, oder zweyten, oder dritten u. s. w. Potenz dabey vorkommt. Man unterscheidet daher die Gleichungen selbst, nach den Graden der Potenzen der unbekannten Größe, in Gleichungen vom ersten, vom zweyten, vom dritten Grade u. s. w.

467. In dieser Rücksicht ist es einerley, ob die unbekannte Größe gleich von Anfang in einer höhern Potenz in der Gleichung enthalten ist, oder ob sie erst durch den Gang, den die Rechnung zur Auflösung nehmen muß, auf die höhere Potenz gebracht wird. Es läßt sich daher nicht immer auf den ersten Anblick einer Gleichung bestimmen, von welchem Grade sie sey, und es kann wohl geschehen, daß sie Anfangs z. B. als eine Gleichung vom ersten Grade erscheint, indeß sie sich bey weiterer Entwickelung als eine Gleichung vom zweyten oder einem höhern Grade zeigt.

Umgekehrt kann eine Gleichung anfangs höhere Potenzen der unbekannten Größe enthalten, die sich bey der Rechnung selbst so gegen einander aufheben, daß die unbekannte Größe nur in einer Potenz von einem niederern Grade übrig bleibt.

468. *Die Gleichungen* vom ersten Grade heißen

auch einfache, die vom zweyten Grade quadra
ſche, die vom dritten cubiſche Gleichungen.

469. Ein anderer Unterſchied der Gleichungen,
bey ihrer Auflöſung in Betrachtung kommt, betrifft
Anzahl der unbekannten Größen; denn je größer
iſt, deſto weitläuftiger wird die Auflöſung.

Von der Auflöſung einfacher Gleichungen mit
ner unbekannten Größe.

470. Die einfachen Gleichungen erfordern zu i
Auflöſung keine andern Rechnungen als die der vier E
cies in ganzen und gebrochenen Zahlen. Man muß
ſowohl das Verhältniß der einzelnen Theile einer je
dieſer Rechnungsarten, als der Rechnungsarten gegen
ander ſelbſt kennen. In dieſer Rückſicht vergleiche m
was oben (45.) darüber geſagt worden iſt.

471. Bey den Veränderungen, die man mit ei
Gleichung vornimmt, hat man immer darauf zu ſeh
daß die beyden Theile derſelben einander gleich bl
ben. Man kann daher keine Veränderung in dem
nen Theile, ohne eine entſprechende Veränderung in d
andern, vornehmen. Hierbey ſtützt man ſich auf die
kannten Grundſätze, daß Gleiches zu Gleichem add
von Gleichem ſubtrahirt, mit Gleichem multiplizirt, u
durch Gleiches dividirt, Gleiches gibt.

472. Eine Regel, in welcher Ordnung dieſe V
änderungen vorzunehmen ſind, läßt ſich nicht geben; d
muß die Beſchaffenheit der Gleichung beſtimmen. I
Allgemeinen läßt ſich nur ſagen: man muß ſich bem
hen, die unbekannte Größe auf die eine Seite des Gl
chungszeichens, und die bekannten auf die andere Se
deſſelben zu bringen. Wie dieſes geſchehen könne, w
ſich am beſten an einigen Beyſpielen zeigen laſſen.

473. Es sey z. B.

1) $x + a = b$; man ziehe auf beyden Seiten a ab, so erhält man $x = b - a$.

2) $x - a = c$; man addire auf beyden Seiten a, so erhält man $x = c + a$.

Aus beyden Fällen läßt sich die Regel ziehen, daß, wenn eine Größe $= a$ mit der unbekannten $= x$ durch $+$ oder $-$ verbunden ist, man a mit dem entgegengesetzten Zeichen auf die andere Seite setzen müsse.

474. Ueberhaupt kann die Gleichheit beyder Theile einer Gleichung nur bestehen, wenn man bey Versetzung der Glieder von einer Seite nach der andern die Vorzeichen $(+)$ derselben verwechselt.

475. Es sey ferner $ax = d$; man dividire beyde Theile durch a, so erhält man $x = \frac{d}{a}$. Folglich kann man die unbekannte Größe von ihrem Coefficienten befreyen, wenn man die ganze Gleichung durch denselben dividirt.

476. Endlich sey $x : a = f$; man multiplizire beyde Theile durch a, so erhält man $x = af$. Folglich kann man die unbekannte Größe von ihrem Divisor befreyen, wenn man die ganze Gleichung mit demselben multiplizirt.

477. Ist die Verbindung der unbekannten Größe mit den bekannten nicht so einfach, als in den angeführten Beyspielen, so muß man die Entwickelung nach und nach bewerkstelligen. Es sey z. B.

1) $ax + b - c = d$; so ist

1) $ax + b = d + c$

2) $ax = d + c - b$

3) $x = (d + c - b) : a$

2) $\frac{ax}{m} - b = c$; so ist

1) $\frac{ax}{m} = c + b$

2) $ax = (c + b)\, m$

3) $x = \frac{c + b}{a} \cdot m.$

478. Wenn dasjenige Glied der Gleichung, welches x enthält, das negative Vorzeichen hat, so muß man es erst auf die andere Seite mit dem positiven Zeichen setzen, und dann die übrigen Veränderungen vornehmen. Z. B.

$a - \frac{bx}{c} = d.$ Man setze

1) $a = d + \frac{bx}{c}$

2) $a - d = \frac{bx}{c}$

3) $(a - d) \cdot c = bx$

4) $\frac{(a - d) \cdot c}{b} = x$

oder $x = \frac{a - d}{b} \cdot c.$

479. Wenn x in mehr als einem Gliede der Gleichung vorkommt, so hat man 1) darauf zu sehen, ob diese Glieder auf derselben Seite des Gleichungszeichens, oder auf entgegengesetzten Seiten desselben stehen; 2) ob sie gleiche oder ungleiche Vorzeichen haben.

480. Stehen sie auf derselben Seite und ihre Vorzeichen sind gleich, so ziehe man sie in ein einziges Glied zusammen, indem man ihre Coefficienten addirt; und sind die Vorzeichen ungleich, so subtrahire man die Coefficienten der negativen Glieder von den Coefficienten der positiven.

481. Stehen sie auf entgegengesetzten Seiten, so bringe man sie auf eine Seite, und verfahre alsdann *wie vorher*. Es sey z. B.

$ax + \frac{b}{c}x - d = f$; so setze man

1) $\left(a + \frac{b}{c}\right)x = f + d$

2) $\frac{ac + b}{c}x = f + d$

3) $x = (f + d) : \frac{ac + b}{c} = \frac{f + d}{ac + b} . c.$

$\frac{ax}{b} - \frac{cx}{d} + f = g$; so ist

1) $\left(\frac{a}{b} - \frac{c}{d}\right)x = g - f$

2) $\frac{ad - bc}{bd}x = g - f$

3) $x = (g - f) : \frac{ad - bc}{bd} = \frac{g - f}{ad - bc} . bd.$

I. $\frac{ax}{b} + c = d - \frac{x}{f}$; so ist

1) $\frac{ax}{b} + \frac{x}{f} = d - c$

2) $\left(\frac{a}{b} + \frac{1}{f}\right)x = d - c$

3) $\frac{af + b}{bf}x = d - c$

4) $x = (d - c) : \frac{af + b}{bf} = \frac{d - c}{af + b} . bf.$

I. $a - bx = c - \frac{dx}{f}$; so ist

1) $a - c = bx - \frac{dx}{f}$

2) $a - c = \left(b - \frac{d}{f}\right)x = \frac{bf - d}{f}x$

3) $x = (a - c) : \frac{bf - d}{f} = \frac{a - c}{bf - d} . f.$

482. Schon aus dieſen Beyſpielen zeigt ſich, wie man oft bey Auflöſung allgemeiner Gleichungen von den Einſchließungszeichen Gebrauch zu machen habe. Sind freylich anſtatt der Buchſtaben beſtimmte Zahlen gegeben, ſo können die in Klammern einzuſchließenden Größen durch eine einzige Zahl ausgedrückt werden, und dann fällt die Parentheſe weg; doch iſt es auch ſelbſt in dieſem Falle nicht ſelten bequem, die Parentheſen beyzubehalten.

483. Auf der andern Seite geſchieht es oft, daß die unbekannte Größe von Anfang mit bekannten Größen in eine Parentheſe eingeſchloſſen vorkommt: alsdann iſt es nöthig, die Parentheſe aufzulöſen, um die unbekannte Größe von den bekannten trennen zu können. Es ſey z. B.

I. $ax + (b - x)\,c = d$; ſo iſt

1) $ax + bc - cx = d$

2) $ax - cx = d - bc$

3) $(a - c)\,x = d - bc$

4) $x = \frac{d - bc}{a - c}$.

II. $a - bx = (cx + d) : f$; ſo iſt

1) $af - bfx = cx + d$

2) $af - d = cx + bfx = (c + bf)\,x$

3) $x = \frac{af - d}{c + bf}$.

484. Uebrigens iſt noch zu bemerken, daß der Gang, der in den angeführten Beyſpielen zur Auflöſung der Gleichungen genommen iſt, nicht der einzig mögliche überhaupt iſt, ſondern daß man auch durch andere Verbindungen zum Ziele gelangen könnte. Daſſelbe findet bey faſt allen Gleichungen ſtatt, und es iſt für den Anfänger nützlich, die verſchiedenen Wege der Auflöſung, ſowohl bey einzelnen Gleichungen, als bey zuſammengeſetzten

Aufgaben, aufzusuchen; denn Uebung lehrt am beſten den kürzeſten Weg finden.

485. Wollte man fragen, welches diejenigen Gegenſtände ſind, bey deren Berechnung ſich Gleichungen gebrauchen laſſen: ſo iſt die Antwort, daß, da die Gleichungen nur eine gewiſſe Form der Behandlung ausmachen, ſie auf keine beſondern Gegenſtände eingeſchränkt ſind, ſondern überall gebraucht werden können, wo es darauf ankommt, das Verhältniß einer unbekannten Größe zu andern bekannten oder unbekannten zu entwickeln, oder den Werth von jener vermittelſt dieſer auf eine beſtimmte Art auszudrücken.

486. Eine andere Frage aber iſt, wie man aus einer Aufgabe die Gleichung zur Auflöſung derſelben formiren könne. Hierzu läßt ſich wieder keine allgemeine Regel geben; ſondern man muß durch Ueberlegung die in der Aufgabe enthaltenen Data herausſuchen und in die darin beſtimmte Verbindung ſetzen. Dieſer Theil der Operation iſt nicht ſowohl mathematiſch, als logiſch. Eine Gleichung formiren, heißt nichts anders, als, die in der Aufgabe ausgedrückte logiſche Verbindung der zur Rechnung nöthigen Stücke durch mathematiſche Zeichen darſtellen. Man muß alſo die Aufgabe gehörig zu verſtehen ſuchen, und ſich deutlich denken, was eigentlich geſucht werden ſoll, alsdann die angegebenen Data nach und nach und in der Ordnung mathematiſch darſtellen, als die Aufgabe ſie darbietet.

Es würde ſehr unrecht ſeyn, den Anſatz gleich damit anzufangen $x = \ldots$. Vielmehr muß man unbekümmert ſeyn, in welche Verbindung das x ſich fügt, und nur bemüht ſeyn, alle Größen überhaupt in die von der Aufgabe beſtimmte Ordnung und Verbindung zu bringen. Uebung kann auch hier viel thun, aber Ueberlegung iſt immer die *Hauptſache.*

487. Einige Beyspiele mögen zur weitern Erläuterung dienen:

1) 45 soll in zwey Theile getheilt werden, und zwar so, daß, wenn der eine mit 3, und der andere mit 2 multiplizirt wird, die Produkte gleich werden.

Ansatz: Man nenne den einen Theil x, so ist der andere 45 — x; ferner, den einen Theil mit 3 multiplizirt gibt 3 x, und den andern mit 2 multiplizirt, ist 2 (45 — x); und beyde Produkte einander gleich gesetzt, geben die Gleichung 3 x = 2 (45 — x).

Auflösung: 3 x = 2 (45 — x); folglich ist
3 x = 90 — 2 x; ferner
5 x = 90; folglich
x = 90 : 5 = 18.

Hieraus ergibt sich der andere Theil 45 — x = 45 — 18 = 27.

Zur Probe der richtigen Auflösung multiplizire man 18 mit 3, und 27 mit 2, so erhält man gleiche Produkte.

2) 52 soll in zwey Theile getheilt werden, und zwar so, daß, wenn man zu dem einen noch 10 hinzuthut, er eben so groß wird, als wenn man von dem andern 12 wegnimmt.

Ansatz: Der eine Theil sey x, so ist der andere 52 — x; zu jenem 10 hinzugethan, ist x + 10; und von diesem 12 abgezogen, ist 52 — x — 12; beydes einander gleich gesetzt, ist x + 10 = 52 — x — 12.

Auflösung: x + 10 = 52 — x — 12
d. i. x + 10 = 40 — x
folglich 2 x = 40 — 10 = 30
folglich x = 30 : 2 = 15.

Hieraus folgt der andere Theil 52 — x = 52 — 15 = 37.

Probe: 15 + 10 = 25; 37 — 12 = 25; folglich 15 + 10 = 37 — 12.

3) Man zertheile 23 in zwey Theile, so daß wenn man den einen mit 4 und den andern mit 2 multiplizirt, und beyde Produkte zusammenaddirt, 62 herauskomme.

Ansatz: Der eine Theil sey x, so ist der andere 23 — x, multiplizirt man jenen mit 4 und diesen mit 2, so

erhält man 4 x und 2 (23 — x); beyde Produkte addirt, ist 4 x + 2 (23 — x); und dieſes = 62 geſetzt, gibt die Gleichung 4 x + 2 (23 — x) = 62.

Auflöſung: 4 x + 2 (23 — x) = 62

folglich 4 x + 46 — 2 x = 62. Da aber 4 x — 2 x = 2 x iſt, ſo iſt ferner 2 x = 62 — 46 = 16

folglich x = 16 : 2 = 8.

Alſo 23 — x = 23 — 8 = 15.

Probe: 4 . 8 + 2 . 15 = 32 + 30 = 62.

4) Ein Gaſtwirth ſpeiſt ſeine Gäſte an zwey Tafeln: an der einen ſpeiſen 15, an der andern 22 Perſonen; an jener koſtet das Gedeck 3 gl. mehr als an dieſer; die ganze Einnahme von einer Mahlzeit aber macht 15 Rthlr. 18 gl.; wie hoch kam das Gedeck an jeder Tafel?

Anſatz: Das Gedeck an der zweyten Tafel koſte x gl., ſo koſtet das an der erſten (x + 3) gl. Die Einnahme von der erſten Tafel iſt alſo 15 (x + 3) gl.; und von der zweyten 22 x; beydes zuſammen aber macht 15 Rthlr. 18 gl. oder 378 gl. Man erhält alſo die Gleichung 15 (x + 3) + 22 x = 378.

Auflöſung: 15 (x + 3) + 22 x = 378;

d. i. 15 x + 45 + 22 x = 378

folglich 37 x = 378 — 45 = 333

folglich x = 333 : 37 = 9.

Das Gedeck an der zweyten Tafel koſtete alſo 9 gl.: folglich das an der erſten 12 gl.

Probe: 15 . 12 gl. = 180 gl. = 7 Rthlr. 12 gl.; 22 . 9 gl. = 198 gl. = 8 Rthlr. 6 gl.; beydes zuſammen 15 Rthlr. 18 gl.

5) Es kauft jemand 40 Bouteillen weißen und rothen Wein; die Bout. weißen zu 18 gl., die Bout. rothen zu 12 gl.; wie viel Bouteillen muß er von jeder Sorte nehmen, wenn die eine Sorte ſo viel koſten ſoll als die andere?

Anſatz: Die Anzahl der weißen Bout. ſey x, ſo iſt die der rothen = 40 — x; jene koſten zuſammen 18 x gl. dieſe 12 (40 — x) gl., und da die eine Summe ſo viel ausmachen ſoll als die andere, ſo iſt 18 x = 12 (40 — x).

Auflösung: $18x = 12(40 - x) = 480 - 12x$
folglich $30x = 480$
folglich $x = 480 : 30 = 16$.

Hieraus folgt, $40 - x = 40 - 16 = 24$. Es sind also 16 Bout. weißer, und 24 Bout. rother Wein.

Probe: $16 \cdot 18$ gl. $= 288$ gl.; $24 \cdot 12$ gl. $= 288$ gl.; also $16 \cdot 18$ gl. $= 24 \cdot 12$ gl.

6) Wenn 30 Tücher von verschiedenen Sorten, nehmlich: 6 blaue, 7 rothe, 8 grüne und 9 schwarze, zusammen 1530 Rthlr. kosten, und zwar ein rothes 4 Rthlr. weniger als ein blaues, ein grünes 6 Rthlr. weniger als ein rothes, und ein schwarzes 8 Rthlr. weniger als ein grünes; wie viel hat jedes gekostet?

Ansatz: Der Preis eines blauen Tuches sey x Rthlr., so ist der eines rothen $= x - 4$, der eines grünen $= x - 4 - 6 = x - 10$, und der eines schwarzen $= x - 10 - 8 = x - 18$. Ferner kosten

6 blaue	. . .	$6x$
7 rothe	$7(x - 4) =$	$7x - 28$
8 grüne	$8(x - 10) =$	$8x - 80$
9 schwarze	$9(x - 18) =$	$9x - 162$
alle zusammen also kosten	.	$30x - 270$ Rthlr.;

und da der Preis derselben 1530 Rthlr. ist, so ist die Gleichung $30x - 270 = 1530$.

Auflösung: $30x - 270 = 1530$
folglich $30x = 1530 + 270 = 1800$
folglich $x = 1800 : 30 = 60$.

Ein blaues Tuch kostete also 60 Rthlr., ein rothes 56 Rthlr., ein grünes 50 Rthlr. und ein schwarzes 42 Rthlr.

Probe: $6 \cdot 60$ Rthlr. $= 360$ Rthlr.
$7 \cdot 56$ — $= 392$ —
$8 \cdot 50$ — $= 400$ —
$9 \cdot 42$ — $= 378$ —
$= 1530$ Rthlr.

7) Es hinterläßt jemand ein Vermögen, wozu drey Erben sind: der erste bekommt $\frac{3}{10}$ des Vermögens und noch 250 Rthlr.; der zweyte $\frac{4}{15}$ und 210 Rthlr.; der dritte $\frac{2}{7}$ nebst 300 Rthlr.; wie groß war das Vermögen, und wie viel hat jeder bekommen?

Ansatz: Das Vermögen sey = x, so hat
der 1ste Erbe erhalten $\frac{3}{10}x + 250$ Rthlr.
— 2te — — — — $\frac{4}{15}x + 210$ —
— 3te — — — — $\frac{3}{10}x + 300$ —

Dieß ist zusammen $\frac{11}{30}x + 760$ Rthlr. und da
eben das Vermögen ausmacht, so ist $\frac{11}{30}x + 760$ Rthlr.,
= x.

Auflösung: $\frac{11}{30}x + 760$ Rthlr. = x
folglich $760 = x - \frac{11}{30}x = \frac{19}{30}x$
also $x = 760 : \frac{19}{30} = 3600$ Rthlr.

Der erste hat demnach erhalten 1330 Rthlr., der zweyte
170 Rthlr., der dritte 1100 Rthlr.

8) Es gewinnt jemand in der Lotterie eine Summe,
ie noch 10 Rthlr. mehr ist als das dreyßigfache seines
Einsatzes. $\frac{4}{5}$ davon legt er zurück, und von dem Ueber-
est wendet er $\frac{3}{5}$ zu einer kleinen Reise, $\frac{4}{11}$ zu Büchern
n, und behält doch noch 4 Rthlr. übrig. Wie viel hat
r eingesetzt und wie viel gewonnen?

Ansatz: Es sey der Einsatz = x, so ist der Gewinnst
= 30x + 10. Wenn er $\frac{4}{5}$ davon zurücklegt, so bleibt noch
übrig; hiervon $\frac{3}{5}$ machen $\frac{3}{25}$ des Ganzen; und $\frac{4}{11} \cdot \frac{3}{5}$ ma-
hen $\frac{4}{55}$ des Ganzen. Nachdem er also ($\frac{4}{5} + \frac{3}{25} + \frac{4}{55} = \frac{237}{275}$) des Gewinnstes verwendet, bleiben noch 4 Rthlr. übrig.
Dieß gibt die Gleichung $\frac{237}{275}(30x + 10) = 30x + 10 - 4$
$= 30x + 6$.

Auflösung: $\frac{237}{275} \cdot (30x + 10) = 30x + 6$
oder $\frac{237}{275} \cdot 30x + \frac{237}{275} \cdot 10 = 30x + 6$
folglich $\frac{237}{275} \cdot 10 - 6 = 30x - \frac{237}{275} \cdot 30x$
oder $\frac{2730 - 1650}{270} = (1 - \frac{237}{275}) \cdot 30x$
d. i. $\frac{1080}{275} = \frac{38}{275} \cdot 30x = \frac{60}{275}x$
folglich $x = \frac{1080}{275} : \frac{60}{275} = 1080 : 60 = 18$.

Der Einsatz war also 18 Rthlr., folglich der Gewinnst 30.
8 + 10 = 550 Rthlr.

9) Es fragt jemand einen andern, welche Zeit es
ey; und erhält zur Antwort: das Doppelte des Ueber-
estes ist = $\frac{10}{18}$ des verflossenen Tages; welche Zeit war
s? (den Tag von Mitternacht an und zu 24 Stunden
erechnet.)

482. Schon aus diesen Beyspielen zeigt sich, wie man oft bey Auflösung allgemeiner Gleichungen von den Einschließungszeichen Gebrauch zu machen habe. Sind freylich anstatt der Buchstaben bestimmte Zahlen gegeben, so können die in Klammern einzuschließenden Größen durch eine einzige Zahl ausgedrückt werden, und dann fällt die Parentheſe weg; doch ist es auch selbst in diesem Falle nicht selten bequem, die Parentheſen beyzubehalten.

483. Auf der andern Seite geschieht es oft, daß die unbekannte Größe von Anfang mit bekannten Größen in eine Parentheſe eingeschlossen vorkommt: alsdann ist es nöthig, die Parentheſe aufzulösen, um die unbekannte Größe von den bekannten trennen zu können. Es sey z. B.

I. $ax + (b - x)\,c = d$; so ist

1) $ax + bc - cx = d$

2) $ax - cx = d - bc$

3) $(a - c)\,x = d - bc$

4) $x = \frac{d - bc}{a - c}$.

II. $a - bx = (cx + d) : f$; so ist

1) $af - bfx = cx + d$

2) $af - d = cx + bfx = (c + bf)\,x$

3) $x = \frac{af - d}{c + bf}$.

484. Uebrigens ist noch zu bemerken, daß der Gang, der in den angeführten Beyspielen zur Auflösung der Gleichungen genommen ist, nicht der einzig mögliche überhaupt ist, sondern daß man auch durch andere Verbindungen zum Ziele gelangen könnte. Dasselbe findet bey fast allen Gleichungen statt, und es ist für den Anfänger nützlich, die verschiedenen Wege der Auflösung, sowohl bey einzelnen Gleichungen, als bey zusammengesetzten

Aufgaben, aufzusuchen; denn Uebung lehrt am besten den kürzesten Weg finden.

485. Wollte man fragen, welches diejenigen Gegenstände sind, bey deren Berechnung sich Gleichungen gebrauchen lassen: so ist die Antwort, daß, da die Gleichungen nur eine gewisse Form der Behandlung ausmachen, sie auf keine besondern Gegenstände eingeschränkt sind, sondern überall gebraucht werden können, wo es darauf ankommt, das Verhältniß einer unbekannten Größe zu andern bekannten oder unbekannten zu entwickeln, oder den Werth von jener vermittelst dieser auf eine bestimmte Art auszudrücken.

486. Eine andere Frage aber ist, wie man aus einer Aufgabe die Gleichung zur Auflösung derselben formiren könne. Hierzu läßt sich wieder keine allgemeine Regel geben; sondern man muß durch Ueberlegung die in der Aufgabe enthaltenen Data herausſuchen und in die darin bestimmte Verbindung setzen. Dieser Theil der Operation ist nicht sowohl mathematisch, als logisch. Eine Gleichung formiren, heißt nichts anders, als, die in der Aufgabe ausgedrückte logische Verbindung der zur Rechnung nöthigen Stücke durch mathematische Zeichen darstellen. Man muß also die Aufgabe gehörig zu verstehen suchen, und sich deutlich denken, was eigentlich gesucht werden soll, alsdann die angegebenen Data nach und nach und in der Ordnung mathematisch darstellen, als die Aufgabe sie darbietet.

Es würde sehr unrecht seyn, den Ansatz gleich damit anzufangen $x = \ldots$. Vielmehr muß man unbekümmert seyn, in welche Verbindung das x sich fügt, und nur bemüht seyn, alle Größen überhaupt in die von der Aufgabe bestimmte Ordnung und Verbindung zu bringen. Uebung kann auch hier viel thun, aber Ueberlegung ist immer die *Hauptsache.*

487. Einige Beyspiele mögen zur weitern Erläuterung dienen:

1) 45 soll in zwey Theile getheilt werden, und zwar so, daß, wenn der eine mit 3, und der andere mit 2 multiplizirt wird, die Produkte gleich werden.

Ansatz: Man nenne den einen Theil x, so ist der andere 45 — x; ferner, den einen Theil mit 3 multiplizirt gibt 3 x, und den andern mit 2 multiplizirt, ist 2 (45 — x); und beyde Produkte einander gleich gesetzt, geben die Gleichung $3x = 2(45 - x)$.

Auflösung: $3x = 2(45 - x)$; folglich ist
$3x = 90 - 2x$; ferner
$5x = 90$; folglich
$x = 90 : 5 = 18$.

Hieraus ergibt sich der andere Theil $45 - x = 45 - 18 = 27$.

Zur Probe der richtigen Auflösung multiplizire man 18 mit 3, und 27 mit 2, so erhält man gleiche Produkte.

2) 52 soll in zwey Theile getheilt werden, und zwar so, daß, wenn man zu dem einen noch 10 hinzuthut, er eben so groß wird, als wenn man von dem andern 12 wegnimmt.

Ansatz: Der eine Theil sey x, so ist der andere $52 - x$; zu jenem 10 hinzugethan, ist $x + 10$; und von diesem 12 abgezogen, ist $52 - x - 12$; beydes einander gleich gesetzt, ist $x + 10 = 52 - x - 12$.

Auflösung: $x + 10 = 52 - x - 12$
d. i. $x + 10 = 40 - x$
folglich $2x = 40 - 10 = 30$
folglich $x = 30 : 2 = 15$.

Hieraus folgt der andere Theil $52 - x = 52 - 15 = 37$.

Probe: $15 + 10 = 25$; $37 - 12 = 25$; folglich $15 + 10 = 37 - 12$.

3) Man zertheile 23 in zwey Theile, so daß wenn man den einen mit 4 und den andern mit 2 multiplizirt, und beyde Produkte zusammenaddirt, 62 herauskomme.

Ansatz: Der eine Theil sey x, so ist der andere $23 - x$, multiplizirt man jenen mit 4 und diesen mit 2, so

erhält man $4x$ und $2(23-x)$; beyde Produkte addirt, ist $4x+2(23-x)$; und dieſes $=62$ geſetzt, gibt die Gleichung $4x+2(23-x)=62$.

Auflöſung: $4x+2(23-x)=62$

folglich $4x+46-2x=62$. Da aber $4x-2x=2x$ iſt, ſo iſt ferner $2x=62-46=16$

folglich $x=16:2=8$.

Alſo $23-x=23-8=15$.

Probe: $4\cdot 8+2\cdot 15=32+30=62$.

4) Ein Gaſtwirth ſpeiſt ſeine Gäſte an zwey Tafeln: an der einen ſpeiſen 15, an der andern 22 Perſonen; an jener koſtet das Gedeck 3 gl. mehr als an dieſer; die ganze Einnahme von einer Mahlzeit aber macht 15 Rthlr. 18 gl.; wie hoch kam das Gedeck an jeder Tafel?

Anſatz: Das Gedeck an der zweyten Tafel koſte x gl., ſo koſtet das an der erſten $(x+3)$ gl. Die Einnahme von der erſten Tafel iſt alſo $15(x+3)$ gl.; und von der zweyten $22x$; beydes zuſammen aber macht 15 Rthlr. 18 gl. oder 378 gl. Man erhält alſo die Gleichung $15(x+3)+22x=378$.

Auflöſung: $15(x+3)+22x=378$;

d. i. $15x+45+22x=378$

folglich $37x=378-45=333$

folglich $x=333:37=9$.

Das Gedeck an der zweyten Tafel koſtete alſo 9 gl.: folglich das an der erſten 12 gl.

Probe: $15\cdot 12$ gl. $=180$ gl. $=7$ Rthlr. 12 gl.; $22\cdot 9$ gl. $=198$ gl. $=8$ Rthlr. 6 gl.; beydes zuſammen 15 Rthlr. 18 gl.

5) Es kauft jemand 40 Bouteillen weißen und rothen Wein; die Bout. weißen zu 18 gl., die Bout. rothen zu 12 gl.; wie viel Bouteillen muß er von jeder Sorte nehmen, wenn die eine Sorte ſo viel koſten ſoll als die andere?

Anſatz: Die Anzahl der weißen Bout. ſey x, ſo iſt die der rothen $=40-x$; jene koſten zuſammen $18x$ gl. dieſe $12(40-x)$ gl., und da die eine Summe ſo viel ausmachen *ſoll als die andere*, ſo iſt $18x=12(40-x)$.

Auflösung: $18x = 12(40 - x) = 480 - 12x$
folglich $30x = 480$
folglich $x = 480 : 30 = 16$.

Hieraus folgt, $40 - x = 40 - 16 = 24$. Es sind also 16 Bout. weißer, und 24 Bout. rother Wein.

Probe: 16 . 18 gl. = 288 gl.; 24 . 12 gl. = 288 gl.; also 16 . 18 gl. = 24 . 12 gl.

6) Wenn 30 Tücher von verschiedenen Sorten, nehmlich: 6 blaue, 7 rothe, 8 grüne und 9 schwarze, zusammen 1530 Rthlr. kosten, und zwar ein rothes 4 Rthlr. weniger als ein blaues, ein grünes 6 Rthlr. weniger als ein rothes, und ein schwarzes 8 Rthlr. weniger als ein grünes; wie viel hat jedes gekostet?

Ansatz: Der Preis eines blauen Tuches sey x Rthlr., so ist der eines rothen $= x - 4$, der eines grünen $= x - 4 - 6 = x - 10$, und der eines schwarzen $= x - 10 - 8 = x - 18$. Ferner kosten

6 blaue	. . .	$6x$
7 rothe	$7(x - 4) =$	$7x - 28$
8 grüne	$8(x - 10) =$	$8x - 80$
9 schwarze	$9(x - 18) =$	$9x - 162$
alle zusammen also kosten		$30x - 270$ Rthlr.;

und da der Preis derselben 1530 Rthlr. ist, so ist die Gleichung $30x - 270 = 1530$.

Auflösung: $30x - 270 = 1530$
folglich $30x = 1530 + 270 = 1800$
folglich $x = 1800 : 30 = 60$.

Ein blaues Tuch kostete also 60 Rthlr., ein rothes 56 Rthlr., ein grünes 50 Rthlr. und ein schwarzes 42 Rthlr.

Probe: 6 . 60 Rthlr. = 360 Rthlr.
7 . 56 — = 392 —
8 . 50 — = 400 —
9 . 42 — = 378 —
} = 1530 Rthlr.

7) Es hinterläßt jemand ein Vermögen, wozu drey Erben sind: der erste bekommt $\frac{8}{15}$ des Vermögens und noch 250 Rthlr.; der zweyte $\frac{4}{15}$ und 210 Rthlr.; der dritte $\frac{2}{3}$ nebst 300 Rthlr.; wie groß war das Vermögen, und wie viel hat jeder bekommen?

Ansatz: Das Vermögen sey = x, so hat
der 1ste Erbe erhalten $\frac{3}{10}x + 250$ Rthlr.
— 2te — — — $\frac{4}{15}x + 210$ —
— 3te — — — $\frac{3}{5}x + 300$ —

Dieß ist zusammen $\frac{11}{10}x + 760$ Rthlr. und da es eben das Vermögen ausmacht, so ist $\frac{11}{10}x + 760$ Rthlr., = x.

Auflösung: $\frac{11}{10}x + 760$ Rthlr. = x
folglich $760 = x - \frac{11}{10}x = \frac{1}{10}x$
also $x = 760 : \frac{1}{10} = 3600$ Rthlr.

Der erste hat demnach erhalten 1330 Rthlr., der zweyte 1170 Rthlr., der dritte 1100 Rthlr.

8) Es gewinnt jemand in der Lotterie eine Summe, die noch 10 Rthlr. mehr ist als das dreyßigfache seines Einsatzes. $\frac{4}{5}$ davon legt er zurück, und von dem Ueberrest wendet er $\frac{3}{5}$ zu einer kleinen Reise, $\frac{4}{11}$ zu Büchern an, und behält doch noch 4 Rthlr. übrig. Wie viel hat er eingesetzt und wie viel gewonnen?

Ansatz: Es sey der Einsatz = x, so ist der Gewinnst $= 30x + 10$. Wenn er $\frac{4}{5}$ davon zurücklegt, so bleibt noch $\frac{1}{5}$ übrig; hiervon $\frac{3}{5}$ machen $\frac{3}{25}$ des Ganzen; und $\frac{4}{11} \cdot \frac{1}{5}$ machen $\frac{4}{55}$ des Ganzen. Nachdem er also ($\frac{4}{5} + \frac{3}{25} + \frac{4}{55} = \frac{273}{275}$) des Gewinnstes verwendet, bleiben noch 4 Rthlr. übrig. Dieß gibt die Gleichung $\frac{273}{275}(30x + 10) = 30x + 10 - 4 = 30x + 6$.

Auflösung: $\frac{273}{275} \cdot (30x + 10) = 30x + 6$
oder $\frac{273}{275} \cdot 30x + \frac{273}{275} \cdot 10 = 30x + 6$
folglich $\frac{273}{275} \cdot 10 - 6 = 30x - \frac{273}{275} \cdot 30x$
oder $\frac{2730 - 1650}{275} = (1 - \frac{273}{275}) \cdot 30x$
d. i. $\frac{1080}{275} = \frac{2}{275} \cdot 30x = \frac{60}{275}x$
folglich $x = \frac{1080}{275} : \frac{60}{275} = 1080 : 60 = 18$.

Der Einsatz war also 18 Rthlr., folglich der Gewinnst $30 \cdot 18 + 10 = 550$ Rthlr.

9) Es fragt jemand einen andern, welche Zeit es sey; und erhält zur Antwort: das Doppelte des Ueberrestes ist $= \frac{10}{18}$ des verflossenen Tages; welche Zeit war es? (den Tag von Mitternacht an und zu 24 Stunden *gerechnet.*)

Ansatz: Der verflossene Theil des Tags sey = x Stunden, so ist der Ueberrest = (24 — x) Stunden. Das Doppelte des Ueberrestes ist also = 2 (24 — x); und $\frac{1}{3}\frac{9}{}$ des verflossenen Tages = $\frac{1}{3}\frac{9}{}$ x. Die Gleichung ist daher $\frac{1}{3}\frac{9}{}$ x = 2 (24 — x).

Auflösung: $\frac{1}{3}\frac{9}{}$ x = 2 (24 — x)

d. i. $\frac{1}{3}\frac{9}{}$ x = 48 — 2x

folglich 2x + $\frac{1}{3}\frac{9}{}$ x = 48

oder $\frac{1}{3}\frac{9}{}$ x = 48

folglich x = 48 . $\frac{1}{3}\frac{3}{9}$ = 17 $\frac{1}{3}$;

d. h. von Mitternacht an waren 17$\frac{1}{3}$ Stunden verflossen. Es war also 5 Uhr 20 Min. Nachmittags.

10) Zwey Personen sprechen von ihrem Alter, und es findet sich, daß die eine anderthalbmal so alt als die andere ist, und vor 5 Jahren um 10 Jahre weniger als noch einmal so alt, als diese war; wie alt war eine jede?

Ansatz: Das Alter der jüngern Person sey = x, so ist das der ältern = $1\frac{1}{2}$ x = $\frac{3}{2}$ x; vor 5 Jahren war jene (x — 5), und diese ($\frac{3}{2}$ x — 5) Jahre alt; 10 Jahre zu diesem Alter hinzugesetzt, würde es noch einmal so groß als jenes machen; folglich ist ($\frac{3}{2}$ x — 5) + 10 = 2 (x — 5).

Auflösung: ($\frac{3}{2}$ x — 5) + 10 = 2 (x — 5)

d. i. $\frac{3}{2}$ x + 5 = 2x — 10

folglich 5 + 10 = 2x — $\frac{3}{2}$ x

d. i. 15 = $\frac{1}{2}$ x

folglich x = 15 . 2 = 30.

Hieraus folgt das Alter der andern Person = 45 Jahre.

11) Mehrere Personen theilen sich in eine Summe, so daß die erste 120 Rthlr. und $\frac{1}{8}$ des übrigen bekommt; die zweyte 240 Rthlr. und $\frac{1}{8}$ des übrigen; die dritte 360 Rthlr. und $\frac{1}{8}$ des übrigen; und so fort, jede der folgenden Personen immer eine namhafte Summe von 120 Rthlr. mehr und $\frac{1}{8}$ des übrigen. Am Ende findet sich, daß alle gleich viel haben. Wie groß war die Summe, wie viel waren der Personen, und wie viel hat jede bekommen?

Ansatz: Die ganze Summe sey = x, so hat die erste

Person bekommen 120 Rthlr. $+ \frac{1}{8}(x - 120)$, d. i. 120 Rthlr. $+ \frac{1}{8}x - 15$ Rthlr. $= \frac{1}{8}x + 105$ Rthlr.; die zweyte: 240 Rthlr. $+ \frac{1}{8}[x - (\frac{1}{8}x + 105 + 240)]$, d. i. $240 + \frac{1}{8}(x - \frac{1}{8}x - 345) = 240 + \frac{1}{8} \cdot \frac{7}{8}x - \frac{345}{8} = \frac{7}{64}x + \frac{1575}{8}$. Da nun alle gleichviel bekommen haben, so erhält man die Gleichung: $\frac{1}{8}x + 105 = \frac{7}{64}x + \frac{1575}{8}$, woraus sich x finden läßt.

Auflösung: $\frac{1}{8}x + 105 = \frac{7}{64}x + \frac{1575}{8}$

folglich $\frac{1}{8}x - \frac{7}{64}x = \frac{1575}{8} - 105$

d. i. $\frac{1}{64}x = \frac{1575 - 840}{8} = \frac{735}{8}$

folglich $x = \frac{735}{8} \cdot \frac{64}{1} = 5880$.

Hiernach hat die erste Person bekommen $\frac{1}{8} \cdot 5880 + 105 = 840$ Rthlr.; also eben so viel auch die andern. Die Anzahl der Personen aber ist $= 5880 : 840 = 7$.

12) 4200 Rthlr. werden unter 4 Personen vertheilt, so daß die zweyte $\frac{1}{7}$ mehr als die erste, die dritte $\frac{1}{8}$ mehr als die zweyte, und die vierte $\frac{1}{9}$ mehr als die dritte bekommt; wie viel hat jede bekommen?

Ansatz: Nennt man den Antheil der ersten Person x, so ist der der zweyten $x + \frac{1}{7}x = \frac{8}{7}x$; der der dritten $\frac{8}{7}x + \frac{1}{8} \cdot \frac{8}{7}x = \frac{8}{7} + \frac{1}{8}x = \frac{9}{8}x$; der der vierten $\frac{9}{8}x + \frac{1}{9} \cdot \frac{9}{8}x = \frac{9}{8}x + \frac{1}{8}x = \frac{10}{8}x$. Alle zusammen haben also erhalten $x + \frac{8}{7}x + \frac{9}{8}x + \frac{10}{8}x$, und da dieses 4200 ausmacht, so ist die Gleichung $x + \frac{8}{7}x + \frac{9}{8}x + \frac{10}{8}x = 4200$.

Auflösung: $x + \frac{8}{7}x + \frac{9}{8}x + \frac{10}{8}x = 4200$

d. i. $\frac{80}{6}x = 4200$

oder $5x = 4200$

folglich $x = 4200 : 5 = 840$ Rthlr.

Die erste Person hat also 840 Rthlr., die zweyte 980 Rthlr., die drittte 1120 Rthlr., die vierte 1260 Rthlr. erhalten.

488. Nach diesen Beyspielen wird es nicht schwer seyn, noch folgende Aufgaben aufzulösen, die auf eine ähnliche Art zu behandeln sind.

1) Vier Personen theilen sich so in eine Summe, daß die erste die Hälfte derselben weniger 1000 Thlr., die zweyte $\frac{1}{3}$ derselben weniger 900 Thlr., die dritte $\frac{1}{4}$ derselben weniger 800 Thlr., und die vierte $\frac{1}{5}$ derselben weniger 700 Thlr. bekommt; wie groß war die Summe, und

wie viel hat jeder bekommen? [12000. 1) 5000, 2) 3100, 3) 2200, 4) 1700.]

2) Das Alter des Diophantus wird in einem Epigramm der griechischen Anthologie auf folgende Art angegeben: $\frac{1}{6}$ seines Lebens brachte er als Kind und Knabe zu; $\frac{1}{12}$ als Jüngling; nach Verlauf von $\frac{1}{7}$ seines Alters heyrathete er; 5 Jahre darauf wurde ihm ein Sohn gebohren, welcher die Hälfte des väterlichen Alters erreicht hatte, als er starb; worauf der Vater noch 4 Jahre lebte; — wie alt ist er geworden? (84 J.)

3) Eben daselbst findet sich folgende Aufgabe: Drey Personen werden redend eingeführt: die erste sagt, sie hätte so viel Geld, als die zweyte, und noch $\frac{1}{3}$ so viel, als die dritte; die zweyte sagt, sie hätte so viel als die dritte, und noch $\frac{1}{3}$ so viel, als die erste; die dritte sagt, sie hätte 10 Minen, und noch $\frac{1}{4}$ so viel als die erste; wie viel Geld hatte jede? [1) 60, 2) 50, 3) 30 M.]

4) Das Vorderrad an einem Wagen habe $7\frac{1}{2}$ Fuß im Umfange, das Hinterrad $10\frac{1}{2}$ Fuß; wie weit muß der Wagen gehen, wenn das Vorderrad 290 Umläufe mehr machen soll als das Hinterrad? (9360 F.)

5) Ein Reisender, der von A nach B geht, fragt unterwegs, wie weit er noch nach B habe, und erhält zur Antwort: die Hälfte von dem Ueberrest des Weges macht nur $\frac{3}{7}$ von dem zurückgelegten Theil desselben, und im Ganzen ist der noch übrige Theil um 30 Meilen kleiner, als der zurückgelegte; wie weit war B von A entfernt, und wie viel hatte der Reisende noch vor sich? (390; 180 M.)

6) Es hat jemand zwey silberne Becher, A u. B, und zwey Deckel dazu, a u. b. Sind Becher und Deckel zusammen, so wiegen beyde gleich viel ($A + a = B + b$); A allein aber ist $1\frac{1}{4}$mal so schwer, als B; und 12 Loth schwerer, als b; b aber ist $1\frac{1}{2}$mal so schwer, als

a; wie viel wog jeder Becher, und jeder Deckel? (A, 30; B, 24; a, 12; b, 18 L.)

---

7) Ein Dieb entflieht aus einem Gefängniſſe und macht jeden Tag 9 Meilen. Noch denſelben Tag ſetzt ihm ein Gerichtsdiener nach, der den erſten Tag 4 M., den zweyten 6 M., den dritten 8 M. u. ſ. f. jeden Tag zwey Meilen mehr, als den vorhergehenden, macht; wenn wird er ihn einholen, und wie weit wird der Dieb gekommen ſeyn?

8) Wenn das Pfund einer Waare für 20 gl. verkauft wird, und der Verkäufer 11⅓ Procent daran gewinnt; wie theuer war der Zentner (von 110 Pf.) im Einkauf?

9) Es leiht jemand 4500 Thlr. zu 4 Procent aus; nach 5½ Jahren leiht er 6000 Thlr. zu 5 Procent aus; in wie viel Jahren wird er von beyden Capitalien gleich viel an Zinſen eingenommen haben, und wie viel werden dieſe betragen?

10) Es wendet jemand ein Capital auf eine Unternehmung, und gewinnt daran im erſten Jahre 40 Procent. Er ſchlägt den Gewinn zum Capital und gewinnt wieder 40 Procent; daſſelbe geſchieht im dritten und vierten Jahre. Im fünften aber erleidet er einen Verluſt von 6708 Thlrn. Gleichwohl bleibt ihm noch 2½mal ſo viel übrig, als das anfängliche Capital betrug; wie groß war dieſes?

11) Es kauft jemand eine Quantität Aepfel, das Schock zu 7 gl.; er findet aber, daß, wenn er noch 20 Stück mehr bekommen hätte, für daſſelbe Geld, ihn das Schock nur 6 gl. 4 Pf. gekoſtet hätte; wie viel Aepfel hatte er gekauft?

12) Es hat jemand einen Kaſten mit 8 Fächern, und legt in das erſte Fach eine gewiſſe Anzahl Thaler; in das

zweyte 1 Thlr. mehr, und so in jedes der folgenden einen Thaler mehr, als in das vorhergehende. Nach einiger Zeit legt er noch einmal so viel in das erste Fach, und in jedes der folgenden immer 2 Thlr. mehr, als in das vorhergehende. Endlich legt er dreymal so viel in das erste Fach, als das erstemal, und in jedes der folgenden immer 3 Thlr. mehr als in das vorhergehende. Auf diese Art kommen 744 Thlr. in den Kasten; wie viel hat er jedesmal in das erste Fach hineingelegt?

---

489. In die Klasse der einfachen Gleichungen gehören auch die Aufgaben der sogenannten Alligationsrechnung, einer Art der Vermischungsrechnung, die aus dem Werthe gleicher Quantitäten zweyer zu mischenden Dinge, und aus dem Werthe einer eben so großen Quantität der Mischung die Größe der zu mischenden Theile finden lehrt.

490. Um diese Art von Aufgaben ganz allgemein zu fassen, nenne man den einen Stoff A, und den Werth einer gewissen Quantität desselben, z. B. eines Pfundes, setze man $= a$; den andern Stoff bezeichne man durch B, und den Werth einer gleichen Quantität desselben, z. B. eines Pfundes, durch b; beyde Stoffe sollen in einem solchen Verhältniß gemischt werden, daß der Werth einer eben so großen Quantität der Mischung, als vorher von A oder von B angenommen worden sind, z. B. also eines Pfundes, $= c$ sey; die Frage ist: was für einen Theil dieser Quantität muß man von A oder B nehmen?

Es versteht sich, daß a und b verschieden seyn müssen; man setze $a > b$; c hingegen muß zwischen a und b fallen. Das Maaß, auf welches sich die Werthe a, b, c beziehen, sey $= 1$.

Alsdann nenne man den Theil dieses Maaßes, den

an von A zu nehmen hat, x, so ist der von B = 1 − x. Der Werth der Quantität x muß einen eben so roßen Theil von a ausmachen, als x von dem zur Einheit angenommenen Maaße ist, folglich ist er = ax; eben hat die Quantität 1 − x einen Werth = b (1 − x); eyde Werthe zusammen aber sollen = c seyn. Daher ie Gleichung

$$ax + b(1 - x) = c$$

$$\text{also } ax + b - bx = c$$

$$\text{ferner } (a - b)\,x = c - b$$

$$\text{folglich } x = \frac{c - b}{a - b};$$

lso der andere Theil $1 - x = \frac{a - c}{a - b}$.

491. Diese allgemeinen Ausdrücke für x und 1 − x sind die Formeln der Alligationsrechnung. Man nehme z. B. folgende Aufgaben:

1) Ein Weinhändler mischt zweyerley Sorten Wein, die Bouteille der einen zu 21 gl., die der andern zu 8 gl., so daß die Bouteille der Mischung 16 gl. werth ist; wie viel nimmt er von jeder Sorte?

Hier ist a = 21, b = 8, c = 16; folglich $x = \frac{16-8}{21-8} = \frac{8}{13}$, und $1 - x = \frac{21-16}{21-8} = \frac{5}{13}$.

Probe: $\frac{8}{13}$. 21 gl. + $\frac{5}{13}$. 8 gl. ist $= \frac{168}{13} + \frac{40}{13} = \frac{208}{13} = 16$ gl.

2) Aus 15löthigem und 10löthigem Silber 12löthiges zu verfertigen.

Die Menge des Silbers vertritt hier die Stelle des Werthes. a ist also = 15, b = 10, c = 12; folglich ist $x = \frac{2-10}{5-10} = \frac{2}{5}$, $1 - x = \frac{15-12}{15-10} = \frac{3}{5}$. Man muß also u einer Mark 12löthiges Silber $\frac{2}{5}$ einer Mark 15löthiges, nd $\frac{3}{5}$ *einer Mark 10löthiges* nehmen.

3) Wenn 28 Louisd'or so viel als 48 Dukaten gelten, und dieselbe Summe soll in 33 Goldstücken (theils Louisd'. theils Duk.) gezahlt werden, wie viel hat man von jeder Sorte zu nehmen.

Das Maaß oder die Einheit, auf welche sich die angegebenen Größen beziehen, ist hier die Summe, die sowohl jede Geldsorte allein, als auch die Mischung von 33 Stücken beyder Sorten ausmachen soll; den Werth dieser Summe in den verschiedenen Sorten drückt die gegebene Anzahl derselben aus. a ist also = 48, b = 28, c = 33; und daher $x = \frac{33-28}{48-28} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$; folglich $1 - x = \frac{3}{4}$.

Man hat also von der Anzahl der Dukaten $\frac{3}{4}$, d. i. 12 Stück, und von der Anzahl der Louisdor $\frac{1}{4}$, d. i. 21 Stück zu nehmen, welches zusammen 33 Stück ausmacht.

492. Wenn ein Ganzes aus zwey Theilen zusammengesetzt ist, und es wird der eine Theil gegeben, so ist auch der andere dadurch bestimmt; besteht es aber aus mehr als zwey Theilen, so werden durch einen derselben nicht auch die übrigen bestimmt. Daraus ergibt sich, warum in einer Aufgabe der Alligationsrechnung die Mischung nur aus zwey verschiedenen Größen zusammengesetzt seyn darf, wenn anders die Aufgabe bestimmt seyn, d. h. nur eine einzige Auflösung zulassen soll.

Hätte man z. B. folgende Aufgabe: Ein Weinhändler mischt dreyerley Sorten Wein, die Bout. zu 18, zu 15 und zu 10 gl. Die Bout. der Mischung soll 12 gl. werth seyn; so könnte man die beyden erstern Sorten auf unendlich verschiedene Weise mischen und dadurch eine Bout. zu einem Preise zwischen 18 und 15 gl. erhalten; alsdann von dieser und der dritten Bout. zu 10 gl. eine Mischung zu 12 gl. herausbringen. Folglich würde die Aufgabe unbestimmt seyn oder unzählige Auflösungen zulassen.

on der Auflösung einfacher Gleichungen mit mehr als einer unbekannten Größe.

493. Wenn eine Gleichung mehr als eine unbe-nnte Größe enthält, so ist es nicht möglich, den Werth rselben aus ihr allein bestimmt zu finden; denn der Aus-uck für eine jede derselben muß außer den bekannten rößen auch noch die übrigen unbekannten enthalten.

Es sey z. B. $ax - by + c = o$, so ist $x = \frac{by - c}{a}$ und $y = \frac{ax + c}{b}$. Der Ausdruck für x ent-lt also noch y, und der für y noch x in sich; folglich keiner von beyden bestimmt.

494. Sind aber zu zwey unbekannten Größen auch vey verschiedene Gleichungen gegeben, von nen jede dieselben unbekannten Größen enthält, so ssen sich die Größen aus ihnen mit Bestimmtheit ent-ckeln.

495. Man sucht nehmlich aus jeder Gleichung den bestimmten Werth derselben unbekannten Größe, z. B. n x; beyde unbestimmten Werthe, die einander gleich yn müssen, da sie einerley Größe darstellen, geben eine itte Gleichung, welche nur noch die andere unbekannte röße, y, in sich enthält; diese kann folglich aus ihr ge-nden werden. Ist aber y bekannt, so kann auch x, s durch y und lauter bekannte Größen ausgedrückt ist, stimmt werden.

496. Wäre z. B. zu obiger Gleichung noch eine eyte $fx + gy - h = o$ gegeben, so könnte x und y stimmt gefunden werden.

Denn aus der letztern Gleichung ist $x = \frac{h - gy}{f}$;

ch der erstern aber ist $x = \frac{by - c}{a}$;

folglich ist

$$\frac{h - gy}{f} = \frac{by - c}{a}$$

woraus sich ergibt $y = \frac{ah + cf}{ag + bf}$; und setzt man
sen Werth von y in eine der beyden Gleichungen für
so findet sich $x = \frac{bh - cg}{ag + bf}$.

497. So wie man für zwey unbekannte Gri
zwey verschiedene Gleichungen haben muß, so muß
für drey unbekannte Größen drey verschiedene Gleich
gen haben; für viere vier verschiedene Gleichungen;
so fort, immer so viele verschiedene Gleichungen,
unbekannte Größen vorkommen, wenn anders die G
ßen bestimmt seyn sollen.

498. Die Auflösung der Gleichungen mit drey
bekannten Größen geschieht auf ähnliche Weise, als
der Gleichungen mit zwey unbekannten Größen:
sucht nehmlich aus jeder Gleichung einen Werth für
nerley Größe, z. B. für x; zwey dieser Werthe g
eine neue Gleichung, die nur zwey unbekannte Gri
enthält. Man sucht aus ihr den Werth der einen u
kannten Größe, z. B. von y. Alsdann muß man
der dritten Gleichung für x und einer der beyden er
ebenfalls eine neue Gleichung formiren, und daraus
Werth von y suchen. Endlich geben diese beyden A
the von y wieder eine Gleichung, die nur noch eine
bekannte Größe enthält, deren Werth folglich aus
gefunden werden kann.

Aus dem Werthe der dritten Größe findet sich
dann der Werth von y, und aus beyden der Werth vo

499. Es sey z. B.

$$ax + by + cz = p$$
$$dx + ey + fz = q$$
$$gx + hy + kz = r;$$

so ist 1) $x = \frac{p - by - cz}{a}$

2) $x = \frac{q - ey - fz}{d}$

3) $x = \frac{r - hy - kz}{g}$

Folglich ist aus Nr. 1. und 2.

$$\frac{p - by - cz}{a} = \frac{q - ey - fz}{d}$$

mithin $dp - bdy - cdz = aq - aey - afz$

ferner $aey - bdy = aq + cdz - afz - dp$

oder $(ae - bd)y = aq - dp + cdz - afz$

folglich $y = \frac{aq - dp + cdz - afz}{ae - bd.}$

Ferner ist aus Nr. 1. und 3.

$$\frac{p - by - cz}{a} = \frac{r - hy - kz}{g}$$

folglich $gp - bgy - cgz = ar - ahy - akz$

ferner $ahy - bgy = ar - gp + cgz - akz$

also $y = \frac{ar - gp + cgz - akz}{ah - bg}$

Aus diesem und dem obigen Werthe von y entsteht die Gleichung

$$\frac{aq - dp + cdz - afz}{ae - bd} = \frac{ar - gp + cgz - akz}{ah - bg}$$

folglich:

$aaqh - adhp + acdhz - aafhz - abgq + bdgp - bcdgz + abfgz = aaer - aegp + acegz - aaekz - abdr + bdgp - bcdgz + abdkz.$

Hier heben sich auf beyden Seiten $+ bdgp - bcdgz$ und es bleibt noch

$aaqh - adhp - abgq + (acdh - aafh + abfg) z = aaer - aegp - abdr + (aceg - aaek + abdk) z.$

Folglich ist

$[(acdh - aafh + abfg) - (aceg - aaek + abdk)]\ z = aaer - aegp - abdr - aaqh + abgq + adhp.$

oder:

$[aa\,(ek - fh) + ab\,(fg - dk) + ac\,(dh - eg)]\ z = aa\,(er - qh) + ad\,(hp - br) + ag\,(bq - ep);$

folglich

$$z = \frac{aa\,(er - qh) + ad\,(hp - br) + ag\,(bq - ep)}{aa\,(ek - fh) + ab\,(fg - dk) + ac\,(dh - eg)}$$

und dividirt man dieses noch im Zähler und Nenner durch a, so ist

$$z = \frac{a\,(er - qh) + d\,(hp - br) + g\,(bq - ep)}{a\,(ek - fh) + b\,(fg - dk) + c\,(dh - eg)}$$

500. Freylich ist dieses ein weitläuftiger Ausdruck, aber er ist es auch nur bey dieser Allgemeinheit der Rechnung. Wird diese mit bestimmten Zahlen geführt, so ziehen sich die Glieder zusammen und werden einfacher. Oft lassen sich auch noch mancherley Abkürzungen anbringen. Doch liegt es in der Natur der Sache, daß die Rechnung desto weitläuftiger und mühsamer wird, je mehr der unbekannten Größen sind; übrigens aber werden keine andern Arten von Rechnungen, als zur Auflösung von Gleichungen mit einer unbekannten Größe, dazu erfordert.

Um ein Beyspiel mit bestimmten Zahlen zu haben, setze man

$$3x - y + 2z = 36$$
$$-2x + 4y + z = 34$$
$$4x + 2y - 3z = 10.$$

Aus der ersten Gleichung ist $x = 12 + \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z.$
aus der zweyten — — — $x = -17 + 2y + \frac{1}{2}z.$
aus der dritten — — — $x = 2\frac{1}{2} - \frac{1}{2}y + \frac{3}{4}z.$

Aus den beyden ersten Werthen von x erhält man

$$12 + \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z = -17 + 2y + \frac{1}{2}z.$$

folglich $29 - (\frac{1}{2} + \frac{2}{3})z = (2 - \frac{1}{3})y$

d. i. $29 - \frac{7}{8}z = \frac{3}{8}y$,
folglich $174 - 7z = 10y$
folglich $y = (174 - 7z) : 10$.

Ferner erhält man aus dem ersten und dritten Werthe von x

$12 + \frac{1}{2}y - \frac{3}{4}z = 2\frac{1}{2} - \frac{1}{2}y + \frac{1}{4}z$
folglich $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2})y = (\frac{3}{4} + \frac{1}{4})z + 2\frac{1}{2} - 12$
d. i. $\frac{3}{8}y = 1\frac{1}{2}z - 9\frac{1}{2}$
folglich $10y = 17z - 114$

$$\text{also } y = \frac{17z - 114}{10}.$$

Dieser und der vorige Werth von y geben endlich die Gleichung

$$\frac{17z - 114}{10} = \frac{174 - 7z}{10}$$

folglich $17z - 114 = 174 - 7z$
folglich $24z = 288$
folglich $z = 288 : 24 = 12$.

Setzt man diesen Werth von z in die erste Gleichung für y, so ist $y = (174 - 7 \cdot 12) : 10$, d. i. $(174 - 84) : 10 = 90 : 10 = 9$.

Endlich die Werthe für y und z in die erste Gleichung für x gesetzt, geben $x = 12 + \frac{1}{4} \cdot 9 - \frac{3}{4} \cdot 12$, d. i. $12 + 3 - 8 = 7$.

501. Aus diesen Beyspielen läßt sich schon abnehmen, wie man zu verfahren habe, wenn mehr als drey unbekannte Größen, und mehr als drey Gleichungen dazu gegeben sind.

502. Aufgaben, welche mehr als eine unbekannte Größe enthalten, müssen eben so viele verschiedene Gleichungen geben, als unbekannte Größen in ihnen vorkommen, wenn sie bestimmt seyn sollen. Beyspiele derselben sind folgende:

A. Bestimmte Aufgaben mit zwey unbekannten Größen.

1) Eine Gesellschaft von Herren und Damen besteht aus 48 Personen; der Herren sind 6 mehr als

der Damen; wie viel waren Herren, und wie viel Damen?

Ansatz: Man setze die Anzahl der Herren $= x$, und die der Damen $= y$, so ist die erste Gleichung $x + y = 48$. Ferner da der Herren 6 mehr sind als der Damen, so ist die zweyte Gleichung $x = y + 6$.

Auflösung: 1) $x + y = 48$; folglich $x = 48 - y$
2) $x = y + 6$.

Aus beyden folgt: $48 - y = y + 6$
folglich $48 - 6 = y + y$
d. i. $42 = 2y$
folglich $y = 42 : 2 = 21$.

Also $x = 21 + 6 = 27$.

Noch kürzer wäre die Auflösung, wenn man setzte: $x + y = 48$; $x - y = 6$; folglich $x = 24 + 3 = 27$; $y = 24 - 3 = 21$ (180.).

2) Es kauft jemand zwey Pferde zusammen für 165 Rthlr.; das eine kostet $\frac{1}{5}$ mehr als das andere; wie viel hat jedes gekostet?

Ansatz: Der Preis des einen sey $= x$, und der des andern $= y$: so ist $x + y = 165$. Ferner ist $x = y + \frac{1}{5}y$.

Auflösung:
1) $x + y = 165$ Rthlr.; folglich $x = 165 - y$
2) $x = y + \frac{1}{5}y = 1\frac{1}{5}y$.

Aus beyden Gleichungen folgt:
$165 - y = 1\frac{1}{5}y$
folglich $165 = 1\frac{1}{5}y + y = 2\frac{1}{5}y = \frac{11}{5}y$
folglich $y = 165 : \frac{11}{5} = 75$.

Hieraus folgt $x = 75 + \frac{1}{5} \cdot 75 = 75 + 15 = 90$.

3) Zwey Hirten werden nach der Stärke ihrer Heerden gefragt, und der eine antwortet: wenn ich 25 Stück von meiner Heerde zu der andern übergehen lasse, so sind beyde gleich stark; kommen aber 25 von jener Heerde zu der meinigen, so ist meine noch einmal so stark als jene; wie stark waren beyde?

Ansatz: Die eine Heerde sey $= x$, die andere $= y$. Gehen 25 Stück von jener zu dieser über, so ist jene $= x - 25$, und diese $= y + 25$. Da beyde alsdann gleich stark

nd, so ist 1) $x - 25 = y + 25$. Ferner wenn von der ltern 25 Stück zu der erstern übergehen, so wird die erere $= x + 25$ und die letztere $= y - 25$; alsdann aber ll jene noch einmal so stark als diese seyn, folglich ist $x + 25 = 2(y - 25)$.

Auflösung: 1) $x - 25 = y + 25$

folglich $x = y + 25 + 25 = y + 50$.

2) $x + 25 = 2(y - 25) = 2y - 50$

folglich $x = 2y - 50 - 25 = 2y - 75$

us beyden Gleichungen für x folgt

$y + 50 = 2y - 75$

also $50 + 75 = 2y - y$

d. i. $125 = y$.

a nun $x = y + 50$ ist, so ist $x = 125 + 50 = 175$.

Probe: Wenn von der Heerde, die 175 Stück enthält, 25 zu der andern übergehen, so werden beyde 150 ark; gehen aber von der andern 25 zu der ersten über, so nthält diese 200 und jene nur 100 Stück, folglich ist die ine noch einmal so groß als die andere.

4) Zwey Personen, A und B, die zusammen Rthlr. 16 gl. bey sich haben, spielen mit einander; am nde hat A $\frac{1}{5}$ von B's Gelde gewonnen, und nun beägt sein Geld noch einmal so viel, als B übrig behält, eniger 8 gl. — wie viel Geld hatte jede von Anfang, nd wie viel betrug der Gewinn des einen?

Ansatz: Das Geld von A sey $= x$, das von B $= y$, ist 1) $x + y = 9$ Rthlr. 16 gl. $= 9\frac{2}{3}$ Rthlr. Ferner enn A $\frac{1}{5}$ von B's Gelde gewinnt, so ist das, was er hat, $= x + \frac{1}{5}y$, und das, was B übrig behält, ist $= \frac{4}{5}y$; und a jenes noch einmal so viel als dieses, weniger 8 gl. oder Rthlr., ist, so ist 2) $x + \frac{1}{5}y + \frac{1}{3} = 2 \cdot \frac{4}{5}y = \frac{10}{5}y$.

Auflösung: 1) $x + y = 9\frac{2}{3}$; folglich $x = 9\frac{2}{3} - y$

2) $x + \frac{1}{5}y + \frac{1}{3} = \frac{10}{5}y$

folglich $x = \frac{10}{5}y - \frac{1}{5}y - \frac{1}{3} = \frac{9}{5}y - \frac{1}{3}$

us beyden Gleichungen für x folgt

$9\frac{2}{3} - y = \frac{9}{5}y - \frac{1}{3}$

folglich $9\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \frac{9}{5}y + y$

d. i. $10 = 2\frac{4}{5}y = \frac{14}{5}y$

folglich $y = 10 : \frac{14}{5} = 4$.

eraus ergibt sich $x = 9\frac{2}{3} - 4 = 5\frac{2}{3}$ Rthlr.

Probe: $\frac{1}{8}$ von 4 Rthlr. macht 16 gl. Diese zu 5 Rthlr. hinzugethan, sind 6 Rthlr. 8 gl. B behält 3 Rthlr. 8 gl. übrig, wovon das Doppelte 6 Rthlr. 16 gl., also 8 gl. mehr ist, als das was A nunmehr hat.

5) Ein General gibt die Stärke seines und eines feindlichen Corps auf folgende Art an: $\frac{2}{3}$ des feindlichen weniger 4000 Mann sind so viel als die Hälfte des meinigen nebst 2000 Mann; hingegen $\frac{3}{4}$ des meinigen nebst 3000 Mann sind so viel als $\frac{5}{6}$ des feindlichen weniger 2000 Mann; wie stark war jedes Corps?

Ansatz: Das Corps des Generals sey $= x$, das feindliche $= y$,

so ist 1) $\frac{2}{3}y - 4000 = \frac{1}{2}x + 2000$

2) $\frac{3}{4}x + 3000 = \frac{5}{6}y - 2000.$

Auflösung: 1) $\frac{2}{3}y - 4000 = \frac{1}{2}x + 2000$

folglich $\frac{1}{2}x = \frac{2}{3}y - 6000$

$x = \frac{4}{3}y - 12000$

2) $\frac{3}{4}x + 3000 = \frac{5}{6}y - 2000$

folglich $\frac{3}{4}x = \frac{5}{6}y - 5000$

$x = \frac{10}{9}y - \frac{20000}{3}.$

Aus beyden Gleichungen für x ist

$$\frac{4}{3}y - 12000 = \frac{10}{9}y - \frac{20000}{3}$$

folglich $4y - 36000 = \frac{10}{3}y - 20000$

ferner $\frac{2}{3}y = 36000 - 20000 = 16000,$

folglich $y = 16000 : \frac{2}{3} = 24000.$

Demnach ist $x = \frac{4}{3} \cdot 24000 - 12000 = 20000.$

6) Es sey ein Metall A, von welchem a Pfunde, im Wasser abgewogen, m Pfunde verlieren; ein anderes Metall sey B, von welchem b Pfunde, im Wasser abgewogen, n Pfunde verlieren. Eine Mischung aus beyden, C, wiege c Pfunde, und verliere im Wasser p Pfunde, wie viel Pfunde enthält sie von A und wie viel von B?

Es wird dabey vorausgesetzt, daß das Volumen von C der Summe der Voluminum von A und B gleich

ſey, oder daß die beyden Metalle in der Miſchung weder dichter noch lockerer werden, als ſie, einzeln genommen, ſind.

Anſatz: Das Gewicht von A, das in C enthalten iſt, ſey = x; das Gewicht von B = y, ſo iſt 1) $x + y = c$. Ferner wenn a Pfunde von A im Waſſer m Pfunde verlieren, ſo findet man durch die Regel de tri, wie viel x Pfunde verlieren, nehmlich $\frac{mx}{a}$; und eben ſo findet man, daß y Pfunde von B im Waſſer $\frac{ny}{b}$ verlieren. Da nun das, was dieſe beyden Quantitäten im Waſſer verlieren, dem Gewichtsverluſt von C im Waſſer gleich ſeyn ſoll, ſo iſt 2) $\frac{mx}{a} + \frac{ny}{b} = p$.

Auflöſung: 1) $x + y = c$; folglich $x = c - y$.

$$2)\ \frac{mx}{a} + \frac{ny}{b} = p$$

$$\text{folglich } \frac{mx}{a} = p - \frac{ny}{b}$$

$$x = \frac{ap}{m} - \frac{any}{mb}.$$

Aus beyden Gleichungen für x folgt

$$c - y = \frac{ap}{m} - \frac{any}{mb}$$

$$\text{folglich } \frac{any}{mb} - y = \frac{ap}{m} - c = \frac{ap - mc}{m}$$

$$\text{oder } \left(\frac{an}{mb} - 1\right) y = \frac{ap - mc}{m}$$

$$\text{oder } \frac{an - mb}{mb}\, y = \frac{ap - mc}{m}$$

$$\text{folglich } y = \frac{ap - mc}{m} \cdot \frac{mb}{an - mb} = \frac{ap - mc}{an - mb} \cdot b.$$

Setzt man dieſen Werth von y in die obige Gleichung für x, ſo iſt

$$x = c - \frac{ap - mc}{an - mb} \cdot b = \frac{anc - mbc - apb + mbc}{an - mb}$$

$$= \frac{anc - apb}{an - mb} = \frac{nc - pb}{an - mb} \cdot a.$$

Dieſe Aufgabe ſtellt einen bekannten hydroſtatiſchen Satz dar, deſſen Erfindung dem Archimedes beygelegt wird. S. *mein Lehrbuch der Phyſik.* 5te Aufl. §. 142.

B. Bestimmte Aufgaben mit drey unbekannten Größen.

1) Man suche drey Zahlen, die so beschaffen sind, daß die Summe der ersten und zweyten $= 20$; die Summe der zweyten und dritten $= 30$; die Summe der dritten und ersten $= 40$ sey.

Ansatz: Man nenne die drey Zahlen x, y, z, so ist 1) $x + y = 20$; 2) $y + z = 30$; 3) $z + x = 40$.

Auflösung: 1) $x + y = 20$; folglich $x = 20 - y$
2) $y + z = 30$; folglich $y = 30 - z$
3) $z + x = 40$; folglich $x = 40 - z$

Aus Nr. 1. und 3. folgt $20 - y = 40 - z$; folglich $y = z - 20$. Verbindet man mit dieser Gleichung Nr. 2., so ergibt sich

$$z - 20 = 30 - z$$
folglich $2z = 50$
und $z = 25$
also $y = 25 - 20 = 5$
$x = 20 - 5 = 15$.

Probe: $15 + 5 = 20$; $5 + 25 = 30$; $25 + 15 = 40$.

Die Auflösung hätte kürzer gefunden werden können, wenn man alle drey Gleichungen addirt, und die Summe halbirt hätte. Man erhält dadurch $x + y + z = 45$; und zieht man hiervon die Summe je zweyer Größen ab, so ergibt sich die dritte.

Auch kann man die erste Gleichung von der zweyten abziehen, wodurch man $z - x = 10$ erhält. Dieß mit der dritten Gleichung verbunden, gibt die Werthe von x und z.

Dieß kann als Beyspiel der verschiedenen Auflösungsart einer Aufgabe dienen (484.).

2) Drey Personen, A, B, C, vergleichen das Geld, das sie bey sich haben, gegen einander, und es findet sich, daß, wenn B an A 23 gl. gibt, A noch einmal so viel hat, als B übrig behält; gibt C an B 23 gl., so hat B dreymal so viel, als C behält; gibt endlich A an C 23 gl., so hat C viermal so viel, als A behält; wie viel Geld hatte jeder?

Ansatz: Das Geld von A sey = x, das von B = y, das von C = z: so ist 1) x + 23 = 2 (y − 23); 2) y + 23 = 3 (z − 23); 3) z + 23 = 4 (x − 23).

Auflösung: 1) x + 23 = 2 (y − 23) = 2 y − 46
folglich x = 2y − 69
2) y + 23 = 3 (z − 23) = 3z − 69
folglich y = 3z − 92
3) z + 23 = 4 (x − 23) = 4x − 92
folglich 4x = z + 115
und x = (z + 115) : 4.

Aus Nr. 1. und 3. folgt

$$2y - 69 = (z + 115) : 4$$

$$\text{folglich } 2y = \frac{z + 115}{4} + 69 = \frac{z + 391}{4}$$

$$\text{und } y = \frac{z + 391}{8}.$$

Aus dieser Gleichung und der Gleichung für y in Nr. 2. folgt

$$\frac{z + 391}{8} = 3z - 92$$

folglich z + 391 = 24z − 736
folglich 391 + 736 = 24z − z
d. i. 1127 = 23z
folglich z = 1127 : 23 = 49
mithin y = 3z − 92 (Nr. 2.) = 55
und x = 2y − 69 (Nr. 1.) = 41

Probe: Wenn man von 55 gl. 23 gl. wegnimmt und zu 41 gl. hinzuthut, so bleiben dort 32, und hier kommen 64 heraus, also noch einmal so viel; 23 von 49 abgezogen und zu 55 hinzugethan, läßt dort 26 übrig und gibt hier 78, welches dreymal so viel ist; endlich 23 von 41 abgezogen und zu 49 hinzugethan, macht dort 18 und hier 72, welches viermal so viel ist.

3) Eine Gesellschaft von Männern, Frauen und Kindern, die zusammen 26 Personen ausmachen, soll zu zwey verschiedenenmalen 13 Rthlr. 8 gl. bezahlen; dazu gibt das erstemal ein Mann 16 gl., eine Frau 12 gl. und ein Kind 8 gl.; das anderemal aber ein Mann 18 gl., eine Frau 14 gl. und die Kinder zusammen das Uebrige,

welches noch 8 gl. beträgt; wie viel waren der Männ der Frauen und der Kinder?

Ansatz: Die Anzahl der Männer sey = x, die d Frauen = y, die der Kinder = z; so ist 1) x + y + z = 26; 2) wenn ein Mann 16 gl. bezahlt, so bezahlen x Mä ner 16x gl.: eben so bezahlen die Frauen 12y gl. und d Kinder 8z gl. Alles zusammen macht 13 Rthlr. 8 gl. od 320 gl. Daher die Gleichung 16x + 12y + 8z = 320 3) auf gleiche Weise ist 18x + 14y + 8 = 320.

Auflösung:

1) $x + y + z = 26$; folglich $x = 26 - y -$

2) $16x + 12y + 8z = 320$

oder, mit 4 div. $4x + 3y + 2z = 80$

folglich $4x = 80 - 3y - 2z$

und $x = 20 - \frac{3}{4}y - \frac{1}{2}z$

3) $18x + 14y + 8 = 320$

oder, mit 2 div. $9x + 7y + 4 = 160$

folglich $9x = 160 - 7y - 4 = 156 - 7y$

und $x = (156 - 7y) : 9$.

Aus der Gleichung für x in Nr. 1. und 2. folgt

$26 - y - z = 20 - \frac{3}{4}y - \frac{1}{2}z$

folglich $6 - \frac{1}{4}y - \frac{1}{2}z = 0$

ferner $6 - \frac{1}{2}z = \frac{1}{4}y$

folglich $y = 24 - 2z$

Ferner folgt aus der Gleichung für x in Nr. 1. und 3.

$26 - y - z = (156 - 7y) : 9$

folglich mit 9 mult. $234 - 9y - 9z = 156 - 7y$

ferner $234 - 156 - 9z = 9y - 7y$

d. i. $78 - 9z = 2y$

folglich $y = 39 - 4\frac{1}{2}z$

Aus dieser und der vorhergehenden Gleichung für y folgt

$24 - 2z = 39 - 4\frac{1}{2}z$

also $4\frac{1}{2}z - 2z = 39 - 24$

d. i. $2\frac{1}{2}z = 15$

folglich $z = 15 : \frac{5}{2} = 6$.

Demnach ist $y = 24 - 2 \cdot 6 = 12$; und $x = 26 - 12 - 6 = 8$.

Unbestimmte Aufgaben.

503. Aus dem Obigen erhellet, daß eine Aufgabe **unbestimmt** ist, wenn sie mehr unbekannte Größen als verschiedene Gleichungen enthält, z. B. zu 2 unbekannten Größen nur eine Gleichung oder zu 3 unbekannten Größen nur zwey Gleichungen.

504. Die Auflösung unbestimmter Aufgaben geschieht auf eben die Art, als die der bestimmten. Allein da in dem Werth, welchen man für die eine unbekannte Größe erhält, immer wieder eine unbekannte Größe enthalten ist, so kann man dieser unendlich verschiedene Werthe beylegen, und dadurch eben so unendlich verschiedene Werthe für jene bekommen. Eine unbestimmte Aufgabe hat daher unzählige Auflösungen. Z. B.

1. Zwey Zahlen zu finden, die zusammen 50 ausmachen.

Auflös. Man setze die Zahlen x u. y, so ist $x + y = 50$; folglich $x = 50 - y$. Hier kann man für y jede beliebige ganze oder gebrochene, positive oder negative Zahl annehmen, und aus jeder einen Werth für x herleiten, also unzählige Werthe von x bekommen.

2. Eine ganze Zahl zu finden, die durch 5 dividirt 3, und durch 3 dividirt 2 übrig läßt.

Auflös. Eine Zahl, die durch 5 dividirt 3 übrig läßt, kann durch $5x + 3$ ausgedrückt werden; und wenn eben diese Zahl durch 3 dividirt 2 übrig läßt, so ist sie auch $= 3y + 2$. Man erhält daher die Gleichung $5x + 3 = 3y + 2$; woraus sich $x = \frac{3y - 1}{5}$ ergibt. Hier kommt es darauf an, y so zu wählen, daß, wenn es mit 3 multiplizirt, und von dem Produkt 1 abgezogen wird, der Rest sich durch 5 vollständig dividiren lasse. Dieß kann auf unzählige Weise geschehen. Man findet leicht

$y = 2\ 7\ 12\ 17\ 22 \ldots$. woraus dann folgt
$x = 1\ 4\ 7\ 10\ 13 \ldots$. dieß gibt die gesuchte
Zahl $= 8\ 23\ 38\ 53\ 68 \ldots$.

Jede dieſer Reihen iſt eine arithmetiſche Progreſſion, die ſich leicht ſo weit fortſetzen läßt, als man will.

3. Zwey Zahlen zu finden, deren Summe und Produkt einander gleich ſind.

Auflöſ. Man nenne die Zahlen x und y, ſo iſt

$$x + y = xy$$

folgl. $x = xy - y = (x - 1)y$

und $\frac{x}{x-1} = y.$

Hier kann man für x jede beliebige Zahl ſetzen, ſo ergibt ſich aus der Gleichung ein Werth für y, wodurch der Aufgabe ein Gnüge geſchieht. Es ſind alſo unzählige Auflöſungen möglich.

Z. B. $x = 7$ gibt $y = \frac{7}{6}$. Es iſt aber $7 + \frac{7}{6} = 7 \cdot \frac{7}{6} = \frac{49}{6} = 8\frac{1}{6}$.

Man kann ſelbſt einen Bruch für x ſetzen, z. B. $\frac{1}{4}$; dann iſt $y = \frac{1}{4} : (\frac{1}{4} - 1) = \frac{1}{4} : (-\frac{3}{4}) = -3$. Es iſt aber $-3 + \frac{1}{4} = -3 \cdot \frac{1}{4} = -\frac{3}{4} = -2\frac{1}{4}$.

505. Es laſſen ſich aber unbeſtimmte Aufgaben ſo einrichten, daß die Anzahl der Auflöſungen durch gewiſſe Bedingungen eingeſchränkt, und ſo die unendliche Menge derſelben auf eine ſehr endliche Zahl herabgebracht wird. Z. B. wenn man in der erſten der vorſtehenden Aufgaben verlangte, daß x und y nur ganze und poſitive Zahlen ſeyn ſollen: alsdann würde die Auflöſung nur 25 verſchiedene Fälle darbieten.

506. Die Rechnung, die ſolche unbeſtimmte, aber durch gewiſſe Bedingungen eingeſchränkte, Aufgaben auflöſen lehrt — vorausgeſetzt daß die Auflöſung nur auf einfache Gleichungen führt — wird wohl mit einem beſondern Namen die *regula coeci* genannt. Man nennt auch überhaupt die Auflöſung unbeſtimmter Aufgaben *Analysis Diophantea*, von dem Alexandriner Diophantus, deſſen ſchon oben (14.) erwähnt iſt, und der für den Erfinder derſelben gehalten wird.

Sein Werk, worin ſich zuerſt ſolche Aufgaben behan-

delt finden, führte den Titel ἀριθμητικα, und bestand aus 13 Büchern, von welchen jedoch nur die sechs erstern noch vorhanden sind. Diese sind von Bachet de Meziriac griechisch und lateinisch, mit einem Commentar, 1621 zu Paris herausgegeben. Des Epigrammes auf ihn in der Anthologie ist schon oben (488.) gedacht worden. S. Anthol. Graec. Edit. Jacobs. Tom. III. pag. 186. Vergleiche Bossut's Versuch einer Gesch. der Math. übers. von Reimer. I. Th. S. 54.

507. Die Behandlung dieser Art von Aufgaben wird aus einigen Beyspielen erhellen:

1) Es kauft jemand für 2 Rthlr. 12 gl. zweyerley Band; die Elle der einen Art kostet 5 gl., die der andern 4 gl.; wie viel Ellen bekommt er von jeder Sorte?

Ansatz: Die Anzahl der Ellen von der einen Sorte sey $= x$, die der andern $= y$, so drückt $5x + 4y$ den Preis von beyden, d. i. 2 Rthlr. 12 gl. oder 60 gl. aus. Daher die Gleichung $5x + 4y = 60$.

Auflösung: $5x + 4y = 60$; folglich $5x = 60 - 4y$, und $x = \frac{60 - 4y}{5} = 12 - \frac{4y}{5}$. Da hier nur ganze Ellen angenommen werden, so muß man y so wählen, daß es mit 4 multiplizirt und durch 5 dividirt keinen Bruch gibt. Man setze also

$y = 0, 5, 10, 15$

alsdann ist $x = 12, 8, 4, 0$.

Hier sind also überhaupt 4 Fälle möglich; oder, wenn man den ersten und letzten nicht gelten läßt, nur zwey.

Die Werthe für y und x bilden zwey arithmetische Reihen. Kennt man also nur die beyden ersten Glieder derselben, so ist es leicht, sie so weit fortzusetzen, als nöthig ist.

2) Man zertheile die Zahl 12 in drey Theile, wovon der erste mit 9, der andere mit 7, der dritte mit 5 multiplizirt, Produkte geben, die zusammen 80 ausmachen.

Ansatz: Die drey Theile bezeichne man durch x, y, z, so ist 1) $x + y + z = 12$, 2) $9x + 7y + 5z = 80$.

Auflösung:

1) $x + y + z = 12$; folglich $x = 12 - y - z$

2) $9x + 7y + 5z = 80$; folglich $x = (80 - 7y - 5z) : 9$.

Aus beyden Gleichungen für x folgt

$$12 - y - z = (80 - 7y - 5z) : 9.$$

Multiplizirt man diese Gleichung mit 9, so ist

$$108 - 9y - 9z = 80 - 7y - 5z$$

folglich $28 - 2y - 4z = 0$

und $28 - 4z = 2y$

folglich $y = 14 - 2z$

Setzt man nun für z der Reihe nach die ganzen Zahlen in ihrer natürlichen Ordnung,

also $z = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$

so ist $y = 12, 10, 8, 6, 4, 2, 0$

und $x = -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$

Hier kommen 7 Fälle heraus, von denen jedoch die beyden erstern und der letzte abzurechnen sind, so daß nur viere übrig bleiben.

3) Ein Banquier hat 1200 fl. theils in Laubthalern, theils in Conventionsthalern zu zahlen; wie viel muß er von jeder Geldsorte geben, wenn der Lbthlr. zu 2 fl. 45 Xr. und der Convthlr. zu 2 fl. 24 Xr. gerechnet wird?

Ansatz: Die Anzahl der Lbthlr. sey = x, und die der Convthlr. = y. Da nun 45 Xr. = $\frac{3}{4}$ fl., und 24 Xr. = $\frac{2}{5}$ fl. sind, so machen x Lbthlr. $2\frac{3}{4}$x fl. und y Convthlr. $2\frac{2}{5}$y fl.; beydes zusammen soll 1200 fl. seyn; folglich ist $2\frac{3}{4}x + 2\frac{2}{5}y = 1200$.

Auflösung: $2\frac{3}{4}x + 2\frac{2}{5}y = 1200$

d. i. $\frac{11}{4}x + \frac{12}{5}y = 1200$

Ferner die ganze Gleichung mit 20, als dem Produkt der beyden Nenner, multiplizirt

$$55x + 48y = 24000$$

und daher $48y = 24000 - 55x$

$$\text{folglich } y = \frac{24000 - 55x}{48} = 500 - \frac{55x}{48}.$$

Soll nun weder x noch y ein Bruch werden, so muß x so gewählt werden, daß es mit 55 multiplizirt und durch 48 dividirt, gerade aufgeht. Da aber kein Factor von 48 mit einem Factor von 55 übereinstimmt (1 ausgenommen, *welches hier nicht* in Betrachtung kömmt), so muß 48 in x *aufgehen; folglich* darf x nur ein Produkt von 48 seyn.

Setzt man also

$x = 48, 96, 144, 192, 240, 288, 336, 384, 432,$
so ist $y = 445, 390, 335, 280, 225, 170, 115, 60, 5.$

4) Es soll jemand 120 Malter Korn für 540 Rthlr. liefern; er nimmt dazu dreyerley Sorten, die eine das Malter zu $3\frac{1}{4}$ Rthlr., die andere das Malter zu $4\frac{2}{3}$ Rthlr., die dritte das Malter zu $5\frac{1}{8}$ Rthlr.; wie viel Malter muß er von jeder Sorte nehmen?

Ansatz: Die Anzahl Malter der ersten Sorte sey $= x$, die der zweyten $= y$, die der dritten $= z$: so ist 1) $x + y + z = 120$; 2) $3\frac{1}{4}x + 4\frac{2}{3}y + 5\frac{1}{8}z = 540$.

Auflösung:

1) $x + y + z = 120$, folglich $x = 120 - y - z$

2) $3\frac{1}{4}x + 4\frac{2}{3}y + 5\frac{1}{8}z = 540$

d. i. $\frac{13}{4}x + \frac{14}{3}y + \frac{41}{8}z = 540.$

Diese Gleichung mit 12, als der Zahl, in welcher alle Nenner aufgehen, multiplizirt, gibt

$$45x + 56y + 62z = 6480$$

folglich $x = (6480 - 56y - 62z) : 45.$

Aus beyden Gleichungen für x folgt

$$120 - y - z = (6480 - 56y - 62z) : 45$$

folglich $5400 - 45y - 45z = 6480 - 56y - 62z$

und $0 = 1080 - 11y - 17z$

ferner $11y = 1080 - 17z$

und $y = \frac{1080 - 17z}{11}$.

Hier würde es schwer seyn, zu errathen, was für eine Zahl z seyn müsse, damit es mit 17 multiplizirt, das Produkt von 1080 subtrahirt, die Differenz durch 11 dividirt, gerade aufgehe. Man muß also ein Verfahren anwenden, wodurch man z mit Sicherheit, ohne zu rathen, finden könne.

Zu dem Ende dividire man mit 11 in $1080 - 17z$; der Quotient ist $98\frac{2}{11} - (z + \frac{6}{11}z)$, d. i. $98 - z + \frac{2 - 6z}{11}$ $= 98 - z - \frac{6z - 2}{11}$.

Den letzten Bruch setze man $= p$, so ist $y = 98 - z - p$; und wenn $\frac{6z - 2}{11} = p$ ist, so ist $6z = 11p + 2$,

folglich $z = \frac{11p+2}{6} = p + \frac{5p+2}{6}$; und dieses sey $= p + q$.

Also $\frac{5p+2}{6} = q$; folglich $5p = 6q - 2$; und $p = \frac{6q-2}{5} = q + \frac{q-2}{5}$. Dieß sey $= q + r$.

Also $\frac{q-2}{5} = r$; folglich $q = 5r + 2$.

So gelangt man endlich zu einer Gleichung, die keinen Bruch mehr enthält; und nun kann man für r der Reihe nach die natürlichen Zahlen setzen, so weit als es die übrigen Umstände der Aufgabe gestatten. Man kann sogar mit Null anfangen.

Ist also	r =	0,	1,	2 . . .
so ist	q =	2,	7,	12 . . .
	p =	2,	8,	14 . . .
	z =	4,	15,	26 . . .
	y =	92,	75,	58 . . .
	x =	24,	30,	36 . . .

Da alle diese Reihen arithmetische Progressionen sind, so kann man sie leicht weiter fortsetzen. Aus der fallenden Reihe für y findet sich, wie weit die Reihe fortgesetzt werden kann, ohne auf negative Größen zu kommen. Da nehmlich der Unterschied derselben = 17 ist, so dividire man mit dieser Zahl in 92, als das erste Glied; der Quotient 5 zeigt an, daß außer dem ersten noch 5 Glieder, also überhaupt sechse möglich sind. Der letzte unter den möglichen Fällen der Auflösung wird also durch die sechsten Glieder der Reihen für x, y, z dargestellt. Diese Glieder aber sind z = 59, y = 7, x = 54.

Anstatt die Werthe für z, y, x jedesmal aus den Werthen für p, q, r zu entwickeln, kann man sich auch allgemeine Ausdrücke für jene Größen verschaffen, die bloß von r abhängig sind und keinen Bruch enthalten.

Denn da $q = 5r + 2$, und $p = q + r$ ist: so ist auch $p = 5r + 2 + r = 6r + 2$. Ferner ist $z = p + q = 6r + 2 + 5r + 2 = 11r + 4$; $y = 98 - z - p = 98 - (11r + 4) - (6r + 2) = 98 - 17r - 6 = 92 - 17r$; und $x = 120 - y - z = 120 - (92 - 17r) - (11r + 4) = 120 - 92 + 17r - 11r - 4 = 24 + 6r$. Also

$$x = 24 + 6r$$
$$y = 92 - 17r$$
$$z = 4 + 11r.$$

Aus dieſer Darſtellung der Werthe einer jeden Größe erhellet ſogleich die ganze Beſchaffenheit der Reihe, die dieſe Werthe ausmachen; und man erhält die Werthe, indem man für r der Reihe nach 0, 1, 2, 3 u. ſ. w. ſetzt.

Zur Probe kann man aus den Reihen von x, y, z irgend drey zuſammengehörige Glieder nehmen, und das Glied aus der Reihe von x mit $3\frac{1}{2}$, das aus der Reihe von y mit $4\frac{1}{2}$, und das aus der Reihe von z mit $5\frac{1}{2}$ multipliziren, und die Produkte zuſammen addiren; alsdann muß die Summe = 540 ſeyn.

5) Es kauft jemand 50 Stück Vieh, Ochſen, Schweine und Kälber, für 684 Rthlr.; und zwar einen Ochſen zu 40 Rthlr., ein Schwein zu 8 Rthlr. und ein Kalb zu 3 Rthlr.; wie viel Stück hat er von jeder Art bekommen?

Anſatz: Die Anzahl der Ochſen ſey = x, die der Schweine = y, die der Kälber = z: ſo iſt 1) $x + y + z = 50$; 2) $40x + 8y + 3z = 684$.

Auflöſung:

1) $x + y + z = 50$; folglich $x = 50 - y - z$

2) $40x + 8y + 3z = 684$

folglich $40x = 684 - 8y - 3z$

und $x = (684 - 8y - 3z) : 40$

Aus beyden Gleichungen für x folgt

$$50 - y - z = (684 - 8y - 3z) : 40$$

oder, auf beyden Seiten mit 40 multiplizirt

$$2000 - 40y - 40z = 684 - 8y - 3z$$

ferner $2000 - 684 + 3z - 40z = 40y - 8y$

d. i. $1316 - 37z = 32y$

folglich $y = (1316 - 37z) : 32 = 41 - z + \frac{4 - 5z}{32}$

$$= 41 - z - \frac{5z - 4}{32} \text{ oder } = 41 - z - p$$

daher $\frac{5z - 4}{32} = p$; folglich $z = (32p + 4) : 5$

$$= 6p + \frac{2p + 4}{5} = 6p + q.$$

Also $\frac{2p+4}{5} = q$; folglich $p = (5q - 4) : 2 = 2q - 2 + \frac{q}{2} = 2q - 2 + r$.

Also $\frac{q}{2} = r$; folglich $q = 2r$.

Setzt man diesen Werth für q in die Gleichung für p, und diesen wieder in die Gleichung für z u. s. w. so findet sich

$x = 7 + 5r$
$y = 55 - 37r$
$z = 32r - 12.$

Ist nun	$r =$	0,	1,	2
so ist	$x =$	7,	12,	17
	$y =$	55,	18,	-19
	$z =$	-12,	20,	52

In dem ersten von diesen drey Fällen ist z, und in dem letzten y negativ; da aber negative Werthe hier nicht zulässig sind, so ist nur der mittlere Fall als gültig anzusehen. Die Aufgabe hat also nur eine einzige Auflösung, und ist daher einer bestimmten gleich zu achten.

6) Eine Gesellschaft von 15 Personen, Männer, Frauen, Knaben und Mädchen, hat 4 Rthlr. 14 gl. oder 110 gl. zu bezahlen; dazu gibt ein Mann 10 gl., eine Frau 8 gl., ein Knabe 4 gl., ein Mädchen 3 gl.; wie viel waren der Männer, der Frauen u. s. w.?

Ansatz: Man bezeichne die Anzahl der Männer durch u, die der Frauen durch x, die der Knaben durch y, und die der Mädchen durch z: so ist 1) $u + x + y + z = 15$; 2) $10u + 8x + 4y + 3z = 110$. Hier sind zu vier unbekannten Größen nur zwey Gleichungen; dadurch wird die Unbestimmtheit der Aufgabe noch größer, und die Auflösung derselben zusammengesetzter, als in den Fällen, wo nur eine Gleichung weniger ist, als unbekannte Größen.

Auflösung:

1) $u + x + y + z = 15$; folglich $u = 15 - x - y - z$
2) $10u + 8x + 4y + 3z = 110$
folglich $10u = 110 - 8x - 4y - 3z$
und $u = (110 - 8x - 4y - 3z) : 10$

Aus beyden Gleichungen für u folgt

$15 - x - y - z = (110 - 8x - 4y - 3z) : 10$
lglich, mit 10 multiplizirt,
$150 - 10x - 10y - 10z = 110 - 8x - 4y - 3z$
ner, den zweyten Theil der Gleichung von dem ersten ab-
zogen,

$$40 - 2x - 6y - 7z = 0$$
$$\text{daher } 2x = 40 - 6y - 7z$$
$$\text{und } x = 20 - 3y - \frac{7z}{2}.$$

ier sind in dem Werthe für x noch zwey unbekannte Grö-
n enthalten, die willkührlich angenommen werden müssen.
un zeigt sich, daß z nur durch gerade Zahlen ausgedrückt
erden kann, wenn x keinen Bruch enthalten soll. Man setze
so I. $z = 2$; und indem man diesen Werth als beständig an-
eht, nehme man für y die natürlichen Zahlen der Reihe nach,
nd bestimme daraus zuerst x und dann u. Es sey also

I. für $z = 2$,
$y = 1, 2, 3, 4$
so ist $x = 10, 7, 4, 1$
und $u = 2, 4, 6, 8$

Sollte man die Reihen noch weiter fortsetzen, so würde x
$= -2$ werden, welches hier nicht gültig ist. Man setze also

II. $z = 4$
und $y = 1, 2$
so ist $x = 3, 0$
und $u = 7, 9.$

Für diesen Werth von z ist also nur ein Fall möglich.
Man setze

III. $z = 6$
und $y = 1$
so ist $x = -4$
und $u = 12.$

Also ist für diesen Werth von z gar kein Fall möglich.
Noch weniger würde also einer für höhere Werthe von z statt
inden können.

Folglich sind für diese Aufgabe überhaupt nur 5 ver-
schiedene Auflösungen möglich.

Nicht selten gestatten Aufgaben dieser Art, in denen 4
unbekannte Größen und nur zwey Gleichungen enthalten
ind, mehrere hundert verschiedene Auflösungen. Absichtlich
aber *ist hier ein leichterer* Fall gewählt worden.

Was eine Dame gibt, beträgt $\frac{7}{9} \cdot \frac{1}{9}x = \frac{7}{81}x$; folglich ist das, was alle Damen zusammengeben $\frac{7}{9}x \cdot \frac{7}{81}x = \frac{49}{729}x^2$. Da nun das, was sowohl die Herren als die Damen geben, zusammen 29 Rthlr. 18 gl. oder 714 gl. ausmacht, so ist $\frac{10}{81}x^2 + \frac{49}{729}x^2 = 714$.

Auflösung: $\frac{10}{81}x^2 + \frac{49}{729}x^2 = 714$

d. i. $\frac{790}{729}x^2 + \frac{49}{729}x^2 = 714$

oder $\frac{139}{729}x^2 = 714$

folglich $x^2 = 714 : \frac{139}{729} = 3969$

folglich $x = \sqrt{3969} = 63$.

Die ganze Gesellschaft war also 63 Personen stark; davon betrug die Anzahl der Herren $\frac{7}{9} \cdot 63 = 35$; die Anzahl der Damen $\frac{2}{9} \cdot 63 = 28$.

4) Ein Kassirer vertheilt 1450 Rthlr. in mehrere Pakete, und legt in jedes Paket fünfmal so viel Thaler als er Pakete macht, und in das letzte noch 5 Rthlr. darüber. Wie viel waren Pakete, und wie viel Geld hat er in jedes gelegt?

Ansatz: Die Anzahl der Pakete sey $= x$, so ist das was er in jedes derselben legt, $= 5x$; folglich in alle zusammen $5xx = 5x^2$; und überdieß noch in das letzte 5 Rthlr., also zusammen $5x^2 + 5$. Da dieses nun die vertheilte Summe ausmacht, so ist $5x + 5 = 1450$.

Auflösung: $5x^2 + 5 = 1450$

folglich $5x^2 = 1450 - 5 = 1445$

und $x^2 = 1445 : 5 = 289$

also $x = \sqrt{289} = 17$.

In jedes Paket kamen folglich $5 \cdot 17 = 85$ Rthlr. und in das letzte 90 Rthr.

5) Es berichtet jemand einem andern eine Summe, die er eingenommen, auf folgende Art: Die Hälfte der Summe ist eben so viel mal über 54 Rthlr. als das Drittel derselben unter 1156 Rthlr. Wie groß war sie?

Ansatz: Die Summe sey $= x$, also die Hälfte $= \frac{1}{2}x$ und das Drittel $= \frac{1}{3}x$. Um auszudrücken, wie vielmal mehr $\frac{1}{2}x$ als 54 sey, dividire man mit diesem in jenes, also: $\frac{1}{2}x : 54$; und eben so dividire man mit $\frac{1}{3}x$ in 1156, um zu finden, wie vielmal weniger jenes sey als dieses, also

1156 : $\frac{1}{2}x$. Da nun beyde Quotienten gleich seyn sollen, so ist $\frac{1}{2}x : 54 = 1156 : \frac{1}{2}x$.

Auflösung: $\frac{1}{2}x : 54 = 1156 : \frac{1}{2}x$

folglich $\frac{1}{2}x = \frac{1156}{\frac{1}{2}x} \cdot 54 = \frac{62424}{\frac{1}{2}x}$

ferner $\frac{1}{2}x \cdot \frac{1}{2}x = 62424$

d. i. $\frac{1}{4}x^2 = 62424$

also $x^2 = 62424 \cdot 6 = 374544$

und $x = \sqrt{374544} = 612$.

6) Zwey Personen A und B reisen von zwey Orten a und b zugleich aus; sie treffen unterwegs zusammen, und A kommt 18 Stunden darauf nach b; B aber langt erst 32 Stunden nach dem Zusammentreffen in a an; wie lange Zeit ist jeder unterwegs gewesen, vorausgesetzt, daß er die Geschwindigkeit, mit welcher er von Anfang an gereist ist, den ganzen Weg unverändert beybehalten hat?

Ansatz: Man nenne die Zeit, die jeder vor dem Zusammentreffen gebraucht hat, x, so hat A überhaupt $x + 18$, und B hat $x + 32$ Stunden zur Reise nöthig gehabt. Denselben Weg nun, welchen B in x Stunden zurücklegte, legt A in 18 Stunden zurück. Es verhält sich daher die Geschwindigkeit von A zu der von B, wie $x : 18$*). Eben diese Geschwindigkeit aber verhält sich auch wie $32 : x$, da A denselben Weg in x Stunden zurücklegte, zu welchem B 32 Stunden gebrauchte. Da nun die Geschwindigkeit eines jeden den ganzen Weg unverändert bleibt, so ist $32 : x = x : 18$.

Auflösung: $32 : x = x : 18$. Dieß ist eine geometrische Proportion, folglich ist $x^2 = 18 \cdot 32 = 576$, und $x = \sqrt{576} = 24$.

A hat also $24 + 18$, d. i. 42, und B $24 + 32$, d. i. 56 Stunden zu der ganzen Reise gebraucht.

---

*) Den physikalischen Satz, worauf sich dieses gründet, s. in meinem Lehrbuch der Physik §. 41. Nr. 2.

Wurzel $x - \frac{1}{2}f = \pm\sqrt{(h + \frac{1}{4}f^2)}$; folglich $x = +\frac{1}{2}f \pm \sqrt{(h + \frac{1}{4}f^2)}$.

Wenn h poſitiv iſt, ſo iſt in beyden Fällen der eine Werth von x poſitiv, der andere negativ; iſt aber h negativ und kleiner als $\frac{1}{4}f^2$, ſo ſind im erſten Fall beyde Werthe von x negativ, und im zweyten poſitiv.

521. Die erläuterte Art der Ergänzung einer unvollſtändigen quadratiſchen Gleichung ſetzt voraus: 1) daß das Quadrat von x keinen andern Coefficienten als 1 habe; 2) daß es poſitiv ſey. Dieſe Bedingungen aber ſind bey einer jeden quadratiſchen Gleichung leicht zu erhalten. Denn was die letztere anbetrifft, ſo darf man nur, wenn x^2 negativ iſt, es auf die andere Seite des Gleichungszeichens ſetzen, um es poſitiv zu machen. Wäre z. B. $ax - x^2 = p$, ſo wäre $ax - p = x^2$, und $x^2 - ax = -p$; oder wenn $g - x^2 = ax$ wäre, ſo wäre $g = x^2 + ax$.

Was die erſtere Bedingung betrifft, ſo muß man, wenn x^2 einen andern Coefficienten als 1 hat, die ganze Gleichung durch dieſen Coefficienten dividiren. Es ſey z. B. $ax^2 + bx = c$; man dividire die Gleichung durch a, ſo erhält man $x^2 + \frac{b}{a}x = \frac{c}{a}$.

Dieſe Regel läßt ſich anwenden, a mag eine ganze oder gebrochene Zahl ſeyn.

522. Enthält der eine Theil der Gleichung mehr als zwey Glieder, ſo muß man diejenigen Glieder, die weder x noch x^2 enthalten, auf die andere Seite des Gleichungszeichens ſetzen. Es ſey z. B. $x^2 + bx + c = 0$, ſo ſetze man $x^2 + bx = -c$; alsdann kann man erſt zur Ergänzung ſchreiten.

523. Aus dem Verfahren in den angezeigten Fällen kann man leicht beurtheilen, wie man auch in ſolchen Fällen zu verfahren habe, die nicht ausdrücklich hier

ngeführt sind. Auch wird aus folgenden Beyspielen ich die Anwendung der gegebenen Regeln ersehen lassen.

1) Man suche ein Paar Zahlen, deren Differenz 12 nd Produkt 85 ist.

Ansatz: Die eine Zahl sey x, so ist die andere $x+12$; das Produkt beyder ist $x(x+12) = x^2 + 12x = 85$.

Auflösung: $x^2 + 12x = 85$. Diese quadratische Gleichung hat ganz die Form der obigen $(x^2 + fx = h)$; f ist hier $= 12$, also $\frac{1}{2}f = 6$, und $(\frac{1}{2}f)^2 = 36$, welches zu beyden Theilen addirt werden muß. Man erhält also $x^2 + 12x + 36 = 85 + 36 = 121$. Nun ist die Wurzel von jenem $= x + 6$. Folglich ist $x + 6 = \pm\sqrt{121} = \pm 11$; und daher $x = -6 \pm 11 = 5$ oder -17.

Probe. Ist $x = 5$, so ist $x + 12 = 17$, und $5 \cdot 17 = 85$. Ist $x = -17$, so ist $x + 12 = -5$, und $-5 \cdot (-17) = 85$.

2) Es kauft jemand eine Anzahl Bouteillen Wein für 30 Rthlr. 8 gl. und gibt für jede Bout. 2 gl. mehr als die Anzahl der Bouteillen beträgt; wie groß war diese, und wie theuer hat er jede bezahlt?

Ansatz: Die Anzahl der Bout. sey $= x$, so kostet jede $(x+2)$ gl., folglich kosten alle zusammen $x \cdot (x+2)$ gl. Nun ist der Preis derselben zu 30 Rthlr. 8 gl., d. i. 728 gl. bestimmt: folglich ist $x(x+2) = 728$.

Auflösung: $x(x+2) = 728$, d. i. $x^2 + 2x = 728$. Diese Gleichung kann wieder mit $x^2 + fx = h$ verglichen werden: f ist hier $= 2$; folglich $\frac{1}{2}f = 1$, und $(\frac{1}{2}f)^2$ auch $= 1$. Dieses zu beyden Theilen addirt, gibt $x^2 + 2x + 1 = 729$. Folglich ist $x + 1 = \pm\sqrt{729} = \pm 27$, und daher $x = -1 \pm 27 = 26$ oder -28. Der letztre Werth kann hier nicht statt finden, weil die Anzahl der Bout. keine negative Zahl seyn kann, also muß der erstre gelten. Hiernach ist der Preis einer jeden Bout. $x + 2 = 28$ gl.

Probe: 26 Bout. zu 28 gl. machen $26 \cdot 28$ gl. $= 728$ gl. $= 30$ Rthlr. 8 gl.

3) Eine Gesellschaft hat 190 Rthlr. zu bezahlen; dazu macht der Beytrag eines jeden Mitgliedes 9 Rthlr.

weniger als Mitglieder ſind. Wie ſtark war die Geſellſchaft und wie viel hat jedes Mitglied gegeben?

Anſatz: Die Anzahl der Mitglieder ſey $= x$, ſo hat jedes Mitglied $(x - 9)$ Rthlr. gegeben, folglich alle zuſammen $x(x - 9)$ Rthlr. Man erhält alſo $x(x - 9) = 190$.

Auflöſung: $x(x - 9) = 190$, d. i. $x^2 - 9x = 190$. Hier iſt die Gleichung $x^2 - fx = h$ anzuwenden: f iſt $= 9$, alſo $\frac{1}{2}f = \frac{9}{2}$; $(\frac{1}{2}f)^2 = \frac{81}{4}$. Es iſt alſo $x^2 - 9x + \frac{81}{4} = 190 + \frac{81}{4} = \frac{841}{4}$. Die Wurzel aus $x^2 - 9x + \frac{81}{4}$ iſt $x - \frac{9}{2}$; folglich iſt $x - \frac{9}{2} = \pm\sqrt{\frac{841}{4}} = \pm\frac{29}{2}$; und $x = \frac{9}{2} \pm \frac{29}{2} = \frac{38}{2} = 19$ oder $= -\frac{20}{2} = -10$. Der letztre Werth kann hier wieder nicht ſtatt finden; alſo iſt die Anzahl der Mitglieder $= 19$, und der Beytrag eines jeden $= 19 - 9 = 10$ Rthlr.

4) Es kauft jemand einen Garten, der 1190 Quadratruthen groß iſt, und deſſen Breite eine Ruthe weniger beträgt als die Länge; wie lang und breit war er?

Anſatz: Die Länge des Gartens ſey $= x$ Ruthen, ſo iſt die Breite $= x - 1$, und der Flächeninhalt $= x(x - 1)$. Es iſt alſo $x(x - 1) = 1190$.

Auflöſung: $x(x - 1) = 1190$, d. i. $x^2 - x = 1190$. Hier iſt $f = 1$, folglich $\frac{1}{2}f = \frac{1}{2}$, und $(\frac{1}{2}f)^2 = \frac{1}{4}$. Man erhält alſo $x^2 - x + \frac{1}{4} = 1190 + \frac{1}{4} = \frac{4761}{4}$. Nun iſt die Wurzel aus jenem $= x - \frac{1}{2}$; folglich iſt $x - \frac{1}{2} = \pm\sqrt{\frac{4761}{4}} = \pm\frac{69}{2}$; und $x = \frac{1}{2} \pm \frac{69}{2} = \frac{70}{2} = 35$; oder $= -\frac{68}{2} = -34$. Das letztre gilt hier wieder nicht, alſo die Länge 35 Ruthen, und die Breite $= x - 1 = 34$ R.

5) Ein Kaufmann bezahlt für eine Anzahl Tücher 1260 Rthlr.; jedes derſelben koſtet 9 Rthlr. mehr als die fünffache Anzahl der Tücher, wie viel waren der Tücher, und wie viel hat jedes gekoſtet?

Anſatz: Die Anzahl der Tücher ſey x, ſo koſtet jedes derſelben $(5x + 9)$ Rthlr., alſo alle zuſammen $x(5x + 9)$ Rthlr. Da ſie nun 1260 Rthlr. koſten, ſo iſt $x(5x + 9) = 1260$.

Auflöſung: $x(5x + 9) = 1260$, d. i. $5x^2 + 9x = 1260$. Man dividire dieſe Gleichung erſt durch 5, ſo er-

hält man $x^2 + \frac{8}{5}x = 252$. Um diese Gleichung zu vervollständigen, nehme man die Hälfte von $\frac{8}{5}$, d. i. $\frac{8}{10}$, erhebe dieß aufs Quadrat ($\frac{81}{100}$), und addire dasselbe zu beyden Theilen hinzu. Es ist also $x^2 + \frac{8}{5}x + \frac{81}{100} = 252 + \frac{81}{100} = \frac{25281}{100}$; folglich $x + \frac{8}{10} = \pm\sqrt{\frac{25281}{100}} = \pm\frac{159}{10}$ und $x = -\frac{8}{10} \pm \frac{159}{10}$ d. i. entweder $= \frac{150}{10} = 15$, oder $= -\frac{168}{10} = -16\frac{8}{10}$. Da der letztre Werth hier keinen Sinn hat, so ist nur der erstre gültig. Die Anzahl der Tücher war also 15, und der Preis eines jeden $5 \cdot 15 + 9 = 84$ Rthlr.

6) Es soll ein Brunnen gegraben werden, und für den ersten Schuh Tiefe werden 3 gl., für den zweyten 5 gl.; für den dritten 7 gl. und so fort, für jeden der folgenden immer 2 gl. mehr als für den vorhergehenden bezahlt. Der ganze Brunnen kostet 7 Rthlr. zu graben; wie viel Schuh betrug seine Tiefe?

Anmerk. Diese Aufgabe faßt eine arithmetische Progression in sich, deren erstes Glied, Differenz und Summe gegeben ist, woraus die Anzahl der Glieder gesucht werden soll. Von diesem Fall ist oben (386.) erinnert worden, daß er auf eine quadratische Gleichung führe. Daher hier ein Beyspiel desselben.

Ansatz: Es sey die Anzahl der Glieder, d. i. die Tiefe des Brunnens in Schuhen ausgedrückt, $= x$, so ist nach obigem (381.) die ganze Summe der Glieder $3x + \frac{x(x-1)}{2} \cdot 2$; und da diese 7 Rthlr. oder 168 gl. beträgt, so ist $168 = 3x + \frac{x(x-1)}{2} \cdot 2$.

Auflösung: $168 = 3x + \frac{x(x-1)}{2} \cdot 2 = 3x + x(x-1) = 3x + x^2 - x = x^2 + 2x$. Ergänzt man diese Gleichung, so ist $x^2 + 2x + 1 = 168 + 1 = 169$. Folglich ist $x + 1 = \pm\sqrt{169} = \pm 13$ und $x = -1 \pm 13$, d. i. entweder $= 12$ oder $= -14$. Hier paßt wieder nur der erstere Werth. Die Tiefe des Brunnens betrug also 12 Schuh.

7) Es verkauft jemand eine Uhr für 144 Rthlr. und gewinnt daran so viel Procente, als ihn die Uhr gekostet hat: wie theuer hatte er die Uhr gekauft?

Anſatz: Die Uhr habe x Rthlr. gekoſtet, ſo iſt das, was beym Verkauf gewonnen wird, (144 — x) Rthlr. Da dieß nun x Procente ausmacht, ſo iſt $100 : x = x : (144 - x)$.

Auflöſung: $100 : x = x : (144 - x)$. Folglich $x^2 = 100 \cdot (144 - x) = 14400 - 100x$; ferner $x^2 + 100x = 14400$. Dieſe Gleichung ergänzt gibt $x^2 + 100x + 50^2 = 14400 + 50^2 = 16900$. Folglich iſt $x + 50 = \pm\sqrt{16900} = \pm 130$, und $x = -50 \pm 130$, d. i. entweder $= 80$ oder $= -180$. Auch hier gilt nur der erſtere Werth.

8) Eine Geſellſchaft hatte in einem Wirthshauſe eine Zeche von 5 Rthlr. zu bezahlen. 3 aus der Geſellſchaft ſollten frey gehalten werden; daher trug es einen jeden der übrigen 2 gl. mehr, als wenn alle bezahlt hätten; wie ſtark war die Geſellſchaft, und wie viel hat jeder bezahlt?

Anſatz: Die Anzahl der Mitglieder ſey $= x$, ſo wäre das, was jeder zu bezahlen hätte, wenn alle bezahlten, 5 Rthlr. oder 120 gl. dividirt durch x; da aber 3 nicht bezahlen, ſo kommt auf jeden der übrigen $\frac{120}{x-3}$, und dieß iſt 2 gl. mehr als jenes, alſo: $\frac{120}{x-3} = \frac{120}{x} + 2$.

Auflöſung: $\frac{120}{x-3} = \frac{120}{x} + 2 = \frac{120+2x}{x}$. Man multiplizire beyde Theile mit x, ſo iſt $\frac{120x}{x-3} = 120 + 2x$; und dieſes wiederum mit $(x - 3)$, ſo erhält man $120x = 120x + 2x^2 - 360 - 6x$; folglich $0 = 2x^2 - 360 - 6x$; ferner $2x^2 - 6x = 260$. Dieſe Gleichung mit 2 dividirt gibt $x^2 - 3x = 180$; und dieſe Gleichung ergänzt, iſt: $x^2 - 3x + \frac{9}{4} = 180 + \frac{9}{4} = \frac{729}{4}$. Folglich $x - \frac{3}{2} = \pm\sqrt{\frac{729}{4}} = \pm\frac{27}{2}$, und $x = +\frac{3}{2} \pm \frac{27}{2}$, d. i. entweder $= \frac{30}{2} = 15$, oder $= -\frac{24}{2} = -12$. Da nur der erſtere Werth in Betrachtung kommen kann, ſo war die Geſellſchaft 15 Perſonen ſtark, von welchen 12 Perſonen bezahlen, und zwar jede 10 gl. Hätten alle 15 bezahlt, ſo würde auf jede nur 8 gl., alſo 2 gl. weniger gekommen ſeyn.

9) Es nimmt jemand 4 Arbeiter an, und verspricht edem auf den Tag so viele Groschen, als er Tage ar- eiten würde. Nun bekommen alle zusammen am Ende 21 Rthlr. und zwar trägt es A auf den Tag 2 gl. mehr ls B, B 2 gl. mehr als C, C 2 gl. mehr als D; wie iel Tage hat jeder gearbeitet?

Ansatz: Man nenne die Zahl der Tage, welche D ge- rbeitet, x: so hat C gearbeitet $(x + 2)$ Tage, B $(x + 4)$ Tage, A $(x + 6)$ Tage. Nun hat jeder auf den Tag so iel Groschen bekommen, als er Tage gearbeitet, also hat

D überhaupt bekommen xx gl. $= x^2$
C — — — $(x + 2) \cdot (x + 2) = x^2 + 4x + 4$
B — — — $(x + 4) \cdot (x + 4) = x^2 + 8x + 16$
A — — — $(x + 6) \cdot (x + 6) = x^2 + 12x + 36$

Also haben alle zusammen bekommen $(4x^2 + 24x + 56)$ gl. Folglich ist dieses $=$ 21 Rthlr. oder 504 gl.

Auflösung: $4x^2 + 24x + 56 = 504$. Man divi- dire die Gleichung durch 4, so ist $x^2 + 6x + 14 = 126$. Wäre 14 das Quadrat von $6 : 2 = 3$, so wäre die Glei- chung ein vollständiges Quadrat; es ist aber um 5 größer als $3^2 = 9$. Man ziehe daher von beyden Theilen der Glei- chung 5 ab; dadurch erhält man $x^2 + 6x + 9 = 121$, wel- ches ein vollständiges Quadrat seyn muß. Die Wurzel des ersten Theils ist $x + 3$; folglich ist $x + 3 = \pm \sqrt{121} = \pm 11$; und $x = -3 \pm 11 = 8$ oder -14. D hat also 8 Tage gearbeitet, C 10, B 12 und A 14. Eben so viel Gro- schen hat jeder täglich bekommen. Dieß macht für D zusam- men 64 gl., für C 100 gl., für B 144 gl., für A 196 gl.; im Ganzen 504 gl. oder 21 Rthlr.

10) Die Tiefe einer Grube aus der Zeit zu finden, welche zwischen dem Augenblick, da man einen Stein in dieselbe fallen läßt, und dem Augenblick, da man den Schall des auf den Boden schlagenden Steins hört, ver- streicht. Der Widerstand, welchen die Luft dem fallen- den Steine leistet, wird hier bey Seite gesetzt.

Ansatz: Man nenne die verflossene Zeit, in Secunden ausgedrückt, t: ferner sey derjenige Theil derselben, wel- chen der Stein zum Herunterfallen braucht, $= x$: so ist

derjenige, welchen der Schall heraufzukommen nöthig hat, $t - x$. Ist nun der Raum, durch welchen ein Körper in der ersten Secunde fällt, in Fußen ausgedrückt, $= g$, und der Raum, durch welchen der Schall in einer Secunde geht, in Fußen ausgedrückt, $= c$: so ist der Raum, durch welchen der Stein in x Secunden fällt, $= x^2 g$; und der, durch welchen der Schall in $t - x$ Secunden geht, $= (t - x) . c$.*) Beyde Räume aber sind einander gleich, folglich ist $x^2 g = (t - x) c$.

Auflösung: $x^2 g = (t - x) c = ct - cx$; folglich $x^2 g + cx = ct$. Dies durch g dividirt, gibt $x^2 + \frac{c}{g} x = \frac{c}{g} t$. Ergänzt man diese Gleichung, so erhält man $x^2 + \frac{c}{g} x + \left(\frac{c}{2g}\right)^2 = \frac{c}{g} t + \left(\frac{c}{2g}\right)^2 = \frac{4cgt + c^2}{4g^2}$;

folglich $x + \frac{c}{2g} = \sqrt{\frac{4cgt + c^2}{2g^2}} = \frac{\sqrt{(4cgt + c^2)}}{2g}$

und $x = \frac{-c + \sqrt{(4cgt + c^2)}}{2g}$.

Anmerk. Wenn man für t eine bestimmte Zahl setzt, so wird wohl in den meisten Fällen der Werth von x durch eine Irrationalgröße ausgedrückt werden. Ueberhaupt kann es oft geschehen, daß, wenn gleich eine quadratische Gleichung vollständig ist, doch ihre Wurzel irrational ist. Sie kann auch auf unmögliche Größen führen, wie in folgendem Beyspiele:

11) Man soll diejenigen Cubikwurzeln von 8 finden, welche unmögliche Größen enthalten (300, 2.).

Auflösung. Man setze eine dieser Wurzeln $= x$, so ist $x^3 = 8$, folglich $x^3 - 8 = 0$. Ferner da 2 die rationale Cubikwurzel von 8 ist, so dividire man $x^3 - 8$ durch $x - 2$. Der Quotient ist $x^2 + 2x + 4$. Diesen kann man $= 0$ setzen, weil jeder Quotient mit dem Divisor multiplizirt den Dividendus gibt, und dieser hier $= 0$ ist. Ein Produkt aber kann nur dann $= 0$ werden, wenn einer der

*) Die physikalischen Lehrsätze, auf welche sich diese Gleichungen gründen, s. in meinem Lehrbuch der Physik u. 156 ff.

Factoren $= 0$ ist. Da nun x von 2 verschieden seyn soll, so ist nicht der Divisor $(x - 2)$, sondern der Quotient $= 0$.

Aus $x^3 + 2x + 4 = 0$ erhält man $x^2 + 2x = -4$; diese Gleichung vervollständigt, gibt $x^2 + 2x + 1 = -4 + 1 = -3$. Folglich ist $\sqrt{(x^2 + 2x + 1)} = \pm\sqrt{-3}$ d. i. $x + 1 = \pm\sqrt{-3}$; also $x = -1 \pm \sqrt{-3}$.

Man erhält also zwey Werthe für x, nehmlich $-1 + \sqrt{-3}$ und $-1 - \sqrt{-3}$ welches die beyden unmöglichen Cubikwurzeln von 8 sind. (Vergl. oben 306. 3s Beyspiel.)

Anmerk. Setzt man eine Cubikzahl $= a^3$ und ihre rationale Wurzel $= a$, so sind ihre beyden andern $\frac{-a + a\sqrt{-3}}{2}$ und $\frac{-a - a\sqrt{-3}}{2} = a\,\frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$.

---

524. In den unvollständigen quadratischen Gleichungen, die wir bisher betrachtet haben, war das fehlende Glied immer das dritte von dem Quadrat einer zweytheiligen Größe, deren einer Theil x und der andere eine bekannte Größe war. Es kann aber auch in einer quadratischen Gleichung das mittlere Glied fehlen, und beyde Theile der Wurzel können unbekannt seyn; ist nur noch eine zweyte Gleichung gegeben, aus welcher sich das mittlere Glied ergänzen läßt, so kann die Gleichung ebenfalls aufgelöst werden.

525. Es sey z. B. $x^2 + y^2 = a$, und $xy = b$: so setze man $x^2 + 2xy + y^2 = a + 2b$; alsdann ist $x + y = \sqrt{(a + 2b)}$. Ferner setze man $x^2 - 2xy + y^2 = a - 2b$: so ist $x - y = \sqrt{(a - 2b)}$. Aus $x + y$ und $x - y$ aber lassen sich x und y finden (180.).

526. Dieß führt auf quadratische Gleichungen mit zwey unbekannten Größen, zu deren Auffindung auch zwey verschiedene Gleichungen gehören. Indessen können dabey Verbindungen vorkommen, die

auf cubische oder biquadratische Gleichungen führen; so wie andere, die durch eine einfache Gleichung aufgelöst werden. Das letztre findet z. B. in folgender Aufgabe statt:

$x^2 - y^2 = 57$; und $x - y = 3$. Es ist nehmlich $x^2 - y^2 = (x + y) \cdot (x - y)$; also $(x + y) \cdot (x - y) = 57$; da nun $x - y = 3$ ist, so ist $3 (x + y) = 57$; folglich $x + y = 57 : 3 = 19$. Aus $x + y$ und $x - y$ findet sich $2x = 22$, und $2y = 16$; also $x = 11$, $y = 8$.

527. Noch einige leichtere hieher gehörige Aufgaben sind folgende:

1) $x^2 + y^2 = 250$; $x - y = 4$.

Man mache $(x - y)^2$, d. i. $x^2 - 2xy + y^2 = 16$, und ziehe dieß von $x^2 + y^2 = 250$ ab: so erhält man $2xy = 234$. Alsdann setze man $x^2 + 2xy + y^2 = 250 + 234 = 484$: so ist $x + y = \sqrt{484} = 22$: also $x = 13$; $y = 9$.

2) $x^2 - y^2 = 240$; $xy = 119$.

Man setze $x^2 = 240 + y^2$. Aus der andern Gleichung ist $x = \frac{119}{y}$; folglich $x^2 = \frac{119^2}{y^2} = \frac{14161}{y^2}$; folglich ist $240 + y^2 = \frac{14161}{y^2}$. Diese Gleichung mit y^2 multiplizirt, gibt $240 y^2 + y^4 = 14161$. Dieß ist zwar eine biquadratische Gleichung, sie läßt sich aber wie eine quadratische auflösen. Denn man setze $y^2 = z$, so ist $y^4 = z^2$; folglich wird die Gleichung $240 z + z^2 = 14161$, oder nach der gewöhnlichen Ordnung $z^2 + 240 z = 14161$. Dieß ergänzt, gibt $z^2 + 240 z + 120^2 = 14161 + 120^2 = 28561$. Folglich ist $z + 120 = \sqrt{28561} = 169$, und $z = 169 - 120 = 49$. Da nun $z = y^2$ ist, so ist $y^2 = 49$, folglich $y = \sqrt{49} = 7$; x war $= \frac{119}{y}$ also $= \frac{119}{7} = 17$.

3) $3x^2 + 2y^2 = 2117$; $5x + 3y = 158$.

Aus der ersten Gleichung ist $x^2 = (2117 - 2y^2) : 3$; aus der zweyten ist $x = (158 - 3y) : 5$; folglich $x^2 = (158 - 3y)^2 : 5^2 = (24964 - 948y + 9y^2) : 25$. Beyde

Werthe für x^2 geben die Gleichung $(2117 - 2y^2) : 3 = 24964 - 948y + 9y^2) : 25$. Multiplizirt man diese sowohl mit 3, als mit 25, so erhält man

$$52925 - 50y^2 = 74892 - 2844y + 27y^2$$

und hieraus

$$77y^2 - 2844y = -21967;$$

ferner $y^2 - \frac{2844}{77}y = -\frac{21967}{77}$

folglich $y^2 - \frac{2844}{77}y + \left(\frac{1422}{77}\right)^2 = \left(\frac{1422}{77}\right)^2 - \frac{21967}{77} = \frac{330625}{77^2}$;

folglich $y - \frac{1422}{77} = \pm\sqrt{\frac{330625}{77^2}} = \pm\frac{575}{77}$

und $y = \frac{1422}{77} \pm \frac{575}{77}$, d. i. entweder $= 25\frac{72}{77}$ oder $= 11$.

Der erstere Werth von y gibt $x = 16\frac{5}{77}$; und der letztere $= 25$. Beyde thun der Aufgabe Gnüge, indessen geben die letztern eine bequemere Auflösung. Es erhellet daher aus diesem Beyspiele, daß man die negativen Wurzeln der Quadrate, bey Auflösung quadratischer Gleichungen, nicht vernachlässigen dürfe.

528. Zum Schluß stehe hier noch die Aufgabe: **Ein Paar Zahlen zu finden, deren Summe, Produkt und Differenz der Quadrate einander gleich sind.**

Ansatz: Man nenne die Zahlen x und y, so ist $x + y = xy = x^2 - y^2$.

Auflösung: $x + y = x^2 - y^2 = (x+y) \cdot (x-y)$;

$$\text{folglich ist } x - y = \frac{x+y}{x+y} = 1$$

$$x = 1 + y.$$

Ferner ist $x + y = xy$; folglich $x = xy - y$; und setzt man in diese Gleichung statt x den eben gefundenen Werth desselben, so ist

$$1 + y = (1 + y)\,y - y = y + y^2 - y = y^2$$

$$\text{folglich ist } y^2 - y = 1;$$

dieß ergänzt, ist $y^2 - y + \frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$

$$\text{folglich } y - \tfrac{1}{2} = \pm\sqrt{\tfrac{5}{4}} = \frac{\pm\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{mithin } y = \tfrac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\text{und } x = 1 + y = 1 + \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

---

529. Cubische, biquadratische und höhere Gl chungen lassen sich eben so wie die quadratischen reine und vermischte unterscheiden: die erstre B nennung kommt ihnen zu, wenn sie die unbekann Größe nur in der höhern Potenz; die letztre, wenn sie zugleich auch in niedrigern Potenzen enthalten.

530. Gehört eine dieser höhern Gleichungen z erstern Klasse, so hat ihre Auflösung in gewissem B tracht nicht viel mehr Schwierigkeit, als die Auflösu einer reinen quadratischen Gleichung. Nach eben d Principien, nach welchen man den Werth von x^2 finde entwickelt man auch den von x^3, x^4 u. s. w. und v einer solchen Potenz kann man wenigstens eine Wurz besonders vermittelst der Logarithmen, ohne Schwieri keit finden.

531. Ist aber die Gleichung eine vermischte, läßt sich nicht mehr, so wie bey den quadratischen, e allgemeiner Ausdruck angeben, nach welchem alle Gl chungen von derselben Ordnung aufgelöst werden kön ten. Die Auflösung ist alsdann oft mühsam und schwi rig. Man kann daher die Betrachtung dieser Gleichu gen zur höhern Mathematik rechnen, und ihre Behan lung dem eigentlichen Mathematiker überlassen.

532. Wenn indessen eine vermischte Gleichung z gleicher Zeit vollständig ist, d. h. wenn alle ihre Gli der so beschaffen sind, wie die Potenz der unbekannte und einer bekannten Größe $(x \pm a)$ von dem Grade, v welchem die Gleichung ist, erfordert: so hat die Auf

ng derselben nicht mehr Schwierigkeit, als die einer inen Gleichung. Allein um zu beurtheilen, ob die lieder die Beschaffenheit einer vollständigen Gleichung aben, muß man die Beschaffenheit der Glieder einer je- en Potenz einer zweytheiligen Wurzel kennen. Dieses hrt der binomische Lehrsatz, ein Satz, der wegen iner vielfachen Anwendbarkeit für die ganze Analysis on außerordentlicher Wichtigkeit ist, und als die Grund- ge der höhern Mathematik angesehen werden kann.

Funfzehnter Abschnitt.

Erläuterung des binomischen Lehrsatzes — vorher niges von Verbindungen und Versetzungen ver- schiedener Elemente.

533. Verschiedene Größen oder Elemente, die urch a, b, c, d .... bezeichnet werden können, las- en sich auf mehr als eine Art ordnen oder auf man- herley Weise versetzen.

534. Zwey verschiedene Elemente, a, b, geben wey verschiedene Anordnungen (Complexionen) oder Versetzungen: ab und ba.

535. Wird zu diesen Elementen ein drittes, c, inzugefügt, so kann es in den Complexionen der bey- en ersten Elemente die unterste, mittelste oder erste Stelle einnehmen; dadurch entstehen 3.2 oder 6 verschie- ene Complexionen, abc, acb, bac, bca, cab, cba.

536. Kommt noch ein viertes Element, d, hinzu, o kann es in jeder der 6 letztern Complexionen vier ver- chiedene Stellen einnehmen. Folglich entstehen ann 4.6 d. i. 24 verschiedene Complexionen.

537. Auf gleiche Art findet sich, daß durch Hinzukommen eines fünften Elements 5 . 24 d. i. 120; durch Hinzukommen eines sechsten 6 . 120 d. i. 720 Complexionen u. s. w. entstehen würden; nehmlich, durch jedes neue Element immer so vielmal mehr Complexionen, als die Anzahl aller Elemente beträgt.

538. Hieraus ergibt sich, daß die Anzahl der Complexionen aus m verschiedenen Elementen so groß ist, als das Produkt der natürlichen Reihe der Zahlen von 1 bis m.

Es ist leicht zu sehen, daß die Anzahl der verschiedenen Complexionen bey einer etwas größern Anzahl von Elementen sehr beträchtlich wird. Zur Erläuterung kann folgendes Exempel dienen:

Eine Gesellschaft von 10 Personen schließt ein Kränzchen, mit der Verabredung alle Tage zusammen zu kommen, und es so lange fortzusetzen, als die Ordnung der Personen bey Tische sich abändern ließe; wie lange würde das Kränzchen dauern?

Ein anderes Beyspiel geben die zahllosen Verbindungen der Karten bey den Kartenspielen.

539. Sind unter den gegebenen Elementen einige einander gleich, so wird die Menge der verschiedenen Complexionen derselben dadurch vermindert.

540. Lauter gleiche Elemente gestatten nur eine einzige Verbindung. Z. B. aaa.

541. Wird mit 3 gleichen Elementen ein viertes, verschiedenes, verbunden, so kann es vier verschiedene Stellungen haben, oder die vier Elemente geben zusammen vier verschiedene Complexionen: aaab, aaba, abaa, baaa — also sechsmal weniger, als 4 verschiedene Elemente geben würden. Diese Anzahl läßt sich daher durch $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ ausdrücken.

542. Wird noch ein fünftes, ebenfalls verschiedenes, Element hinzugethan, so kann es in jeder der vo-

letzt angegebenen Complexionen fünf verſchiedene Stellungen annehmen; folglich gibt jede der vier Complexionen fünf neue, alſo alle zuſammen $20 = \frac{1.2.3.4.5}{1.2.3}$ Complexionen.

543. Durch ein ſechſtes verſchiedenes Element wird die Anzahl der Complexionen ſechsmal größer, nehmlich $= \frac{1.2.3.4.5.6}{1.2.3} = 120.$

544. Dieſe Art zu ſchließen kann leicht weiter fortgeſetzt werden, und ſie führt auf das allgemeine Reſultat, daß m Elemente, unter denen n gleiche ſind, ſo viel Complexionen geben, als die Menge der Complexionen aus m verſchiedenen Elementen, dividirt durch die Menge der Complexionen aus n verſchiedenen Elementen, beträgt. Dieſe Anzahl iſt $= \frac{1.2.3.....m}{1.2.3.....n} = (n+1).(n+2)....m.$

545. Durch die Gleichheit einiger Elemente wird daher die Menge der Complexionen, welche der Anzahl aller Elemente zugehört, ſo vielmal vermindert, als die Menge der Complexionen beträgt, welche eine Anzahl verſchiedener Elemente, ſo groß als die der gleichen, gibt.

546. Dieſes findet auch in dem Falle ſtatt, da mehrere Arten gleicher Elemente in einer gewiſſen Menge von Elementen vorkommen: durch jede Art derſelben wird die Menge der Complexionen, die allen Elementen zukommt, ſo vielmal vermindert, als eine gleiche Anzahl verſchiedener Elemente Complexionen gibt.

Z. B. die Menge der Complexionen aus den Elementen aaabbcc iſt $= \frac{1.2.3.4.5.6.7}{1.2.3 \times 1.2 \times 1.2} = 210.$

jeder derselben das zweyte Element vorsetzt, u. s. w. nehmlich: wenn man den Binionen aus je (m — 1) Elementen das fehlende mte Element vorsetzt. Nun ist die Anzahl der Variationen zu 2 Gliedern aus (m — 1) Elementen (nach Nr. 2.) = (m — 1) . (m — 2); folglich gibt jedes Element mit den übrigen (m — 1) Elementen (m — 1) . (m — 2) Ternionen, und daher ist die Anzahl aller Variationen zu drey Gliedern aus m Elementen = m . (m — 1) . (m — 2).

Die Anzahl der Combinationen zu 3 Gliedern muß so vielmal kleiner als die der Variationen seyn, so vielmal 3 verschiedene Elemente versetzt werden können; sie ist folglich $= \frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$.

4. Auf ähnliche Art kann man weiter schließen, daß die Anzahl der Variationen zu 4 Gliedern = m . (m — 1) . (m — 2) . (m — 3); und die Anzahl der Combinationen zu 4 Gliedern $= \frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot (m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$ sey; u. s. w.

5. Wenn man daher annimmt, die Anzahl der Variationen zu n Gliedern aus m verschiedenen Elementen sey = m . (m — 1) . (m — 2) . . . . . (m — (n — 1)), so folgt, daß die Anzahl der Variationen zu (n + 1) Gliedern = m . (m — 1) . (m — 2) . . . . . (m — n) seyn müsse.

Denn die Variationen zu (n + 1) Gliedern aus m Elementen entstehen, wenn den Variationen zu n Gliedern aus je (m — 1) Elementen das noch übrige mte Element vorgesetzt wird. Nun ist die Anzahl der Variationen zu n Gliedern aus (m — 1) Elementen = (m — 1) . (m — 2) . . . . (m — n); wie aus der Voraussetzung folgt, wenn man m — 1 anstatt m setzt; so gibt jedes Element mit den übrigen (m — 1) Ele-

nten eben so viel Verbindungen zu n + 1 Gliedern; glich geben alle m Elemente

$$m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot (m-n)$$

riationen zu (n + 1) Gliedern. Dieser Ausdruck aber dem angenommenen ganz ähnlich, und ergibt sich so ich daraus, wenn in jenem n + 1 statt n gesetzt wird.

Da nun die Richtigkeit der angenommenen Formel die drey ersten Klassen der Variationen, für die Unio n, Binionen und Ternionen, durch das Obige erwiesen so gilt sie auch für alle andern Klassen der Variationen.

6. Aus der Formel für die Variationen zu n Glie n aus m Elementen läßt sich sogleich die Formel für Combinationen ableiten, indem man nur jene ch die Menge der Versetzungen von n verschiedenen ementen zu dividiren braucht. Die Anzahl der Com nationen zu n Gliedern aus m verschiedenen Elemen n ist daher

$$\frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot (m-(n-1))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n}$$

554. In dem letztern Ausdruck ist die Anzahl der ctoren im Zähler und Nenner gleich, nehmlich = n, i. so groß, als die Summe der Glieder, zu welcher Elemente verbunden werden sollen. Man kann da r die Anzahl der Variationen und Combinationen aus der gegebenen Anzahl von Elementen zu einer bestimm n Summe sehr leicht finden, wenn man so viel Facto n der Reihe nach nimmt, als die Summe der Glieder trägt; und zwar fangen bey den Variationen die Fa ren mit der Zahl, welche der Anzahl aller Elemente ich ist, an, und gehen immer um eins abnehmend fort. n die Combinationen zu erhalten, muß man die An hl der Variationen durch eine gleiche Menge von Fa ren, die von 1 anfangen und nach der Ordnung der hlen fortgehen, dividiren.

Z. B. von 9 Elementen sind die Variationen zu 4 = $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024$; und die Combinationen = $\frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$ = 126.

555. Ist bey den Combinationen $n > m - (n - 1)$, so sind die letzten Factoren des Zählers den letzten Factoren des Nenners in umgekehrter Ordnung gleich, und heben sich gegen einander auf. Es ist daher $\frac{m.(m-1)....(n+1).n.(n-1)....(m-(n-1))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (m-n) \cdot (m-(n-1)) ..... n} = \frac{m \cdot (m-1) ..... (n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 ..... (m-n)}$. Folglich ist für m Elemente die Anzahl der Combinationen zu n Gliedern eben so groß als zu $m - n$ Gliedern.

Dasselbe Resultat erhält man auch, wenn $n =$ oder $< m - (n - 1)$ gesetzt wird.

Es sey z. B. $m = 10$; $n = 6$, so ist $\frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$. Wird $n = 4$ gesetzt, so ist $m - n = 6$. Man erhält also dieselben Ausdrücke in umgekehrter Ordnung; und die Anzahl der Combinationen zu 6 Gliedern aus 10 verschiedenen Elementen ist eben so groß, als die zu 4 Gliedern.

556. Da $\frac{m.(m-1)}{1 \cdot 2} + m = \frac{(m+1).m}{1 \cdot 2}$ ist, so folgt, daß die Anzahl der Combinationen zu 2 Gliedern aus $(m + 1)$ Elementen gleich der Summe der Combinationen zu 2 und zu 1 Gliede aus m Elementen ist.

557. Eben so ist $\frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{m \cdot (m-1)}{1 \cdot 2} = \frac{(m+1) \cdot m \cdot (m-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ d. h. die Anzahl der Combinationen zu drey Gliedern aus $(m + 1)$ Elementen ist gleich der Summe der Combinationen zu 3 und zu 2 Gliedern aus m Elementen.

558. Ueberhaupt ist allgemein die Anzahl der Combinationen zu n Gliedern aus (m + 1) Elementen gleich der Summe der Combinationen zu n und zu (n — 1) Gliedern aus m Elementen. Dieß läßt sich sowohl aus obiger Formel für die Combinationen zu n Gliedern aus m Elementen, als durch die Betrachtung finden, 1) daß durch das Hinzukommen eines neuen Elements so viel neue Combinationen zu n Gliedern entstehen, als vorher Combinationen zu (n — 1) Gliedern vorhanden waren, indem das neue Glied mit jeder von diesen verbunden wird; 2) daß die vorher schon vorhandenen Combinationen zu n Gliedern auch jetzt bestehen müssen, indem sie diejenigen Combinationen der übrigen m Elemente darstellen, die das neue Element nicht enthalten.

Man nehme z. B. die Combinationen zu 5 und zu 6 Gliedern aus 7 Elementen, d. i. $\frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 21 + 7 = 28$; so ist diese Summe eben so groß als die Combinationen zu 6 Gliedern aus 8 Elementen $= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 28$.

---

559. Von dem Gesetz der Combinationen läßt sich eine wichtige Anwendung auf die Entwickelung der Produkte binomischer (d. i. zweytheiliger) Factoren machen.

560. Man multiplizire z. B. folgende vier binomische Factoren, in welchen der eine Theil gleich ist:

$$(x + a) \cdot (x + b) \cdot (x + c) \cdot (x + d)$$

so ergibt sich das Produkt $= x^4 + (a + b + c + d)\,x^3 + (ab + ac + ad + bc + bd + cd)\,x^2 + (abc + abd + acd + bcd)\,x + abcd$.

561. Hier zeigt sich sowohl in Absicht auf den glei-

chen, als auf die ungleichen Theile der Factoren eine merkwürdige Folge: die Potenzen von x, deren Exponent im erſten Gliede der Anzahl der binomiſchen Factoren gleich iſt, nehmen in jedem der folgenden Glieder immer um einen Grad ab, und das letzte Glied iſt ganz frey davon.

562. Die andern Theile der Factoren (a, b, c, d) kommen im erſten Gliede gar nicht vor; im zweyten ſind ſie nach ihren Combinationen zu 1 Gliede, im dritten nach ihren Combinationen zu 2 Gliedern, im vierten nach ihren Combinationen zu 3 Gliedern, und im fünften nach ihren Combinationen zu 4 Gliedern enthalten.

563. Es läßt ſich aber zeigen, daß dieſe Art der Verbindung der Potenzen von x mit den andern Theilen der Factoren wirklich ein allgemeines Geſetz ſey; d. h. daß der Exponent der Potenz von x im erſten Gliede der Anzahl der binomiſchen Factoren gleich iſt, und in jedem der folgenden Glieder immer um 1 abnimmt; ferner, daß die andern Theile der Factoren im erſten Gliede gar nicht vorkommen, im zweyten aber nach ihren Combinationen zu 1 Gliede, im dritten nach ihren Combinationen zu 2 Gliedern, u. ſ. w. — im nten nach ihren Combinationen zu (n — 1) Gliedern — enthalten ſind.

564. Denn, wenn wir annehmen, daß ein ſolches Geſetz für m Factoren gelte, ſo ergibt ſich, daß es auch für (m + 1) Factoren gültig iſt.

565. Man ſetze alſo, es ſey

$(x + a) . (x + b) . (x + c) . . . . . (x + m) =$

$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + ... + \overset{-1}{M}x + M$; wo $(x + m)$ den mten Factor, und A die Combinationen aus m verſchiedenen Elementen zu 1 Gliede; B die Combinationen zu 2 Gliedern; C die Combinationen zu 3 Gliedern; u. ſ. w. $\overset{-1}{M}$ die Combinationen zu $(m - 1)$.

› M die zu m Gliedern ausdrücken ſoll. Dieſes Pro-
't multiplizire man mit (x + n) als dem (m + 1)ſten
ctor, ſo erhält man: $x^{m+1} + (A+n)x^m + (B+An)$
$x^{m-1} + (C+Bn)x^{m-2} + \ldots\ldots + (M+\dot{M}n)$
$+ Mn$.

566. In dieſem letztern Produkte gehen 1) die
ıtenzen von x offenbar nach demſelben Geſetze fort,
ch welchem ſie in dem angenommenen Produkte fort-
jen: ihre Exponenten nehmlich fangen mit m + 1 an
d nehmen in jedem der folgenden Glieder immer um 1
; das letzte Glied aber enthält x gar nicht, oder man
nn annehmen, es enthalte x^0.

2) Was die andern Theile der binomiſchen Factoren
betrifft, ſo enthält das erſte Glied keinen derſelben.
as zweyte Glied enthält A + n, welches die Combi-
tionen zu 1 Gliede aus den m + 1 Elementen ſind.
. Das dritte Glied enthält B + An, d. h. die Com-
ıationen zu 2 Gliedern aus m Elementen, und dieje-
gen Binionen, die aus den Unionen der m Elemente
rch Hinzukommen des neuen Elements, n, entſtehen;
yde zuſammen aber machen die Combinationen zu 2
liedern aus (m + 1) Elementen aus (556.).

Eben ſo ſtellt C + Bn alle Combinationen zu 3
liedern aus (m + 1) Elementen dar (557.).

Für das folgende Glied würde man D + Cn finden,
elches die Combinationen zu 4 Gliedern aus (m + 1)
lementen ausdrückt u. ſ. w. $M + \dot{M}n$ zeigt die Combi-
tionen zu m Gliedern, und Mn die Combination zu
n + 1) Gliedern aus (m + 1) Elementen an.

567. Es erhellet alſo hieraus, daß ſowohl das
eſetz für die Potenzen von x, als für ihre Coefficienten
y (m + 1) binomiſchen Factoren daſſelbe, wie für
ı *Factoren iſt.* Da es nun, nach obigem Beyſpiel,

für $m = 4$ erwieſen iſt, ſo gilt es auch für jede gröſsere oder geringere Anzahl von Factoren.

---

568. Wenn alle binomiſchen Factoren einander gleich geſetzt werden, z. B. $= x + a$, ſo verwandelt ſich das Produkt von m Factoren in die mte Potenz des Binomiums $x + a$. Es läſst ſich daher die Geſtalt dieſer Potenz, oder der allgemeine Ausdruck derſelben, aus dem allgemeinen Ausdruck jenes Produkts ableiten.

569. Die Darſtellung und der Beweis eines ſolchen allgemeinen Ausdrucks, nach welchem jede Potenz eines Binomiums vollſtändig entwickelt, und ſelbſt jedes Glied derſelben auch auſser der Ordnung angegeben werden kann, macht den Gegenſtand des binomiſchen Lehrſatzes aus.

570. Was den erſten Theil (x) des Binomiums $x + a$ anbetrifft, ſo verhält es ſich mit ihm in der mten Potenz deſſelben eben ſo, wie in dem obigen Produkt aus m binomiſchen Factoren, da in Abſicht auf ihn die Beſchaffenheit des andern Theils dieſer Factoren gleichgültig iſt. Es enthält alſo die mte Potenz des Binomiums $x + a$

im 1ſten Gliede x^m
— 2ten — x^{m-1}
— 3ten — x^{m-2}
.
.
.
— nten — $x^{m-(n-1)}$
.
.
.
.
— mten — x

571. In Ansehung der Factoren aber, mit welchen diese Potenzen in den verschiedenen Gliedern multiplizirt werden müssen, ist zu bemerken, daß, bey den Combinationen aus m gleichen Elementen = a, jede Union = a, jede Binion = a^2; jede Ternion = a^3 u. s. w. — jede Combination zu n Gliedern = a^n ist.

572. Anstatt der Combinationen zu 1 Gliede wird daher hier die Union a so vielmal genommen, als die Anzahl der Combinationen zu 1 Gliede aus m verschiedenen Elementen beträgt.

Anstatt der Combinationen zu 2 Gliedern wird hier die Binion a^2 so vielmal genommen, als m verschiedene Elemente Combinationen zu 2 Gliedern geben; u. s. w.

573. Es ist daher das obige A hier = ma

das obige $B = \frac{m \cdot (m-1)}{1 \cdot 2} a^2$

das obige $C = \frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot a^3$

das obige $D = \frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot (m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} a^4$

u. s. w.

Der Factor des (n + 1)sten Gliedes d. i. desjenigen, welches die Combinationen zu n Gliedern enthält, ist

$$= \frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \ldots\ldots (m-(n-1))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots n} a^n$$

574. Hiernach läßt sich die mte Potenz des Binomiums x + a auf folgende Art ausdrücken:

$$(x+a)^m = x^m + mx^{m-1} a + \frac{m \cdot (m-1)}{1 \cdot 2} x^{m-2} a^2$$
$$+ \frac{m \cdot (m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^{m-3} a^3 \ldots\ldots$$
$$+ \frac{m \cdot (m-1) \ldots\ldots (m-(n-1))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots n} x^{m-n} a^n \ldots$$

$$\ldots + \frac{m \cdot (m-1) \ldots\ldots (m-(m-2))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots (m-1)}$$

$$x a^{m-1} + \frac{m \cdot (m-1) \ldots (m-(m-1))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots m} a^m.$$

575. Aus dieſer Darſtellung ergibt ſich, daß beyde Theile des Binomiums eine gleiche Folge von Potenzen bilden, die nur in umgekehrter Ordnung vorkommen: nehmlich die Potenzen von x fangen im erſten Gliede an, und gehen bis zum vorletzten fort, indem ihre Exponenten immer um 1 abnehmen; die Potenzen von a hingegen fangen im zweyten Gliede an und gehen bis zum letzten fort, indem ihre Exponenten immer um 1 wachſen. Die Exponenten des erſten und letzten Gliedes ſind dem Exponenten des Binomiums ſelbſt gleich.

576. Dieſe Gleichheit der Potenzen beyder Theile des Binomiums läßt ſich auch ſchon daraus erwarten, daß $x + a = a + x$; alſo auch $(x+a)^m = (a+x)^m$ iſt.

577. Die Folge der Exponenten ſowohl von x, als von a, lehrt auch, daß die mte Potenz eines Binomiums aus $(m+1)$ Gliedern beſteht.

578. Die Coefficienten der verſchiedenen Glieder werden die Binomialcoefficienten genannt; und zwar wird der Coefficient des zweyten Gliedes (m) gemeiniglich der erſte; der Coefficient des dritten Gliedes $\frac{(m \cdot (m-1))}{1 \cdot 2}$ der zweyte genannt, u. ſ. w. Folglich iſt der nte Binomialcoefficient der Coefficient des $(n+1)$ſten Gliedes, nehmlich:

$$\frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \ldots (m-(n-1))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots n}$$

579. Nach dem obigen allgemeinen Ausdruck (574.) iſt es leicht, die Potenz eines Binomiums von beſtimmtem Exponenten zu entwickeln. Es iſt z. B. $(x + a)^{10} =$

$$x^{10} + 10x^9 a + \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} x^8 a^2 + \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^7 a^3 + \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^6 a^4$$

$$+ \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} x^5 a^5 + \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} x^4 a^6 + \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} x^3 a^7$$

$$+ \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} x^2 a^8 + \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9} x a^9$$

$$+ \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10} a^{10} = x^{10} + 10x^9 a + 45x^8 a^2$$

$$+ 120x^7 a^3 + 210x^6 a^4 + 252x^5 a^5 + 210x^4 a^6 + 120x^3 a^7$$

$$+ 45x^2 a^8 + 10x a^9 + a^{10}.$$

580. Da nach dem, was oben (555.) gezeigt iſt, anzahl der Combinationen zu n und zu (m — n) dern aus m Elementen gleich groß iſt, ſo folgt, daß *Coefficienten der erſten* Hälfte der Glieder den Coef-

586. Um dieſe Eigenſchaft allgemein zu erweiſen, drücke man eine Zahl durch $\overset{m}{a}\ \overset{m-1}{b}\ \ldots\ \overset{2}{p}\ \overset{1}{q}\ \overset{0}{r}$ aus, wo r einen Einer oder eine Zahl von der Ordnung Null bedeute; q einen Zehner oder eine Zahl von der erſten Ordnung; p eine Zahl von der zweyten Ordnung u. ſ. w. — Hiernach iſt

$$\overset{0}{r} = r \cdot 10^0 = r\,(9+1)^0$$
$$\overset{1}{q} = q \cdot 10^1 = q\,(9+1)^1$$
$$\overset{2}{p} = p \cdot 10^2 = p\,(9+1)^2$$
$$\vdots$$
$$\overset{m-1}{b} = b \cdot 10^{m-1} = b\,(9+1)^{m-1}$$
$$\overset{m}{a} = a \cdot 10^m = a\,(9+1)^m$$

Auf dieſe Art kann jede ganze Zahl in Produkte der Potenzen von 10 d. i. von $(9+1)$ zerlegt werden, wobey die Exponenten der Potenzen nur ganze Zahlen ſind (238. ff.). Es enthält aber die Potenz $(9+1)^m$, dem binomiſchen Lehrſatze zufolge, in allen Gliedern eine Potenz von 9, das letzte Glied ausgenommen, welches $= 1^m = 1$ iſt. Daher kann man $a\,(9+1)^m = 9\,M + a$ ſetzen, wo M irgend eine Zahl bedeutet, deren Größe hier gleichgültig iſt, die man aber erhalten würde, wenn man von jedem Gliede der Potenz $(9+1)^m$, das letzte ausgenommen, einen Factor $= 9$ wegnähme, die Produkte der übrigen Factoren zuſammen addirte und ihre Summe mit a multiplizirte.

Auf gleiche Weiſe iſt es geſtattet $b\,(9+1)^{m-1} = 9\,N + b$ zu ſetzen; und ſo könnte jede der folgenden Potenzen von $(9+1)$ durch ein Produkt von 9 + dem Einer,

mit welchem die ganze Potenz multiplizirt ist, ausgedrückt werden.

Setzt man also $p(9+1)^2 = 9S + p$; $q(9+1)^1 = 9T + q$; $r(9+1)^0 = r$, so ist die Zahl $a^m b^{m-1} \ldots p^1 q^0 r = 9M + 9N + \ldots + 9S + 9T + (a+b+\ldots+p+q+r) = 9(M+N+\ldots+S+T) + (a+b+\ldots+p+q+r)$, wodurch der obige Satz allgemein dargestellt und erwiesen ist.

587. Wenn man daher von irgend einer Zahl die Summe ihrer Ziffern, als Einer betrachtet, abzieht, so muß der Ueberrest sich durch 9 ohne Rest dividiren lassen.

Z. B. wenn man von 5374 die Summe $5+3+7+4 = 19$ abzieht, so gibt der Rest 5355 durch 9 dividirt genau 595.

588. Ferner erhellet hieraus, warum die Differenz zweyer ganzen Zahlen, die mit einerley Ziffern geschrieben werden, jederzeit ein Produkt von 9 ist und sich daher durch 9 ohne Rest dividiren läßt.

Es ist z. B. $7913 - 1739 = 6174 = 9 \cdot 686$.

Denn wenn die Zahlen mit einerley Ziffern geschrieben werden, so ist die Summe ihrer Ziffern, nach ihrem einfachen Werthe, in beyden gleich groß. Es sey daher die eine Zahl $= Z$ und die Summe ihrer Ziffern $= s$; die andere $= z$ und die Summe ihrer Ziffern ebenfalls $= s$, so kann man setzen

$$Z = 9P + s$$
$$z = 9Q + s$$

folglich ist $Z - z = 9P - 9Q = 9(P - Q)$.

589. Ja es folgt aus dieser Darstellung, daß es nicht einmal nöthig ist, daß die Zahlen mit einerley Ziffern *geschrieben werden*, sondern wenn nur die Sum-

für m = 4 erwieſen iſt, ſo gilt es auch für jede ß
ßere oder geringere Anzahl von Factoren.

---

568. Wenn alle binomiſchen Factoren einan
gleich geſetzt werden, z. B. = x + a, ſo verwandelt
das Produkt von m Factoren in die mte Potenz
Binomiums x + a. Es läßt ſich daher die Ge
dieſer Potenz, oder der allgemeine Ausdruck derſel
aus dem allgemeinen Ausdruck jenes Produkts ablei

569. Die Darſtellung und der Beweis eines
chen allgemeinen Ausdrucks, nach welchem jede Po
eines Binomiums vollſtändig entwickelt, und ſelbſt j
Glied derſelben auch außer der Ordnung angegeben
den kann, macht den Gegenſtand des binomiſc
Lehrſatzes aus.

570. Was den erſten Theil (x) des Binomi
x + a anbetrifft, ſo verhält es ſich mit ihm in
mten Potenz deſſelben eben ſo, wie in dem obigen
dukt aus m binomiſchen Factoren, da in Abſicht au
die Beſchaffenheit des andern Theils dieſer Fact
gleichgültig iſt. Es enthält alſo die mte Potenz
Binomiums x + a

im 1ſten Gliede x^m
— 2ten — x^{m-1}
— 3ten — x^{m-2}
.
.
.
— nten — $x^{m-(n-1)}$
.
.
.
.
— mten — x

571. In Ansehung der Factoren aber, mit welchen diese Potenzen in den verschiedenen Gliedern multiplizirt werden müssen, ist zu bemerken, daß, bey den Combinationen aus m gleichen Elementen = a, jede Union = a, jede Binion = a^2; jede Ternion = a^3 u. s. w. — jede Combination zu n Gliedern = a^n ist.

572. Anstatt der Combinationen zu 1 Gliede wird daher hier die Union a so vielmal genommen, als die Anzahl der Combinationen zu 1 Gliede aus m verschiedenen Elementen beträgt.

Anstatt der Combinationen zu 2 Gliedern wird hier die Binion a^2 so vielmal genommen, als m verschiedene Elemente Combinationen zu 2 Gliedern geben; u. s. w.

573. Es ist daher das obige A hier = ma

das obige $B = \frac{m \cdot (m-1)}{1 \cdot 2} a^2$

das obige $C = \frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot a^3$

das obige $D = \frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot (m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} a^4$

u. s. w.

Der Factor des (n + 1)sten Gliedes d. i. desjenigen, welches die Combinationen zu n Gliedern enthält, ist

$$= \frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \ldots \ldots (m-(n-1))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \ldots n} a^n$$

574. Hiernach läßt sich die mte Potenz des Binomiums x + a auf folgende Art ausdrücken:

$$(x+a)^m = x^m + mx^{m-1} a + \frac{m \cdot (m-1)}{1 \cdot 2} x^{m-2} a^2$$

$$+ \frac{m \cdot (m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^{m-3} a^3 \ldots \ldots$$

$$+ \frac{m \cdot (m-1) \ldots (m-(n-1))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \ldots n} x^{m-n} a^n \ldots$$

$$\ldots + \frac{m \cdot (m-1) \ldots\ldots (m-(m-2))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots (m-1)}$$

$$x a^{m-1} + \frac{m \cdot (m-1) \ldots (m-(m-1))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots m} a^m.$$

575. Aus dieſer Darſtellung ergibt ſich, daß beyde Theile des Binomiums eine gleiche Folge von Potenzen bilden, die nur in umgekehrter Ordnung vorkommen: nehmlich die Potenzen von x fangen im erſten Gliede an und gehen bis zum vorletzten fort, indem ihre Exponenten immer um 1 abnehmen; die Potenzen von a hingegen fangen im zweyten Gliede an und gehen bis zum letzten fort, indem ihre Exponenten immer um 1 wachſen. Die Exponenten des erſten und letzten Gliedes ſind dem Exponenten des Binomiums ſelbſt gleich.

576. Dieſe Gleichheit der Potenzen beyder Theile des Binomiums läßt ſich auch ſchon daraus erwarten, daß $x + a = a + x$; alſo auch $(x + a)^m = (a + x)^m$ iſt.

577. Die Folge der Exponenten ſowohl von x, als von a, lehrt auch, daß die mte Potenz eines Binomiums aus $(m + 1)$ Gliedern beſteht.

578. Die Coefficienten der verſchiedenen Glieder werden die Binomialcoefficienten genannt; und zwar wird der Coefficient des zweyten Gliedes (m) gemeiniglich der erſte; der Coefficient des dritten Gliedes $\frac{(m \cdot (m-1))}{1 \cdot 2}$ der zweyte genannt, u. ſ. w. Folglich iſt der nte Binomialcoefficient der Coefficient des $(n+1)$ſten Gliedes, nehmlich:

$$\frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \ldots (m-(n-1))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots n}$$

579. Nach dem obigen allgemeinen Ausdruck (574.) iſt es leicht, die Potenz eines Binomiums von beſtimmtem Exponenten zu entwickeln. Es iſt z. B. $(x + a)^{10} =$

$$x^{10} + 10x^9 a + \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} x^8 a^2 + \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^7 a^3 + \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^6 a^4$$

$$+ \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} x^5 a^5 + \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} x^4 a^6 + \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} x^3 a^7$$

$$+ \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} x^2 a^8 + \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9} x a^9$$

$$+ \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10} a^{10} = x^{10} + 10x^9 a + 45x^8 a^2$$

$$+ 120x^7 a^3 + 210x^6 a^4 + 252x^5 a^5 + 210x^4 a^6 + 120x^3 a^7$$

$$+ 45x^2 a^8 + 10x a^9 + a^{10}.$$

580. Da nach dem, was oben (555.) gezeigt iſt, e Anzahl der Combinationen zu n und zu (m — n) liedern aus m Elementen gleich groß iſt, ſo folgt, daß e Coefficienten der erſten Hälfte der Glieder den Coef-

ficienten der zweyten Hälfte gleich seyn müssen, nehmlich der Coefficient des $(n+1)$sten Gliedes = dem Coefficienten des $(m-n+1)$sten Gliedes.

581. Es ist ferner der nte Coefficient der $(m+1)$sten Potenz gleich der Summe des nten und $(n-1)$sten Coefficienten der mten Potenz; und dieß ist eine Folge des obigen Satzes (558.), daß die Anzahl der Combinationen zu n Gliedern aus $(m+1)$ Elementen gleich der Summe der Combinationen zu n und zu $(n-1)$ Gliedern aus m Elementen ist.

Z. B. der dritte Binomialcoefficient der 10ten Potenz ist = dem dritten und zweyten Coeff. der 9ten Potenz = 84 + 36 = 120.

582. Betrachtet man endlich die Potenzen von x und a in jedem Gliede als eben so viel zu versetzende Elemente, so ist der Coefficient des Gliedes so groß als die Versetzungszahl dieser Elemente (547.).

Z. B. das dritte Glied der 10ten Potenz enthält die Potenzen $x^8 a^2$; wovon die Versetzungszahl = $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \times 1 \cdot 2} = \frac{9 \cdot 10}{1 \cdot 2} = 45$ ist. Das vierte Glied der mten Potenz enthält $x^{m-3} a^3$, wovon die Versetzungszahl $= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots m}{1 \cdot 2 \ldots (m-3) \times 1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{(m-2) \cdot (m-1) \cdot m}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ ist. Die Potenzen des $(n+1)$sten Gliedes sind $x^{m-n} a^n$, deren Versetzungszahl $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots m}{1 \cdot 2 \ldots (m-n) \times 1 \cdot 2 \ldots n} = \frac{(m-n+1) \cdot (m-n+2) \ldots m}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n} = \frac{m \cdot (m-1) \ldots (m-(n-1))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}$ ist.

583. Wird der zweyte Theil des Binomiums negativ gesetzt, so ändert sich dadurch in der Potenz desselben kein einziger Ausdruck irgend eines Gliedes, und $(x-a)^m$ ist nur dadurch von $(x+a)^m$ unterschieden,

ß diejenigen Glieder, welche die Potenzen von a mit
igeradem Exponenten enthalten, das nega-
ve Vorzeichen bekommen, d. i. das 2te, 4te, 6te,
e u. s. w. Glied. Es wechseln daher in der Potenz
es solchen Binomiums die positiven und negativen
lieder mit einander ab.

584. Die hier gegebene Darstellung des binomi-
en Lehrsatzes schränkt sich darauf ein, daß unter m
ie ganze positive Zahl verstanden werde; und auch
dieser Einschränkung ist der Satz von großer Brauch-
rkeit. In der That aber kann er noch weiter ausge-
hnt, und die allgemeine Gültigkeit der obigen Binomial-
rmel (574.) auch für den Fall, da m eine negative ganze
hl, und da es eine gebrochene, positive oder negative,
hl bedeutet, erwiesen werden. Dadurch wird unstrei-
; die Wichtigkeit des Satzes noch ungemein vergrößert.
ıdessen erfordert der Beweis desselben in dieser Allge-
einheit noch manches, was die Grenzen dieses Lehr-
chs übersteigen dürfte.

Den ersten allgemeinen Beweis des binomischen Lehrsa-
s hat Newton gegeben, und dadurch seine großen Ver-
nste um die Mathematik noch um vieles erhöht.

Anhang.

585. Es ist eine merkwürdige Eigenschaft der Zah-
l, daß eine jede derselben als eine Zusammensetzung aus
iem Produkt von 9 und aus derjenigen Summe, welche
e Ziffern, mit denen sie geschrieben wird, nach ihrem
ıfachen Werth zusammenaddirt geben, angesehen wer-
n kann.

Z. B. 4826 ist $= 9 . 534 + (4 + 8 + 2 + 6)$
$= 9 . 534 + 20.$

586. Um diese Eigenschaft allgemein zu erweisen, drücke man eine Zahl durch $a\ b\ \ldots\ p\ q\ r$ aus, wo r einen Einer oder eine Zahl von der Ordnung Null bedeute; q einen Zehner oder eine Zahl von der ersten Ordnung; p eine Zahl von der zweyten Ordnung u. s. w. — Hiernach ist

$$\begin{aligned}
r &= r \,.\, 10^0 = r\,(9+1)^0\\
q &= q \,.\, 10^1 = q\,(9+1)^1\\
p &= p \,.\, 10^2 = p\,(9+1)^2\\
&\vdots\\
b &= b \,.\, 10^{m-1} = b\,(9+1)^{m-1}\\
a &= a \,.\, 10^m = a\,(9+1)^m
\end{aligned}$$

Auf diese Art kann jede ganze Zahl in Produkte der Potenzen von 10 d. i. von $(9+1)$ zerlegt werden, wobey die Exponenten der Potenzen nur ganze Zahlen sind (238. ff.). Es enthält aber die Potenz $(9+1)^m$, dem binomischen Lehrsatze zufolge, in allen Gliedern eine Potenz von 9, das letzte Glied ausgenommen, welches $= 1^m = 1$ ist. Daher kann man $a\,(9+1)^m = 9\,M + a$ setzen, wo M irgend eine Zahl bedeutet, deren Größe hier gleichgültig ist, die man aber erhalten würde, wenn man von jedem Gliede der Potenz $(9+1)^m$, das letzte ausgenommen, einen Factor $= 9$ wegnähme, die Produkte der übrigen Factoren zusammen addirte und ihre Summe mit a multiplizirte.

Auf gleiche Weise ist es gestattet $b\,(9+1)^{m-1} = 9\,N + b$ zu setzen; und so könnte jede der folgenden Potenzen von $(9+1)$ durch ein Produkt von $9+$ dem Einer,

mit welchem die ganze Potenz multiplizirt ist, ausgedrückt werden.

Setzt man also $p(9+1)^2 = 9S+p$; $q(9+1)^1 = 9T+q$; $r(9+1)^0 = r$, so ist die Zahl $a^m b^{m-1} \ldots p^2 q^1 r^0 = 9M+9N+\ldots+9S+9T+(a+b+\ldots+p+q+r) = 9(M+N+\ldots+S+T)+(a+b+\ldots+p+q+r)$, wodurch der obige Satz allgemein dargestellt und erwiesen ist.

587. Wenn man daher von irgend einer Zahl die Summe ihrer Ziffern, als Einer betrachtet, abzieht, so muß der Ueberrest sich durch 9 ohne Rest dividiren lassen.

Z. B. wenn man von 5374 die Summe $5+3+7+4 = 19$ abzieht, so gibt der Rest 5355 durch 9 dividirt genau 595.

588. Ferner erhellet hieraus, warum die Differenz zweyer ganzen Zahlen, die mit einerley Ziffern geschrieben werden, jederzeit ein Produkt von 9 ist und sich daher durch 9 ohne Rest dividiren läßt.

Es ist z. B. $7913 - 1739 = 6174 = 9 \cdot 686$.

Denn wenn die Zahlen mit einerley Ziffern geschrieben werden, so ist die Summe ihrer Ziffern, nach ihrem einfachen Werthe, in beyden gleich groß. Es sey daher die eine Zahl $= Z$ und die Summe ihrer Ziffern $= s$; die andere $= z$ und die Summe ihrer Ziffern ebenfalls $= s$, so kann man setzen

$$Z = 9P + s$$
$$z = 9Q + s$$

folglich ist $Z - z = 9P - 9Q = 9(P - Q)$.

589. Ja es folgt aus dieser Darstellung, daß es nicht einmal nöthig ist, daß die Zahlen mit einerley Ziffern *geschrieben* werden, sondern wenn nur die Sum-

men ihrer Ziffern einander gleich sind ($s = s$), so muß ihre Differenz auch ein Produkt von 9 seyn; denn es hebt sich alsdann bey der Subtraction derselben ebenfalls s gegen s auf.

Z. B. $18456 - 7269 = 11187 = 9 \cdot 1243$.

590. Ein besonderer Fall hiervon ist, wenn die eine Zahl aus einer einzelnen Ziffer mit einer oder mehrern Nullen am Ende, und die andere aus eben der den Nullen vorgesetzten Ziffer besteht. Wird die Differenz dieser Zahlen durch 9 dividirt, so besteht der Quotient aus lauter solchen Ziffern, als die den Nullen vorgesetzte, oder die der abgezogenen Zahl ist.

Z. B. $(7000 - 7) : 9 = 6993 : 9 = 777$.

591. Allgemein läßt sich dieses auf folgende Art erweisen: es ist $\overset{m}{a} - \overset{0}{a} = a \cdot 10^m - a = a(10^m - 1)$. Wenn man aber von irgend einer Potenz von 10, deren Exponent eine positive ganze Zahl ist, wie m hier bedeutet, 1 abzieht, so erhält man eine Zahl, die mit lauter Neunen geschrieben wird. Folglich ist $(\overset{m}{a} - \overset{0}{a}) : 9 = a(10^m - 1) : 9 = a(\overset{m-1}{9}\,99\ldots\overset{0}{9}) : 9 = a(\overset{m-1}{1}\,1\,1\ldots\overset{0}{1}) = \overset{m-1}{a}\,a\,a\ldots\overset{0}{a}$.

592. Endlich verdient noch bemerkt zu werden, daß auch die Differenzen gleichnamiger Potenzen solcher ganzen Zahlen, deren Ziffern gleiche Summen ausmachen, Produkte von 9 sind; wovon der Grund sich aus dem Vorhergehenden leicht darthun läßt.

Denn man drücke zwey solche Zahlen wieder durch Z und z aus und setze wie vorhin $Z = 9P + s$; und $z = 9Q + s$, so ist $Z^n = (9P + s)^n$, welches sich, dem Obigen zufolge, durch $9X + s^n$ darstellen läßt. Eben so ist $z^n = (9Q + s)^n = 9U + s^n$. Folglich ist $Z^n - z^n = 9X + s^n - (9U + s^n) = 9X - 9U = 9(X - U)$.

Zweyter Haupttheil.

eometrie.

Vorerinnerungen.

1. Diejenigen Größen, welche den Gegenstand der eometrie ausmachen, sind oben (Einleitung 4.) mit m Beynamen stetiger Größen bezeichnet worden.

2. Die Stetigkeit einer Größe besteht in dem ununrbrochenen Zusammenhang ihrer Theile. Das ısammenhängen der Theile aber setzt voraus, daß die heile selbst außer einander oder neben einander gen. Beydes zusammen, das Außereinanderliegen der heile, und ihr ununterbrochener Zusammenhang gibt den rößen eine Ausdehnung.

3. Ausgedehnte Größen also machen, in so fern sie isgedehnt sind, den Gegenstand der Geometrie aus.

4. Abstrahiren wir an einem ausgedehnten Gegenınde von allem, was nicht zur bloßen Ausdehnung desıben gehört, so bleibt uns nur der Raum übrig, den einnimmt. Die Ausdehnung also stellt sich uns als was Räumliches dar. Wir müssen daher den bloßen aum als das eigentliche Gebiet der Geometrie ansehen.

5. Der Raum ist von den physischen Körpern in ihm ınz verschieden. Die letztern erscheinen uns als etwas ufälliges in ihm, das wir in Gedanken aus ihm hinwegehmen können. Wenn sie also gleich, ihrer Ausdehnung *egen, geometrisch betrachtet* werden können, so bestim-

men sie doch nicht den Gegenstand der Geometrie, die ganz unabhängig von ihnen ist.

Die physischen Körper sind insgesammt beweglich, oder können als solche gedacht werden; der Raum aber ist durchaus unbeweglich, und kann gar nicht als bewegt gedacht werden.

6. Eben so wenig können wir den Ursprung unserer Vorstellung des Raums von den physischen Gegenständen in ihm ableiten, da der Raum weder eine Eigenschaft dieser Dinge ist, noch durch Zusammensetzung derselben erzeugt wird. Wir müssen also die Quelle jener Vorstellung, eben so wie die der Vorstellung der Vielheit, in unserm Gemüth aufsuchen.

Kant hat das Verdienst, zuerst gezeigt zu haben, wie die Vorstellung des Raums aus der Natur unseres Vorstellungsvermögens entspringe. Er nannte ihn die Form des äußern Sinns, d. i. das Gewand, unter welchem unser Vorstellungsvermögen alle sogenannten äußern Eindrücke darstellt.

7. Wir können daher dem Raum Prädikate beylegen, die ihrer Natur nach nie aus der Erfahrung genommen seyn können, und doch die größte Gewißheit haben, ja wovon wir uns das Gegentheil beym Raum gar nicht denken können — das sind die Prädikate der Stetigkeit und der Unendlichkeit.

8. Eben so erkennen wir unmittelbar mit apodiktischer Gewißheit, daß der Raum drey verschiedene Abmessungen hat oder nach drey verschiedenen Richtungen ausgedehnt ist.

9. In dem unendlichen Raume können wir uns überall einen endlichen Raum oder einen von allen Seiten begrenzten Theil des Raums vorstellen. Ein solcher hat ebenfalls drey verschiedene Abmessungen, die wir durch *Länge*, Breite und Dicke oder Höhe bezeichnen, und macht den geometrischen Körper aus.

10. Es ist aber nicht nothwendig, sich bey Gegenständen der Ausdehnung jedesmal alle drey Abmessungen in Verbindung vorzustellen. Wir können von einzelnen Abmessungen abstrahiren. Denken wir uns daher Größen, die nur zwey Abmessungen haben, oder nach zweyerley Richtungen ausgedehnt sind, so erhalten wir die geometrischen Flächen. Ihre Abmessungen werden durch Länge und Breite bezeichnet.

11. Endlich können wir uns auch Größen denken, die nur eine einzige Abmessung haben oder nur nach einerley Richtung ausgedehnt sind. Dieses sind die geometrischen Linien. Ihre Abmessung heißt die Länge.

Länge, Breite und Dicke bezeichnen nicht bestimmte Richtungen der Ausdehnung, sondern drücken nur die Verschiedenheit derselben überhaupt aus. Wo alle drey Abmessungen zugleich vorkommen, da werden sie durch die genannten Ausdrücke bezeichnet, wobey es ganz einerley ist, welche der drey Abmessungen man mit dem einen oder andern Namen belegen will. Wo nur zwey Abmessungen vorkommen, werden sie durch Länge und Breite unterschieden, ihre absolute Richtung im Raum oder gegen unsern Horizont mag übrigens seyn welche es wolle. Und so bezeichnet Länge bey der Linie die Einfachheit in der Richtung der Ausdehnung, sie mag übrigens hingehen wohin sie will.

Eine krumme Fläche, eine krumme Linie ist im Ganzen nach unendlich verschiedenen Richtungen ausgedehnt; aber an jeder einzelnen Stelle hat die eine nur eine zwiefache und die andre nur eine einfache Richtung der Ausdehnung.

12. Körper, Flächen und Linien sind daher die Gegenstände, mit welchen sich die Geometrie beschäftigt. Zu diesen kommt noch der Punkt hinzu, der gar keine Abmessung hat, folglich auch keine Größe. Er kann daher auch nicht an und für sich ein Gegenstand geometrischer Betrachtung werden, wohl aber in Verbindung mit den andern geometrischen Gegenständen, oder mit andern

ficienten der zweyten Hälfte gleich seyn müssen, nehmlich der Coefficient des $(n+1)$sten Gliedes = dem Coefficienten des $(m-n+1)$sten Gliedes.

581. Es ist ferner der nte Coefficient der $(m+1)$sten Potenz gleich der Summe des nten und $(n-1)$sten Coefficienten der mten Potenz; und dieß ist eine Folge des obigen Satzes (558.), daß die Anzahl der Combinationen zu n Gliedern aus $(m+1)$ Elementen gleich der Summe der Combinationen zu n und zu $(n-1)$ Gliedern aus m Elementen ist.

Z. B. der dritte Binomialcoefficient der 10ten Potenz ist = dem dritten und zweyten Coeff. der 9ten Potenz = 84 + 36 = 120.

582. Betrachtet man endlich die Potenzen von x und a in jedem Gliede als eben so viel zu versetzende Elemente, so ist der Coefficient des Gliedes so groß als die Versetzungszahl dieser Elemente (547.).

Z. B. das dritte Glied der 10ten Potenz enthält die Potenzen $x^8\,a^2$; wovon die Versetzungszahl = $\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\times1\cdot2} = \frac{9\cdot10}{1\cdot2} = 45$ ist. Das vierte Glied der mten Potenz enthält $x^{m-3}\,a^3$, wovon die Versetzungszahl $= \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\ldots m}{1\cdot2\ldots(m-3)\times1\cdot2\cdot3} = \frac{(m-2)\cdot(m-1)\cdot m}{1\cdot2\cdot3}$ ist. Die Potenzen des $(n+1)$sten Gliedes sind $x^{m-n}\,a^n$, deren Versetzungszahl $\frac{1\cdot2\cdot3\ldots m}{1\cdot2\ldots(m-n)\times1\cdot2\ldots n} = \frac{(m-n+1)\cdot(m-n+2)\ldots m}{1\cdot2\cdot3\ldots n} = \frac{m\cdot(m-1)\ldots(m-(n-1))}{1\cdot2\cdot3\ldots n}$ ist.

583. Wird der zweyte Theil des Binomiums negativ gesetzt, so ändert sich dadurch in der Potenz desselben kein einziger Ausdruck irgend eines Gliedes, und $(x-a)^m$ ist nur dadurch von $(x+a)^m$ unterschieden,

daß diejenigen Glieder, welche die Potenzen von a mit ungeradem Exponenten enthalten, das negative Vorzeichen bekommen, d. i. das 2te, 4te, 6te, 8te u. s. w. Glied. Es wechseln daher in der Potenz eines solchen Binomiums die positiven und negativen Glieder mit einander ab.

584. Die hier gegebene Darstellung des binomischen Lehrsatzes schränkt sich darauf ein, daß unter m eine ganze positive Zahl verstanden werde; und auch in dieser Einschränkung ist der Satz von großer Brauchbarkeit. In der That aber kann er noch weiter ausgedehnt, und die allgemeine Gültigkeit der obigen Binomialformel (574.) auch für den Fall, da m eine negative ganze Zahl, und da es eine gebrochene, positive oder negative, Zahl bedeutet, erwiesen werden. Dadurch wird unstreitig die Wichtigkeit des Satzes noch ungemein vergrößert. Indessen erfordert der Beweis desselben in dieser Allgemeinheit noch manches, was die Grenzen dieses Lehrbuchs übersteigen dürfte.

Den ersten allgemeinen Beweis des binomischen Lehrsatzes hat Newton gegeben, und dadurch seine großen Verdienste um die Mathematik noch um vieles erhöht.

Anhang.

585. Es ist eine merkwürdige Eigenschaft der Zahlen, daß eine jede derselben als eine Zusammensetzung aus einem Produkt von 9 und aus derjenigen Summe, welche die Ziffern, mit denen sie geschrieben wird, nach ihrem einfachen Werth zusammenaddirt geben, angesehen werden kann.

Z. B. 4826 ist $= 9 . 534 + (4 + 8 + 2 + 6)$
$= 9 . 534 + 20.$

586. Um diese Eigenschaft allgemein zu erweisen, drücke man eine Zahl durch $a^{m}\ b^{m-1} \ldots p^{2}\ q^{1}\ r^{0}$ aus, wo r einen Einer oder eine Zahl von der Ordnung Null bedeute; q einen Zehner oder eine Zahl von der ersten Ordnung; p eine Zahl von der zweyten Ordnung u. s. w. — Hiernach ist

$$\begin{aligned}
r^{0} &= r \cdot 10^{0} = r\,(9+1)^{0}\\
q^{1} &= q \cdot 10^{1} = q\,(9+1)^{1}\\
p^{2} &= p \cdot 10^{2} = p\,(9+1)^{2}\\
&\vdots\\
b^{m-1} &= b \cdot 10^{m-1} = b\,(9+1)^{m-1}\\
a^{m} &= a \cdot 10^{m} = a\,(9+1)^{m}
\end{aligned}$$

Auf diese Art kann jede ganze Zahl in Produkte der Potenzen von 10 d. i. von $(9+1)$ zerlegt werden, wobey die Exponenten der Potenzen nur ganze Zahlen sind (238. ff.). Es enthält aber die Potenz $(9+1)^{m}$, dem binomischen Lehrsatze zufolge, in allen Gliedern eine Potenz von 9, das letzte Glied ausgenommen, welches $= 1^{m} = 1$ ist. Daher kann man $a\,(9+1)^{m} = 9\,M + a$ setzen, wo M irgend eine Zahl bedeutet, deren Größe hier gleichgültig ist, die man aber erhalten würde, wenn man von jedem Gliede der Potenz $(9+1)^{m}$, das letzte ausgenommen, einen Factor $= 9$ wegnähme, die Produkte der übrigen Factoren zusammen addirte und ihre Summe mit a multiplizirte.

Auf gleiche Weise ist es gestattet $b\,(9+1)^{m-1} = 9\,N + b$ zu setzen; und so könnte jede der folgenden Potenzen von $(9+1)$ durch ein Produkt von $9 +$ dem Einer,

mit welchem die ganze Potenz multiplizirt ist, ausgedrückt werden.

Setzt man also $p(9+1)^2 = 9S+p$; $q(9+1)^1 = 9T+q$; $r(9+1)^0 = r$, so ist die Zahl $a^m b^{m-1} \ldots p^2 q^1 r^0 = 9M+9N+\ldots+9S+9T+(a+b+\ldots+p+q+r) = 9(M+N+\ldots+S+T)+(a+b+\ldots+p+q+r)$, wodurch der obige Satz allgemein dargestellt und erwiesen ist.

587. Wenn man daher von irgend einer Zahl die Summe ihrer Ziffern, als Einer betrachtet, abzieht, so muß der Ueberrest sich durch 9 ohne Rest dividiren lassen.

Z. B. wenn man von 5374 die Summe $5+3+7+4 = 19$ abzieht, so gibt der Rest 5355 durch 9 dividirt genau 595.

588. Ferner erhellet hieraus, warum die Differenz zweyer ganzen Zahlen, die mit einerley Ziffern geschrieben werden, jederzeit ein Produkt von 9 ist und sich daher durch 9 ohne Rest dividiren läßt.

Es ist z. B. $7913 - 1739 = 6174 = 9 \cdot 686$.

Denn wenn die Zahlen mit einerley Ziffern geschrieben werden, so ist die Summe ihrer Ziffern, nach ihrem einfachen Werthe, in beyden gleich groß. Es sey daher die eine Zahl $= Z$ und die Summe ihrer Ziffern $= s$; die andere $= z$ und die Summe ihrer Ziffern ebenfalls $= s$, so kann man setzen

$$Z = 9P + s$$
$$z = 9Q + s$$

folglich ist $Z - z = 9P - 9Q = 9(P - Q)$.

589. Ja es folgt aus dieser Darstellung, daß es nicht einmal nöthig ist, daß die Zahlen mit einerley Ziffern *geschrieben werden*, sondern wenn nur die Sum-

wen ihrer Ziffern einander gleich sind ($s = s$), so muß ihre Differenz auch ein Produkt von 9 seyn; denn es hebt sich alsdann bey der Subtraction derselben ebenfalls s gegen s auf.

Z. B. $18456 - 7269 = 11187 = 9 . 1243$.

590. Ein besonderer Fall hiervon ist, wenn die eine Zahl aus einer einzelnen Ziffer mit einer oder mehrern Nullen am Ende, und die andere aus eben der den Nullen vorgesetzten Ziffer besteht. Wird die Differenz dieser Zahlen durch 9 dividirt, so besteht der Quotient aus lauter solchen Ziffern, als die den Nullen vorgesetzte, oder die der abgezogenen Zahl ist.

Z. B. $(7000 - 7) : 9 = 6993 : 9 = 777$.

591. Allgemein läßt sich dieses auf folgende Art erweisen: es ist $\overset{m}{a} - \overset{0}{a} = a . 10^m - a = a (10^m - 1)$. Wenn man aber von irgend einer Potenz von 10, deren Exponent eine positive ganze Zahl ist, wie m hier bedeutet, 1 abzieht, so erhält man eine Zahl, die mit lauter Neunen geschrieben wird. Folglich ist $(\overset{m}{a} - \overset{0}{a}) : 9 = a (10^m - 1) : 9 = a (\overset{m-1}{9}\ 99 \ldots \overset{0}{9}) : 9 = a (\overset{m-1}{1}\ 1\ 1 \ldots \overset{0}{1}) = \overset{m-1}{a}\ a\ a \ldots \overset{0}{a}$.

592. Endlich verdient noch bemerkt zu werden, daß auch die Differenzen gleichnamiger Potenzen solcher ganzen Zahlen, deren Ziffern gleiche Summen ausmachen, Produkte von 9 sind; wovon der Grund sich aus dem Vorhergehenden leicht darthun läßt.

Denn man drücke zwey solche Zahlen wieder durch Z und z aus und setze wie vorhin $Z = 9P + s$; und $z = 9Q + s$, so ist $Z^n = (9P + s)^n$, welches sich, dem Obigen zufolge, durch $9X + s^n$ darstellen läßt. Eben so ist $z^n = (9Q + s)^n = 9U + s^n$. Folglich ist $Z^n - z^n = 9X + s^n - (9U + s^n) = 9X - 9U = 9(X - U)$.

Zweyter Haupttheil.

Geometrie.

Vorerinnerungen.

1. Diejenigen Größen, welche den Gegenstand der Geometrie ausmachen, sind oben (Einleitung 4.) mit dem Beynamen stetiger Größen bezeichnet worden.

2. Die Stetigkeit einer Größe besteht in dem ununterbrochenen Zusammenhang ihrer Theile. Das Zusammenhängen der Theile aber setzt voraus, daß die Theile selbst außer einander oder neben einander liegen. Beydes zusammen, das Außereinanderliegen der Theile, und ihr ununterbrochener Zusammenhang gibt den Größen eine Ausdehnung.

3. Ausgedehnte Größen also machen, in so fern sie ausgedehnt sind, den Gegenstand der Geometrie aus.

4. Abstrahiren wir an einem ausgedehnten Gegenstande von allem, was nicht zur bloßen Ausdehnung desselben gehört, so bleibt uns nur der Raum übrig, den er einnimmt. Die Ausdehnung also stellt sich uns als etwas Räumliches dar. Wir müssen daher den bloßen Raum als das eigentliche Gebiet der Geometrie ansehen.

5. Der Raum ist von den physischen Körpern in ihm ganz verschieden. Die letztern erscheinen uns als etwas Zufälliges in ihm, das wir in Gedanken aus ihm hinwegnehmen können. Wenn sie also gleich, ihrer Ausdehnung *wegen, geometrisch betrachtet* werden können, so bestim-

men sie doch nicht den Gegenstand der Geometrie, die ganz unabhängig von ihnen ist.

Die physischen Körper sind insgesammt beweglich, oder können als solche gedacht werden; der Raum aber ist durchaus unbeweglich, und kann gar nicht als bewegt gedacht werden.

6. Eben so wenig können wir den Ursprung unserer Vorstellung des Raums von den physischen Gegenständen in ihm ableiten, da der Raum weder eine Eigenschaft dieser Dinge ist, noch durch Zusammensetzung derselben erzeugt wird. Wir müssen also die Quelle jener Vorstellung, eben so wie die der Vorstellung der Vielheit, in unserm Gemüth aufsuchen.

Kant hat das Verdienst, zuerst gezeigt zu haben, wie die Vorstellung des Raums aus der Natur unseres Vorstellungsvermögens entspringe. Er nannte ihn die Form des äußern Sinns, d. i. das Gewand, unter welchem unser Vorstellungsvermögen alle sogenannten äußern Eindrücke darstellt.

7. Wir können daher dem Raum Prädikate beylegen, die ihrer Natur nach nie aus der Erfahrung genommen seyn können, und doch die größte Gewißheit haben, ja wovon wir uns das Gegentheil beym Raum gar nicht denken können — das sind die Prädikate der Stetigkeit und der Unendlichkeit.

8. Eben so erkennen wir unmittelbar mit apodiktischer Gewißheit, daß der Raum drey verschiedene Abmessungen hat oder nach drey verschiedenen Richtungen ausgedehnt ist.

9. In dem unendlichen Raume können wir uns überall einen endlichen Raum oder einen von allen Seiten begrenzten Theil des Raums vorstellen. Ein solcher hat ebenfalls drey verschiedene Abmessungen, die wir durch *Länge*, Breite und Dicke oder Höhe bezeichnen, und macht den geometrischen Körper aus.

10. Es ist aber nicht nothwendig, sich bey Gegenständen der Ausdehnung jedesmal alle drey Abmessungen in Verbindung vorzustellen. Wir können von einzelnen Abmessungen abstrahiren. Denken wir uns daher Größen, die nur zwey Abmessungen haben, oder nach zweyerley Richtungen ausgedehnt sind, so erhalten wir die geometrischen Flächen. Ihre Abmessungen werden durch Länge und Breite bezeichnet.

11. Endlich können wir uns auch Größen denken, die nur eine einzige Abmessung haben oder nur nach einerley Richtung ausgedehnt sind. Dieses sind die geometrischen Linien. Ihre Abmessung heißt die Länge.

Länge, Breite und Dicke bezeichnen nicht bestimmte Richtungen der Ausdehnung, sondern drücken nur die Verschiedenheit derselben überhaupt aus. Wo alle drey Abmessungen zugleich vorkommen, da werden sie durch die genannten Ausdrücke bezeichnet, wobey es ganz einerley ist, welche der drey Abmessungen man mit dem einen oder andern Namen belegen will. Wo nur zwey Abmessungen vorkommen, werden sie durch Länge und Breite unterschieden, ihre absolute Richtung im Raum oder gegen unsern Horizont mag übrigens seyn welche es wolle. Und so bezeichnet Länge bey der Linie die Einfachheit in der Richtung der Ausdehnung, sie mag übrigens hingehen wohin sie will.

Eine krumme Fläche, eine krumme Linie ist im Ganzen nach unendlich verschiedenen Richtungen ausgedehnt; aber an jeder einzelnen Stelle hat die eine nur eine zwiefache und die andre nur eine einfache Richtung der Ausdehnung.

12. Körper, Flächen und Linien sind daher die Gegenstände, mit welchen sich die Geometrie beschäftigt. Zu diesen kommt noch der Punkt hinzu, der gar keine Abmessung hat, folglich auch keine Größe. Er kann daher auch nicht an und für sich ein Gegenstand geometrischer Betrachtung werden, wohl aber in Verbindung mit den andern geometrischen Gegenständen, oder mit andern

Punkten. Er bezeichnet nur eine Stelle im Raum, ohne selbst einen Theil des Raums auszumachen.

13. Von jedem der drey zuerst genannten geometrischen Gegenständе gibt es unzählige Arten, die sich auf gewisse Hauptklassen zurückbringen lassen: die Linien und Flächen lassen sich in gerade und krumme, und die Körper in solche, die von geraden, und in solche, die ganz oder zum Theil von krummen Flächen begrenzt sind, eintheilen.

14. Die Vorstellung der geraden Linie gründet sich unmittelbar auf die Vorstellung der Ausdehnung, und kann daher nicht weiter erklärt werden. Alle Erklärungen, die man von ihr gibt, schließen entweder schon den Begriff der geraden Linie in sich, oder setzen ihn in der That voraus. Es ist daher auch nur eine einzige Art gerader Linien möglich.

15. Krumme Linien hingegen sind solche, von denen kein Theil gerade ist. Von diesen gibt es unendlich verschiedene Arten.

16. Gerade Flächen oder Ebenen sind Flächen, in denen sich nach allen Seiten gerade Linien ziehen lassen; krumme hingegen diejenigen, in welchen dieses nicht geschehen kann.

Es gibt krumme Flächen, in denen sich nach einer gewissen Richtung unzählige gerade Linien ziehen lassen, aber nicht nach einer jeden beliebigen.

17. Eine gerade Linie unterscheidet sich von der andern nur durch ihre Größe. Sie ist daher auch durch ihre Größe bestimmt. Andere Eigenschaften bietet sie, für sich allein und ohne weitere Bedingungen betrachtet, nicht zur Untersuchung dar; aber in Verbindung mit andern kann sie einen unerschöpflichen Stoff zur Betrachtung geben.

18. Zwey gerade Linien schneiden einander, wenn

sie einander durchkreuzen, d. i. wenn sie so liegen, daß die Theile einer jeden auf beyde Seiten der andern vertheilt sind.

19. Zwey gerade Linien in derselben Ebene sind ihrer Lage nach parallel, wenn sie in immer gleicher Entfernung von einander bleiben, oder nie zusammentreffen, so weit sie auch nach beyden Seiten hin verlängert werden.

20. Wenn zwey gerade Linien in einer Ebene eine solche Lage gegen einander haben, daß sie nach der einen Seite hin immer näher zusammen gehen, so gehen sie nach der andern immer weiter auseinander. Jenes nennt man convergiren, dieses divergiren.

21. Wenn daher ein Paar solche Linien von einer dritten geraden Linie durchschnitten werden, so convergiren sie auf der einen Seite der schneidenden Linie und divergiren auf der andern, wenn man auf beyden Seiten entweder gegen die Linie hin, oder von ihr abwärts rechnet.

22. Treffen zwey gerade Linien so in einen Punkt zusammen, daß sie nicht eine einzige gerade Linie bilden, so entsteht ein ebener Winkel (angulus planus). An ihm sind zu unterscheiden die Spitze oder der Scheitel (vertex) und die Schenkel (crura).

23. Verlängert man den einen Schenkel eines ebenen Winkels noch über die Spitze hinaus, so entsteht noch ein zweyter Winkel. Beyde zusammen werden, in Rücksicht auf ihre Lage, Nebenwinkel (anguli contigui s. deinceps positi) genannt.

Zu jedem Winkel lassen sich zwey Nebenwinkel verzeichnen, je nachdem man den einen, oder den andern Schenkel über die Spitze hinaus verlängert.

24. Verlängert man beyde Schenkel eines ebenen Winkels über die Spitze hinaus, oder, schneiden die Li-

nien einander, so entstehen vier Winkel, deren Scheitel in dem Durchschnittspunkte beyder Linien liegen. Von diesen heißen diejenigen, deren Schenkel einander wechselseitig entgegengesetzt liegen, Vertikal- oder Scheitelwinkel (anguli verticales s. inter se oppositi).

25. Werden zwey Parallellinien von einer dritten geraden Linie durchschnitten, so heißen die innern kreuzweise gegenüber liegenden Winkel Wechselswinkel (ang. alterni); und ein jeder der äußern nebst dem ihm gegenüber liegenden innern Winkel an derselben Seite der schneidenden Linie correspondirende Winkel.

Die letztre Benennung ist zwar nicht in deutschen Lehrbüchern eingeführt, ich halte sie aber für passender als alle sonst dafür gebräuchlichen. Le Gendre nennt diese Winkel *angles internes-externes*, ein Ausdruck, den wir nicht nachahmen können. Sonst habe ich sie von Franzosen auch *des angles correspondans* nennen hören, wornach diese Benennung gemacht ist.

26. Die Größe eines Winkels hängt nicht von der Länge der Schenkel, sondern von ihrer Lage gegen einander ab. Je weiter sie von einander zurückgehen, indeß sie in ihrem Scheitelpunkt unverändert zusammenhängen, desto größer wird der Winkel; und je mehr sie sich ihrer ganzen Länge nach einander nähern, desto kleiner wird er.

27. Wenn zwey Nebenwinkel einander gleich sind, so heißt jeder derselben ein rechter (ang. rectus); und von den Schenkeln eines rechten Winkels heißt jeder ein Perpendikel auf dem andern, oder eine auf der andern senkrechte Linie (linea perpendicularis s. cathetus). Ein rechter Winkel ist also derjenige, der seinem Nebelwinkel gleich ist.

28. Ein Winkel, der größer ist als ein rechter, heißt ein stumpfer (ang. obtusus); und einer, der kleiner als ein rechter ist, ein spitzer Winkel (ang. acutus). Beyde heißen auch mit einem gemeinschaftlichen Namen schiefe Winkel (ang. obliqui).

29. Wenn eine Ebene von allen Seiten begrenzt ist, so macht sie eine ebene Figur. Man unterscheidet die Figuren in geradlinige, krummlinige, und gemischte, je nachdem sie bloß von geraden, oder bloß von krummen, oder theils von geraden, theils von krummen Linien eingeschlossen werden.

30. Die geraden Linien, von welchen eine geradlinige Figur begrenzt wird, heißen Seiten der Figur; und die geradlinigen Figuren werden nach der Anzahl ihrer Seiten in dreyseitige, vierseitige, fünfseitige u. s. w. eingetheilt. Eben diese heißen auch, nach der Anzahl ihrer Winkel, Dreyecke, Vierecke, Fünfecke u. s. w.

31. Die Dreyecke (triangulum), deren Betrachtung einen vorzüglichen Theil der Geometrie ausmacht, werden, in Absicht ihrer Seiten, in gleichseitige (tr. aequilaterum), gleichschenklige (tr. aequicrurum s. isosceles) und ungleichseitige (tr. scalenum) eingetheilt, je nachdem alle drey Seiten einander gleich, oder nur zweye gleich, oder alle ungleich sind.

32. Von den drey Winkeln eines Dreyecks müssen zwey jederzeit spitzig seyn; der dritte aber kann eben sowohl ein rechter, als ein stumpfer, oder ein spitziger seyn, und hiernach unterscheidet man rechtwinklige (tr. rectangulum), stumpfwinklige (tr. obtusangulum), und spitzwinklige (tr. acutangulum) Dreyecke.

33. In den rechtwinkligen Dreyecken werden auch noch die Seiten besonders bezeichnet: diejenige, welche dem rechten Winkel gegenüber steht, heißt die Hypotenuse (hypotenusa); und die andern beyden, welche den rechten Winkel einschließen, heißen Katheten.

34. Unter den Vierecken werden die Parallelogramme, d. i. diejenigen, deren gegenüberstehende Seiten einander parallel laufen, ausgezeichnet. Sind in einem Viereck nur zwey Seiten ein-

ander parallel, die andern beyden nicht, so heißt es ein Trapezium.

35. Bey den Dreyecken und Parallelogrammen wird häufig eine Seite als Grundlinie (basis) betrachtet, welches nicht gerade die unterste zu seyn braucht, sondern eine jede beliebige seyn kann. Beym gleichschenkligen Dreyeck wird jedoch gewöhnlich die ungleiche Seite so genannt.

36. Geradlinige Figuren von einer unbestimmten Anzahl von Seiten heißen Vielecke oder Polygone. Sind alle Seiten und Winkel derselben unter einander gleich, so heißen sie regelmäßige oder reguläre Vielecke; außerdem unregelmäßige oder irreguläre.

37. Unter den krummlinigen Figuren hat der Kreis (circulus) die einfachste Entstehungsart. Er entsteht nehmlich, wenn eine gerade Linie sich in einer Ebene um ihren einen Endpunkt herumbewegt. Der Punkt, um welchen die Umdrehung geschieht, heißt der Mittelpunkt (centrum); die gerade Linie selbst, der Halbmesser (radius); die krumme Linie, welche den Kreis begrenzt, der Umkreis (peripheria s. circumferentia), und an und für sich betrachtet, d. i. ohne Rücksicht auf die eingeschlossene Fläche oder andere Linien des Kreises, die Kreislinie (linea circularis); eine gerade Linie zwischen zwey Punkten des Umkreises, eine Sehne (chorda), und unter diesen diejenige, welche durch den Mittelpunkt geht, der Durchmesser (diameter); ein Theil des Umkreises, ein Bogen (arcus); der Theil der Kreisfläche, der zwischen einer Sehne und dem von ihr abgeschnittenen Bogen enthalten ist, ein Abschnitt (segmentum); und der Theil derselben, der von zwey Halbmessern und dem dazwischen liegenden Bogen eingeschlossen ist, ein Ausschnitt (sector).

1. Aus der Entstehungsart des Kreises folgt, daß alle Punkte des Umkreises gleich weit vom Mittelpunkt abstehen, oder, daß alle Halbmesser, ingleichen alle Durchmesser eines Kreises unter einander gleich sind.

2. Die Entstehungsart einer andern Gattung krummer Linien, der Kegelschnitte, wird in der vierten Abtheilung erklärt.

38. Die hier aufgestellten Erklärungen dienen zum Theil als Grundlage der nachfolgenden geometrischen Sätze. Die Lehren der Geometrie lassen sich vornehmlich in zwiefacher Form darstellen; als Lehrsätze (theoremata), und als Aufgaben (problemata). Jene stellen den Gegenstand als schon gefunden, als ausgemacht dar; diese verlangen gleichsam, daß er erst gefunden werden solle. Jene enthalten daher außer dem Satz (propositio), der eine gewisse Behauptung von einem Gegenstande ausdrückt, den Beweis (demonstratio) desselben; diese geben außer dem Satze, welcher anzeigt, was gefunden werden soll, das Verfahren an, wodurch es gefunden wird (solutio), und fügen den Beweis der Richtigkeit desselben hinzu.

Läßt sich aus einem Lehrsatz oder einer Aufgabe ein anderer Satz als Folgerung herleiten, so pflegt man ihn jenem in einem Zusatz (corollarium) beyzufügen.

39. Bey den geometrischen Beweisen ist man öfters genöthigt, sich auf gewisse allgemeine Wahrheiten, die man Grundsätze (axiomata) nennt, zu berufen. Dergleichen sind folgende:

1) Zwischen zwey Punkten ist nur eine gerade Linie möglich, oder, alle geraden Linien zwischen denselben fallen in eine einzige zusammen.

2) Zwey gerade Linien begrenzen eine Fläche nicht vollständig.

3) Zwey gerade Linien können einander nur in einem *einzigen Punkt* durchschneiden.

4) Durch einen Punkt ist nur eine gerade Linie möglich, die mit einer andern parallel läuft.

5) Wenn zwey Linien, Winkel oder Flächen einander decken, d. h. sich so auf einander legen lassen, daß nicht nur ihre Grenzen genau auf einander passen, sondern auch alle dazwischen liegenden Theile der einen Größe genau auf die dazwischen liegenden Theile der andern fallen, so sind beyde an Größe und Gestalt einander gleich, oder gleich und ähnlich.

6) In gleichartig zusammengesetzten Größen ist jeder Theil kleiner als das Ganze, und umgekehrt, das Ganze größer als jeder Theil.

7) Das Ganze ist seinen Theilen zusammengenommen gleich.

8) Zwey Größen, die einer dritten, oder zweyen gleichen gleich sind, sind einander selbst gleich.

9) Gleiches zu Gleichem addirt, von Gleichem subtrahirt, mit Gleichem multiplizirt, durch Gleiches dividirt, gibt Gleiches.

10) Gleiches zu Ungleichem addirt, von Ungleichem subtrahirt u. s. w. gibt Ungleiches.

11) Ungleiches zu Gleichem addirt, von Gleichem subtrahirt u. s. w. gibt Ungleiches.

40. Derjenige Theil der Geometrie, welcher hier abgehandelt ist, läßt sich bequem unter vier Abtheilungen bringen: 1) Planimetrie, welche nur Gegenstände in einerley Ebene begreift; 2) Stereometrie, welche Gegenstände, die nicht auf eine einzige Ebene eingeschränkt sind, betrachtet; 3) Trigonometrie, deren Gegenstand vornehmlich die Berechnung der Seiten und Winkel sowohl ebener, als sphärischer Dreyecke ist; 4) Lehre von den Kegelschnitten, deren Gegenstand sich durch die Benennung bezeichnet, und bey der Abtheilung, die ihr gewidmet ist, näher bestimmt wird.

Erste Abtheilung.

Planimetrie.

Erster Abschnitt.

Von den Winkeln und Parallellinien.

41. Lehrsatz: Alle rechten Winkel sind nander gleich.

Beweis: Es seyen ABC und abc (1. und 2. Fig.) ey rechte Winkel; man verlängre CB nach D, und cb ch d, so ist ABC = ABD und abc = abd (27.). Man nke sich darauf die beyden Nebenwinkel abc und abd so f die beyden andern gelegt, daß cd auf CD und b in fällt, so muß auch ba auf BA fallen. Denn gesetzt, falle nicht darauf, so nehme man an, ba falle etwa die Richtung von bá (3. Fig.). Alsdann wäre ABD r ein Theil des Winkels ábd, folglich

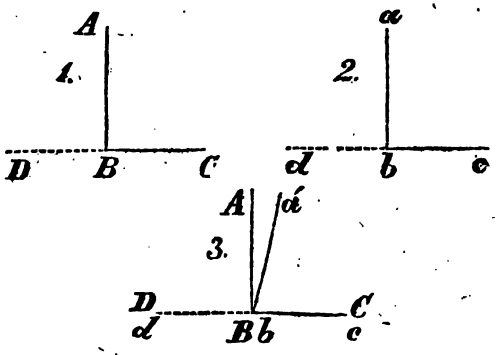
ábd > ABD (39, 6.)

s war aber ABD = ABC

olglich wäre ábd > ABC

Ferner ist ábd = abc

folglich wäre abc > ABC, welches unmöglich ist 9, 6.). Folglich kann ba keine von BA verschiedene ge haben; folglich decken ABC und abc einander; folgh *sind sie einander gleich* (39; 5.).



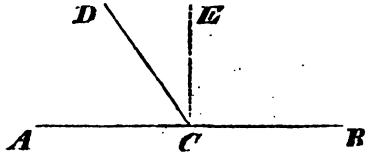
Zusatz. In einem Punkt B einer geraden Linie DC ist nur ein einziges Perpendikel auf die Linie möglich.

42. Lehrs. Die Summe zweyer Nebenwinkel ist jederzeit = 2 R.*)

Bew. Sind beyde Winkel einander gleich, so ist jeder ein rechter, folglich beyde zusammen = 2 R.

Sind sie aber ungleich, wie ACD und BCD, so denke man sich in C ein Perpendikel CE errichtet, alsdann ist

ACD = ACE − DCE = 1 R. − DCE
und BCD = BCE + DCE = 1 R. + DCE
folgl. ACD + BCD = 2 R. (39, 9.)



1. Zus. Von zwey Nebenwinkeln bestimmt der

*) Dieser Buchstabe bezeichne immer einen rechten Winkel.

ine die Größe des andern. Iſt die Größe des einen = x, o iſt die des andern = 2 R. — x.

2. Zuſ. Wenn zwey Winkel einander gleich ſind, o ſind auch ihre Nebenwinkel einander gleich.

3. Zuſ. Da ein jeder Winkel ſich ſelbſt gleich iſt, o ſind auch ſeine beyden Nebenwinkel einander gleich.

4. Zuſ. Von zwey ungleichen Nebenwinkeln iſt er eine ein ſtumpfer, der andere ein ſpitzer.

5. Zuſ. Alle Winkel über oder unter einer geraden Linie, deren Scheitel in demſelben Punkte liegen, ſind zuſammen = 2 R. Denn man kann ſie als die Theile zweyer Nebenwinkel etrachten (39, 7.).

Es ſey die Anzahl ſolcher Winkel = m, und alle einander gleich, ſo iſt ein jeder derſelben = $\frac{2 R.}{m}$

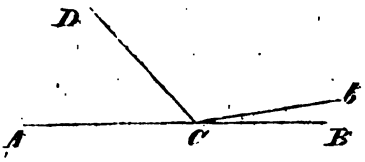
6. Zuſ. Alle Winkel um einen Punkt ſind uſammen = 4 R. Denn man kann ſie betrachten, ls lägen ſie zum Theil über, zum Theil unter derſelben eraden Linie.

Iſt die Anzahl ſolcher Winkel = n, und alle einander leich, ſo iſt ein jeder derſelben = $\frac{4 R.}{n}$

7. Zuſ. Die Summe zweyer Winkel iſt gleich R. weniger der Summe ihrer Nebenwinkel. — Ueberaupt iſt die Summe von n verſchiedenen Winkeln = n R. weniger der Summe ihrer Nebenwinkel.

8. Zuſ. Die Differenz zweyer Winkel iſt der Differenz ihrer Nebenwinkel, in umgekehrter Ordnung enommen, gleich.

43. Lehrſ. Wenn zwey Winkel einen gemeinſchaftlichen Schenkel haben, und zuſammen = 2 R. ſind, ſo ſind es Nebenwinkel, d. i. ihre andern beyden Schenkel machen eine gerade Linie aus.



Bew. Es sey ACD + BCD = 2 R. Ist nun AB keine gerade Linie, so sey Ab eine solche; alsdann sind ACD und bCD Nebenwinkel, folglich zusammen = 2 R. Es wäre also

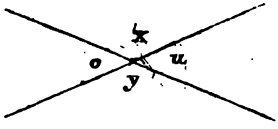
ACD + BCD = ACD + bCD (39, 8.)

hiervon abgez. ACD = ACD

bliebe BCD = bCD (39, 9.)

welches unmöglich ist (39, 6.). Folglich kann Cb nicht von CB verschieden seyn; folglich ist AB eine gerade Linie.

44. Lehrs. Scheitelwinkel sind einander gleich.



Bew. Es sey x der Scheitelwinkel von y, so kann man beyde als die Nebenwinkel von o oder u betrachten; folglich sind sie einander gleich. (42, 3. Zusatz).

Eben so lassen sich o und u als die Nebenwinkel von x oder y ansehen.

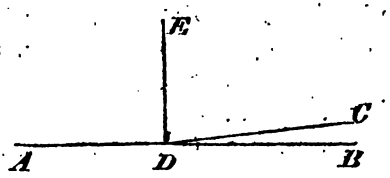
Zus. Wenn von den vier Winkeln x, o, y und u ein einziger bestimmt ist, so sind sie alle bestimmt.

45. Lehrs. Wenn um einen Punkt herum vier Winkel, o, x, u, y (s. die vorhergehende *Fig.*) liegen, von denen die gegenüberliegenden einander gleich sind, o = u; x = y, so

sind es Scheitelwinkel, d. h. ihre Schenkel machen zusammen zwey gerade Linien aus.

Bew. Alle vier Winkel sind zusammen = 4 R. (42, 6. Zus.), und o + x = u + y (39, 9.); folglich o + x = der Hälfte des Ganzen = 2 R., und daher Nebenwinkel (43.); folglich liegen sie über einer geraden Linie. Eben so ergibt sich, daß x + u Nebenwinkel sind, und daher gleichfalls über einer geraden Linie liegen. Also sind es zwey gerade Linien, von welchen die vier Winkel gebildet werden.

46. Lehrs. Wenn eine gerade Linie zum Theil mit einer andern zusammenfällt, so fällt sie ganz in die Richtung derselben.



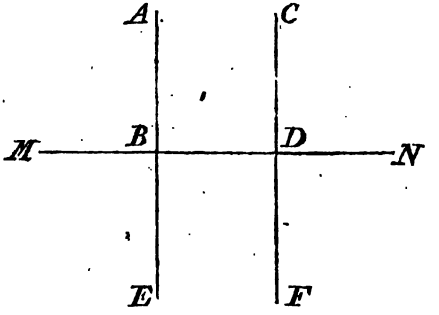
Bew. Gesetzt es hätte eine gerade Linie AC mit einer andern AB das Stück AD gemein; entfernte sich aber in D von AB und ginge in der Richtung DC fort; so denke man sich in D ein Perpendikel auf AD errichtet; alsdann wäre sowohl EDB, als EDC der Nebenwinkel von ADE, folglich jeder = 1 R.; folglich EDB = EDC (41.), welches unmöglich ist (39, 6). Also muß die Linie AC ganz mit AB zusammenfallen.

Zus. Wenn auf zwey gerade Linien, die einander schneiden, zwey andere gelegt werden, so muß auch der Durchschnittspunkt von diesen mit dem Durchschnittspunkt von jenen zusammenfallen.

47. Lehrs. Wenn zwey gerade Linien AB, CD auf einer dritten MN senkrecht stehen, so *sind jene parallel.*

Bew. Denn man verlängere AB nach E, und CD nach F, so sind auch EB und FD auf MN senkrecht, und befinden sich vollkommen in demselben Verhältniß, wie AB und CD, sowohl gegen einander, als gegen MN. Was also auf der einen Seite von MN geschieht, das muß auch auf der andern geschehen; denn es ist durchaus kein Grund vorhanden, warum hier eine Abweichung statt finden sollte. Schneiden also die Linien AB und CD, genugsam verlängert, einander, d. h. convergiren sie, so müssen auch EB und FD convergiren, und, genugsam verlängert, einander schneiden. Es ist aber unmöglich, daß zwey gerade Linien einander in zwey Punkten schneiden (39, 3.); folglich können AB und CD nicht convergiren.

Eben so wenig können sie divergiren; weil dann auch EB und FD eben so gut divergiren müßten, und es unmöglich ist, daß zwey gerade Linien nach beyden Seiten zugleich divergiren (21.). Können sie aber weder convergiren, noch divergiren, so sind sie parallel.



1. Zus. Zwey gerade Linien, die einander schneiden, können auf einer dritten nicht zugleich senkrecht stehen.

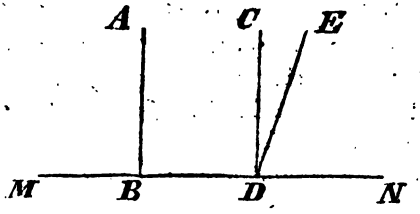
2. Zus. Von einem Punkt außerhalb einer geraden Linie ist nur ein einziges Perpendikel auf diese möglich.

48. Lehrs. Wenn von zwey parallelen Li-

en AB und CD die eine, AB, auf einer drit-
n, MN, ſenkrecht iſt, ſo iſt es auch die ande-
, CD.

Bew. Geſetzt CD wäre nicht ſenkrecht auf MN, ſo
DE ſenkrecht. Alsdann wäre DE || AB (47.). Durch
n Punkt D aber können nicht zwey verſchiedene Linien mit
3 parallel gehen (39, 4.); folglich kann DE von CD nicht
rſchieden ſeyn; folglich iſt CD ſenkrecht auf MN.

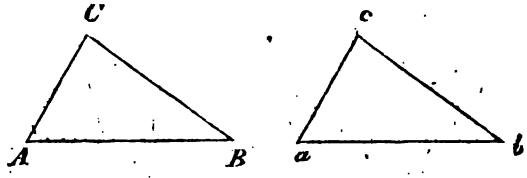
Das Zeichen || bedeutet parallel.



49. Lehrſ. Wenn in zwey Dreyecken eine
eite und die daran liegenden Winkel gleich
nd, ſo können die Dreyecke einander decken,
ıd ſind folglich in allen ihren Seiten und
inkeln einander gleich.*)

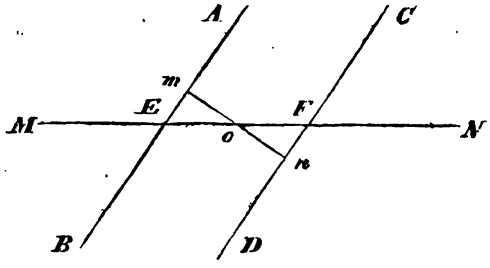
Bew. Es ſey in den Dreyecken ABC und abc die
eite AB = der Seite ab; der Winkel A = dem Winkel a,
d B = b; man denke ſich alsdann, es werde das Dreyeck
c ſo auf ABC gelegt, daß ab auf AB falle, ſo muß auch
auf AC fallen, weil a = A iſt; und bc auf BC, weil b
:B iſt; folglich muß auch c auf C fallen (46. Zuſ.). Die
reyecke decken alſo einander, und es iſt auch AC = ac;
C = bc; C = c.

*) Dieſer Satz iſt hier nur als ein Lehnſatz zu betrach-
ı, und gehört eigentlich in den folgenden Abſchnitt. In-
ſen läßt er ſich auch hier vollſtändig beweiſen, und iſt
m *Behuf des folgenden* Satzes nöthig.



Zuſ. In Dreyecken, die einander decken können, liegen den gleichen Winkeln die gleichen Seiten, und den gleichen Seiten die gleichen Winkel gegenüber.

50. Lehrſ. Wenn zwey gerade Linien, AB, CD, von einer dritten, MN, unter gleichen Winkeln geſchnitten werden, d. h. ſo, daß der Winkel CFN = AEN iſt, ſo ſind AB und CD parallel.



Bew. Es ſey der Punkt o die Mitte der Linie EF, und durch ihn eine Linie mn ſenkrecht auf AB gezogen, ſo entſtehen zwey Dreyecke Emo und Fno, die einander decken können (49). Nun iſt der Winkel bey m ein rechter, folglich auch der Winkel bey n (49. Zuſ.). Die Linien AB und CD ſtehen alſo auf mn ſenkrecht; folglich ſind ſie parallel (47.).

1. Zuſ. Der Winkel mEo iſt = nFo, oder es iſt AEF = DFE; folglich iſt auch der Winkel BEF = CFE

(42, 2. Zuſ.). Wenn alſo zwey Linien AB, CD, von einer dritten, MN, ſo geſchnitten werden, daß der Winkel AEF = DFE, und der Winkel BEF = CFE iſt, ſo ſind die Linien AB und CD parallel; und die genannten Winkel ſind Wechſelswinkel.

2. Zuſ. Wenn CFN = AEF, ſo iſt auch CFE + AEF = 2 R.; ingleichen DFE + BEF = 2 R. Wenn alſo zwey Linien, AB, CD, von einer dritten, MN, ſo geſchnitten werden, daß die beyden innern Winkel auf jeder Seite der ſchneidenden Linie zuſammen = 2 R. ſind, ſo ſind die Linien AB und CD parallel.

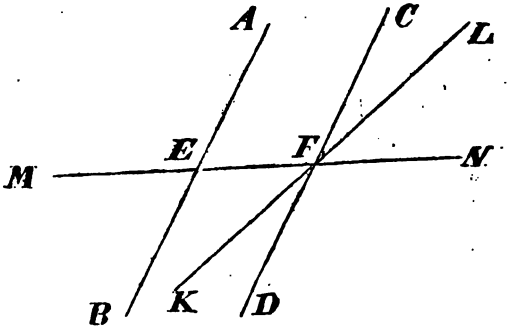
Anmerk. Die drey in dem vorſtehenden Lehrſatze und den beyden Zuſätzen enthaltenen Sätze hängen ſo genau zuſammen, daß aus jedem derſelben die beyden andern folgen. Ein jeder derſelben iſt daher hinreichend, den Parallelismus zweyer Linien zu begründen.

51. Lehrſ. Wenn zwey Parallellinien von einer dritten geraden Linie durchſchnitten werden, ſo ſind 1) die correſpondirenden Winkel einander gleich; 2) die Wechſelswinkel einander gleich; 3) die beyden innern Winkel auf jeder Seite der ſchneidenden Linie zuſammen = 2 R.

Bew. Wenn die Parallelen AB und CD von MN durchſchnitten werden, ſo muß 1) CFN = AEF ſeyn. Denn geſetzt, dieſe Winkel wären nicht gleich, ſo ſey LFN = AEF. Alsdann iſt KL || AB (50.). Es ſoll aber auch, nach der Vorausſetzung, CD || AB ſeyn; folglich müßten durch den Punkt F zwey verſchiedene Linien mit AB parallel gehen, welches unmöglich iſt (39, 4.); folglich kann LFN nicht von CFN verſchieden ſeyn; oder es iſt CFN = AEF.

2) Iſt CFN = AEF, ſo iſt auch EFD = AEF, weil EFD = CFN iſt (44.). Eben ſo erweiſt ſich, daß CFE = BEF iſt. Alſo ſind die Wechſelswinkel einander gleich.

3) Es ist CFN + CFE = 2 R. (42.). Da nun
= AEF ist, so ist auch AEF + CFE = 2 R. Folgli
auch BEF + EFD = 2 R. Also sind die innern A
auf jeder Seite der schneidenden Linie zusammen =



Anmerk. Der vorhergehende Lehrsatz nebst seinen
den Zusätzen, und dieser, der das Umgekehrte ve
nen enthält, machen die Hauptsätze der Lehre von den
rallellinien aus. Sie drücken die charakteristis
Merkmale des Parallelismus gerader Linien aus. —
einigen wird auch noch die Gleichheit der äußern A
felswinkel (worunter man die Winkel CFN und
ingleichen DFN und AEM versteht) dazu gerechnet, di
aus dem Gesagten sehr leicht folgern läßt.

So einfach indeß und unbestreitbar gewiß diese
sind, so schwer ist es doch, sie insgesammt auf ausgem
geometrische Wahrheiten zurückzuführen. Man ist dabe
Annahmen genöthigt, die zwar an sich betrachtet nich
rig sind, aber doch nicht die Evidenz besitzen, die man
geometrischen Grundsätzen fordert. In dieser Rücksicht
die Theorie der Parallellinien immer einen Anstoß geg
und ist bis auf den heutigen Tag noch nicht ganz aufs
ne gebracht. Man hat eine beträchtliche Anzahl von
suchen darüber, von denen aber keiner für ganz gelu
anzusehen ist. Zur Beurtheilung derselben vergleiche
Klügels treffliche Dissertation: Conatuum praecipuorum t
riam parellelarum demonstrandi recensio. Götting. 1763. 8;

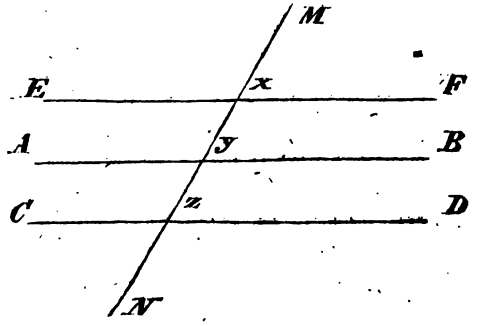
ner Voit's Abh. Percursio conat. demonstr. parallelarum theor. de iisque judicium. Gotting. 1802. 8; Wahl's Dissert. mathem. Symbolas ad epicrisin theoriarum parallelas spectantium continens. Jen. 1823. 4; Jacobi's akadem. Preisschrift: De undecimo Euclidis axiomate judicium. Jen. 1824. 4; ingl. Haffmann's Critik der Parallel-Theorie. 1. Thl. Jen. 1807. 8.

1. Zuſ. Wenn zwey gerade Linien, AB und LK, die nicht parallel ſind, von einer dritten, MN, durchſchnitten werden, ſo ſind die innern Winkel, auf der Seite, auf welcher die Linien convergiren, zuſammen kleiner als 2 R., und auf der Seite, auf welcher die Linien divergiren, größer als 2 R.

2. Zuſ. Umgekehrt, wenn zwey gerade Linien, AB und LK, von einer dritten, MN, durchſchnitten werden, und die innern Winkel auf der einen Seite der ſchneidenden Linie ſind zuſammen < 2 R., ſo convergiren die Linien auf dieſer Seite, und divergiren auf der andern, auf welcher ſie > 2 R. ſind.

Dieſer Satz macht Euklids berüchtigten eilften Grundſatz aus.

52. Lehrſ. Wenn zwey gerade Linien, AB, CD, einer dritten, EF, in derſelben Ebene parallel ſind, ſo ſind ſie einander ſelbſt parallel.



Bew. Man durchschneide alle drey Linien durch eine vierte, MN, so ist

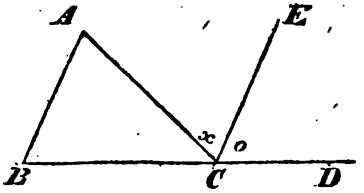
1) der Winkel x = y (51.)
2) der Winkel x = z (51.)

folglich der Winkel y = z (39, 8.);
folglich ist AB || CD (50.).

Anmerk. Die Linie EF kann auch zwischen den Linien AB und CD liegen.

Es ergibt sich aus diesem Satze, daß, wenn man eine noch so große Reihe von Linien hat, von denen jede der ihr zunächst liegenden parallel ist, sie alle einander parallel laufen.

53. Lehrs. Die Summe der Winkel in einem Dreyeck ist = 2 R.



Bew. Man verlängere in dem Dreyeck ABC eine Seite, BC, auf eine unbestimmte Weite nach D hin, und denke sich durch C eine Parallele CE mit AB gezogen, so ist x der Wechselswinkel von A, und o der correspondirende von B; folglich ist

A = x
B = o
und ACB = ACB

folglich A + B + ACB = x + o + ACB (39, 9.).
Nun ist x + o + ACB = 2 R. (42, 5. Zus.)
folglich ist A + B + ACB = 2 R.

1. Zus. Da A = x
und B = o ist,
so ist A + B = x + o = ACD;

d. h. der äußere Winkel eines Dreyecks ist so

groß als die beyden innern gegenüberstehenden zusammengenommen.

2. Zus. Der äußere Winkel eines Dreyecks ist größer, als ein jeder der beyden innern gegenüberstehenden.

3. Zus. Durch zwey Winkel in einem Dreyeck wird auch die Größe des dritten bestimmt.

4. Zus. Wenn in zwey Dreyecken zwey Winkel gleich sind, so ist es auch der dritte.

5. Zus. In einem Dreyeck kann nicht mehr als ein rechter, und nicht mehr als ein stumpfer, nie aber ein rechter und ein stumpfer zugleich enthalten seyn.

6. Zus. Wenn alle drey Winkel eines Dreyecks einander gleich sind, so ist jeder = ⅔ R.

Zweyter Abschnitt.

Von der Gleichheit der Dreyecke und einigen damit verwandten Gegenständen.

54. Erklärung. Gleichheit der Dreyecke kann in mehr als einem Sinn genommen werden: man kann darunter Gleichheit ihrer Größe, d. i. ihres Flächeninhalts verstehen, wobey ihre Gestalt verschieden seyn kann; oder man kann Gleichheit der Gestalt — was sonst Aehnlichkeit genannt wird — dadurch bezeichnen, wobey die Größe verschieden seyn kann; oder endlich man kann Gleichheit der Größe und Gestalt — Congruenz — dadurch andeuten. Die letztre Art von Gleichheit ist die vollkommenste. Sie findet nur da statt, wo die Seiten und Winkel des einen Dreyecks den Seiten und Winkeln des andern gleich sind. In diesem Fall können die Dreyecke *einander decken.*

Obgleich ein Dreyeck aus drey Seiten und drey Winkeln beſteht, ſo läßt ſich doch nicht aus jeden drey geraden Linien und drey Winkeln ein Dreyeck zuſammenſetzen; ſondern die Beſchaffenheit einiger dieſer Stücke zieht die der andern nach ſich. Man nennt aber diejenigen Stücke, welche zur Conſtruction eines Dreyecks gegeben ſeyn müſſen, und von welchen die übrigen abhängig ſind, beſtimmende Stücke eines Dreyecks; und dieſe ſind verſchieden, je nachdem man nur die Größe des Dreyecks, oder ſeine Geſtalt, oder beydes zugleich berückſichtigt.

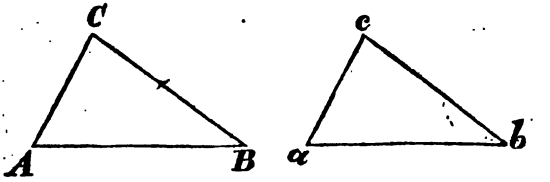
Wenn zwey oder mehrere Dreyecke in den beſtimmenden Stücken mit einander übereinſtimmen, d. h., wenn die beſtimmenden Stücke des Dreyeckes in ihnen gleich ſind, ſo ſind die ganzen Dreyecke in der Rückſicht, in welcher die Stücke beſtimmend ſind, einander gleich.

In dieſem Abſchnitt iſt nur von der vollkommenen Gleichheit — der Congruenz — die Rede, die unter allen am leichteſten zu erkennen iſt. Es entſteht daher die Frage, welches die beſtimmenden Stücke eines Dreyecks in Abſicht auf ſeine Größe und Geſtalt ſind, oder, in welchen Stücken zwey oder mehrere Dreyecke mit einander übereinſtimmen müſſen, um an Größe und Geſtalt einander gleich zu ſeyn. Dieſe Frage wird durch die nachfolgenden Sätze beantwortet.

55. Lehrſ. Wenn in zwey Dreyecken zwey Seiten und der von dieſen eingeſchloßne Winkel gleich ſind, ſo ſind die ganzen Dreyecke einander gleich.

Bew. Es ſey in den beyden Dreyecken ABC und abc die Seite AB = ab; AC = ac, und der Winkel A = a; man denke ſich alsdann, es werde das Dreyeck abc auf ABC gelegt, und zwar ſo, daß a auf A und b auf B fällt, ſo muß auch ac auf AC fallen, weil der Winkel a = A iſt; und c auf C treffen, weil ac = AC iſt. Wenn aber

b auf B, und c auf C fällt, so muß auch cb auf CB fallen (39, 1.). Also decken beyde Dreyecke einander, und sind folglich einander gleich und ähnlich.



1. Zus. Auch hier zeigt sich, was schon oben (49, Zus.) gefolgert wurde, daß in Dreyecken, die einander decken können, den gleichen Seiten gleiche Winkel, und den gleichen Winkeln gleiche Seiten gegenüber liegen.

2. Zus. Wären die Seiten AB, AC, ab und ac alle unter einander gleich, folglich die Dreyecke gleichschenklig, so würden die Dreyecke auch einander decken, wenn man sie so auf einander legte, daß ac auf AB und ab auf AC fiele — welches möglich ist, weil der Winkel a sich immer gleich bleibt, von welcher Seite man ihn auch betrachtet. — Alsdann würde der Winkel c den Winkel B, und b den Winkel C decken. Da aber auch c = C, und b = B ist, so folgt, daß die Winkel an der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreyecks einander gleich sind.

3. Zus. In einem gleichseitigen Dreyecke sind alle drey Winkel einander gleich.

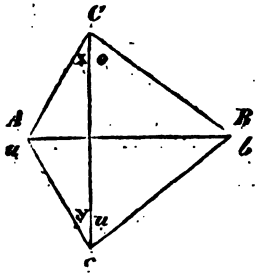
Wenn in zwey Dreyecken zwey Seiten gleich, der eingeschlossene Winkel aber ungleich ist, so können zwar die Dreyecke nicht congruent, wohl aber an Größe einander gleich seyn. Vergl. 77, 1. Zus.

56. Anmerkung. Hierher gehört auch der obige Lehrsatz, daß Dreyecke einander gleich sind, wenn eine Seite und die daran liegenden Winkel einander gleich sind (49.). Jetzt aber läßt sich noch hinzufügen, daß die

Dreyecke auch alsdann noch gleich sind, wenn, anstatt des einen an der gleichen Seite liegenden Winkels, in beyden Dreyecken der ihr gegenüberstehende Winkel gesetzt wird. Denn es folgt alsdann schon, daß auch der dritte, nehmlich der anliegende, Winkel in beyden Dreyecken gleich seyn muß (53, 4. Zus.).

Haben die gleichen Winkel in beyden Dreyecken nicht einerley Lage gegen die gleiche Seite, so sind auch die Dreyecke einander nicht gleich.

57. Lehrs. Wenn in zwey Dreyecken alle drey Seiten des einen den drey Seiten des andern gleich sind, so sind die ganzen Dreyecke einander gleich.



Bew. Es sey in den beyden Dreyecken ABC und abc (man s. die Figur zu 55.) AB = ab, AC = ac und BC = bc; man denke sich die Dreyecke so an einander gelegt, daß ab genau an AB liegt, wie in beystehender Figur, und ziehe Cc, so sind die Dreyecke CAc und CBc gleichschenklig; folglich

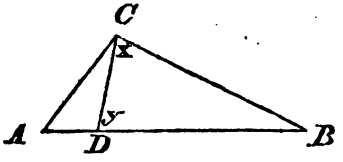
$$\left.\begin{array}{l} x = y \\ o = u \end{array}\right\} \text{(55, 2. Zus.)}$$

folglich $x + o = y + u$, d. i. der Winkel ACB = acb. Da nun auch die diese Winkel einschließenden Seiten, der Annahme zufolge, gleich sind, so sind die ganzen Dreyecke, ABC und abc, einander gleich (55.).

Werden die Dreyecke mit ihrer größten Seite an

ander gelegt, so fällt Cc immer innerhalb derselben, wie r. Sonst kann diese Linie bisweilen auch in die Seiten Dreyecke selbst, oder außerhalb derselben fallen. Die weise für diese Fälle lassen sich leicht von diesem ableiten.

58. Lehrs. Von zwey Winkeln eines Dreys ist derjenige der größte, welcher der ßten von den beyden gegenüberliegenden eiten gegenübersteht.



Bew. Es sey in dem Dreyeck ABC die Seite B > BC, so muß auch der Winkel ACB > A seyn. enn man mache BD = BC und ziehe CD, so ist x = y 5, 2. Zus.). Ferner ist y > A (53, 2. Zus.); folgh auch x > A. Da nun ACB > x ist (39, 6.), so um so mehr ACB > A.

Zus. Der größte Winkel in einem Dreyeck überupt steht der größten Seite desselben gegenüber.

59. Lehrs. Von zwey Seiten eines Dreys ist diejenige die größte, welche dem größn der beyden gegenüberliegenden Winkel egenübersteht.

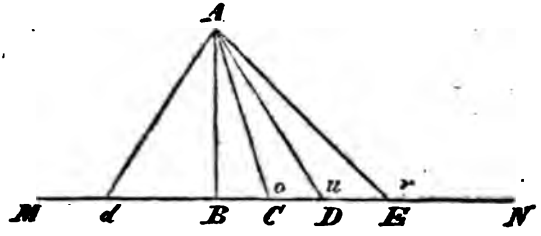
Bew. Es sey in dem Dreyeck ABC (vergl. die rhergehende Fig.) der Winkel C > A, so muß auch e Seite AB > BC seyn. Denn gesetzt, es wäre AB = BC, so müßte auch C = A seyn (55, 2. Zus.); und äre BC > AB, so müßte A > C seyn (58.); beydes er ist gegen die Voraussetzung, daß C > A seyn solle; lglich muß AB > BC seyn.

1. Zus. *Die größte Seite in einem Dreyecke überupt steht dem größten* Winkel desselben gegenüber.

also auch AC + CE + EB > AD + DB
d. i. AC + CB > AD + DB.

63. Lehrſ. Das Perpendikel AB iſt unter allen Linien, die von A nach der Linie MN gezogen werden können, die kleinſte.

Bew. Man ziehe irgend eine andere Linie von A nach MN, z. B. AC, ſo iſt ABC ein rechtwinkliges Dreyeck und der rechte Winkel in B, folglich AC > AB (59, 2. Zuſ.). Alſo iſt AB kleiner als jede andere Linie von A nach MN.



1. Zuſ. Das Perpendikel AB mißt den Abſtand des Punktes A von der Linie MN.

2. Zuſ. Es iſt AD > AC; AE > AD u. ſ. w., d. h. je weiter ſich die Linien, die von A nach MN gezogen werden können, von dem Perpendikel AB entfernen, deſto größer werden ſie. Denn die Winkel o, u, r ſind ſtumpfe Winkel, folglich ſind die Seiten, die ihnen gegenüberſtehen, größer, als die, welche ihren Nebenwinkeln gegenüberliegen.

3. Zuſ. Auch die Winkel o, u, r werden immer größer, und ihre Nebenwinkel immer kleiner, je weiter die Linie, an welcher ſie liegen, ſich von dem Perpendikel entfernt (53, 2. Zuſ.).

4. Zuſ. Auf beyden Seiten des Perpendikels AB ſind diejenigen Linien von A nach MN einander gleich, die

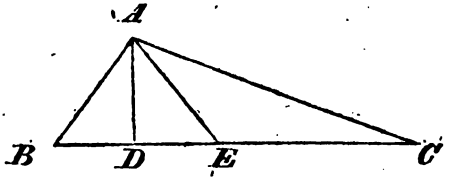
nach gleich entfernten Punkten von B gehen. Z. B. wenn Bd = BD ist, so ist Ad = AD (55, 1. Zus.).

5. Zus. Die Winkel, die auf beyden Seiten des Perpendikels AB an gleichen Linien liegen, sind einander gleich.

6. Zus. Für jede Linie von bestimmter Größe, die jedoch größer als AB seyn muß, gibt es auf jeder Seite des Perpendikels AB nur einen einzigen Punkt in der Linie MN, nach welchem sie, von A aus gelegt, hinpaßt.

7. Zus. Auch für jeden Winkel von bestimmter Größe gibt es auf jeder Seite des Perpendikels AB nur einen einzigen Punkt in der Linie MN, in welchem er durch die Linie von A aus gebildet wird.

64. Lehrs. Wenn in zwey Dreyecken zwey Seiten und der Winkel, welcher der größten von diesen beyden gegenüberliegt, gleich sind, so sind die ganzen Dreyecke einander gleich.



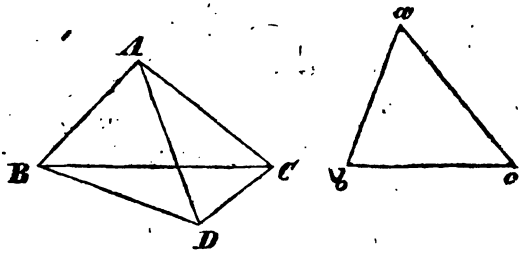
Bew. Man setze, es sey von dem Dreyeck ABC die Seite AC, AB und der Winkel B, als der größern Seite AC gegenüberliegend, gegeben, so ist das ganze Dreyeck dadurch bestimmt. Denn 1) ist durch den Winkel B die Lage der Seiten AB und BC gegeneinander bestimmt; 2) ist durch die Länge von AB der Abstand des Punktes A von der Linie BC bestimmt. Man denke sich darauf das Perpendikel AD auf BC oder die Verlängerung dieser Linie gefällt — (denn es fällt entweder innerhalb, oder *außerhalb*, oder in die Seite des Dreyecks selbst,

je nachdem der Winkel B ein spitzer, oder stumpfer, oder rechter ist) — so gibt es für eine Linie = AC auf jeder Seite des Perpendikels nur einen einzigen Punkt in der Linie BC, in welchen jene Linie fallen kann (63, 6. Zus.). Also ist 3) durch die Länge von AC auch der Punkt C in der Linie BC, und folglich BC selbst, bestimmt. Auf die andere Seite des Perpendikels kann AC hier nicht fallen, weil es als die größre Seite sich weiter als AB vom Perpendikel entfernen müßte (63, 2. Zus.), und dann läge der Winkel B außerhalb des Dreyecks, gegen die Voraussetzung. Ist aber das Dreyeck ABC durch die drey genannten Stücke bestimmt, so müssen alle Dreyecke einander gleich seyn, in welchen diese Stücke einander gleich sind.

1. Zus. Wenn ein Kathete und die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreyecks einem Katheten und der Hypotenuse eines andern gleich sind, so sind die ganzen Dreyecke einander gleich.

2. Zus. Wenn zwey Seiten AC, AB und der Winkel C, als der kleinern Seite gegenüberliegend, gegeben sind, so lassen sich zwey verschiedene Dreyecke, aber auch nicht mehr, daraus construiren, nehmlich: 1) das Dreyeck ABC; 2) das Dreyeck AEC, in welchem AE = AB ist. Daß dieses letztre, und sonst keines, möglich sey, erhellet aus 63. 6. Zus.

65. Lehrs. Wenn in zwey Dreyecken zwey Seiten gleich, der von diesen eingeschloßne Winkel aber in dem einen Dreyeck größer als in dem andern ist, so ist auch die dritte Seite in jenem Dreyecke größer als in diesem.



Bew. Es sey in den Dreyecken ABC und abc AB = ab, AC = ac und der Winkel BAC > bac. Man nehme an, der Winkel BAD sey = bac, mache AD = AC = ac und ziehe BD, so ist das Dreyeck BAD = bac (55.), folglich BD = bc. Ferner ziehe man DC, so ist

der Winkel ADC = ACD (55, 2. Zus.)
Auch ist — — ACD > BCD (39, 6.).
folglich — — ADC > BCD
Nun ist — — BDC > ADC (39, 6.)

also ist um so mehr — BDC > BCD. Folglich ist BC > BD (59.) und da BD = bc ist, so ist BC > bc.

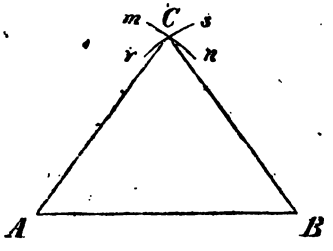
66. Lehrs. Wenn in zwey Dreyecken zwey Seiten gleich, die dritte aber ungleich ist, so ist auch der ihr gegenüber stehende Winkel ungleich, und zwar ist er in demjenigen Dreyecke am größten, in welchem diese Seite am größten ist.

Bew. Es sey in den Dreyecken ABC und abc (m. s. die Fig. zum vorhergehenden Satz) AB = ab, AC = ac und BC > bc, so muß auch der Winkel BAC > bac seyn. Denn wären beyde Winkel einander gleich, so müßten die ganzen Dreyecke einander gleich seyn (55.), folglich auch BC = bc, welches gegen die *Voraussetzung ist.* Wäre aber der Winkel BAC < bac,

so müßte BC < bc seyn (65.), ebenfalls gegen die Voraussetzung. Folglich muß BAC > bac seyn.

Anmerk. Man darf aber nicht glauben, daß der Winkel BAC in demselben Verhältniß größer wäre, als bac, in welchem BC > bc ist. Eben so wenig ist im vorhergehenden Fall die Seite BC in demselben Verhältniß größer, als bc, in welchem der Winkel BAC > bac ist.

67. Aufgabe: Ein gleichschenkliges Dreyeck zu construiren.



Auflösung. Man nehme eine beliebige gerade Linie, AB, als Grundlinie an, schlage über derselben aus A mit einer beliebigen Eröffnung des Zirkels, Am, die jedoch größer als $\frac{1}{2}$ AB seyn muß (61.), einen Bogen, mn, und einen ähnlichen Bogen, rs, aus B mit der Eröffnung des Zirkels Br = Am. Nach dem Punkt C, in welchem beyde Bogen einander schneiden, ziehe man darauf AC und BC, so erhält man das verlangte Dreyeck.

Bew. Alle geraden Linien von A nach mn sind einander gleich; eben so sind es alle geraden Linien von B nach rs, (37, 1.). Da nun Br = Am seyn soll, so muß auch AC = BC seyn. Beyde Bogen aber müssen einander in irgend einem Punkte schneiden, weil Am > $\frac{1}{2}$ AB ist.

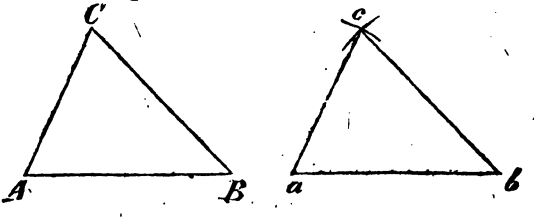
1. Zus. Soll das Dreyeck über einer gegebe-

r Linie errichtet werden, ſo ſetze man dieſe an die lle von AB.

2. Zuſ. Ueber einer gegebenen geraden Linie ſind ählige gleichſchenklige Dreyecke möglich.

3. Zuſ. Wird Am = AB genommen, ſo wird Dreyeck gleichſeitig.

68. Aufg. Ein Dreyeck zu verzeichnen, einem gegebenen Dreyeck, ABC, gleich

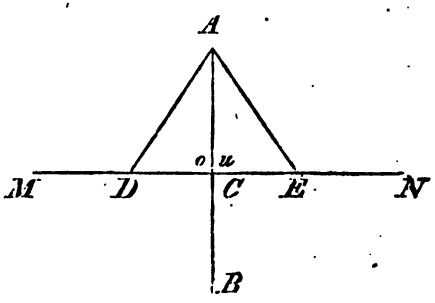


Auflöſ. Man ziehe ab = AB; beſchreibe aus a einer Eröffnung des Zirkels = AC einen Bogen über und aus b, mit einer Eröffnung des Zirkels = BC, n andern. Nach dem Punkt c, in welchem beyde gen einander ſchneiden, ziehe man die Linien ac, bc, iſt abc das verlangte Dreyeck.

Bew. Die Seiten des Dreyecks abc ſind, zufolder Conſtruction, den Seiten des Dreyecks ABC gleich, glich ſind beyde Dreyecke einander gleich (57.).

Zuſ. Anſtatt des Dreyecks ABC, können auch drey ien gegeben ſeyn, um ein Dreyeck daraus zu verfern; nur müſſen jede zwey derſelben größer ſeyn als dritte (61.).

69. Aufg. Durch einen Punkt C einer raden Linie, MN, von unbeſtimmter Grö, eine andere Linie, AB, ſenkrecht zu zien.



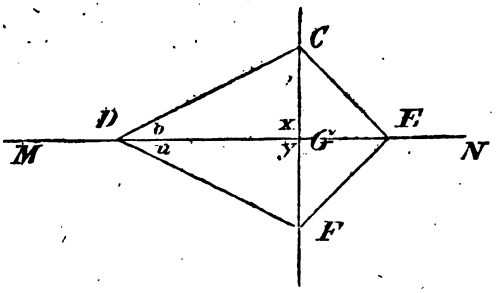
Auflöſ. Man mache aus C mit einerley Öffnung des Zirkels zu beyden Seiten die Durchſchnitte D und E, beſchreibe über DE ein gleichſchenkliges Dreyeck DAE, (67, 1. Zuſ.) und ziehe durch A und C die Linie AB, ſo iſt dieſe auf MN ſenkrecht.

Bew. Die Dreyecke ACD und ACE ſind einander gleich (57.); folglich iſt auch der Winkel o = u (55, 1. Zuſ.); folglich iſt jeder = 1 R.; alſo AB auf MN ſenkrecht.

1. Zuſ. Ein Perpendikel, aus der Spitze eines gleichſchenkligen Dreyecks auf die Grundlinie gezogen, halbirt nicht nur die Grundlinie, ſondern auch den ihr gegenüberliegenden Winkel und das ganze Dreyeck.

2. Zuſ. Eine gerade Linie aus der Spitze eines gleichſchenkligen Dreyecks auf die Mitte der Grundlinie gezogen, ſteht ſenkrecht auf dieſer.

70. Aufg. Durch einen Punkt C außerhalb der geraden Linie, MN, ein Perpendikel auf MN zu ziehen.



Auflöſ. Man ziehe aus C zwey willkührliche Linien, CD und CE, nach der Linie MN, ſchlage alsdann aus D mit einer Eröffnung des Zirkels = DC einen Bogen unterhalb MN; ingleichen aus E, mit einer Eröffnung des Zirkels = EC, ebendaſelbſt einen andern Bogen. Der Durchſchnittspunkt, F, beyder Bogen gibt, nebſt dem Punkt C, die Richtung des verlangten Perpendikels CF.

Bew. Man ziehe DF und EF, ſo ſind die Dreyecke DCE und DFE einander gleich (57.); folglich iſt auch o = u (55, 1. Zuſ.). Ferner iſt das Dreyeck CDG = FDG (55.); folglich iſt auch x = y; alſo MN ſenkrecht auf CF, und CF ſenkrecht auf MN.

Die Nothwendigkeit eines Durchſchnittspunktes F der Bogen aus D und E ergibt ſich daraus, daß DF + EF > DE iſt.

71. Aufg. Eine gerade Linie in zwey gleiche Theile zu theilen.

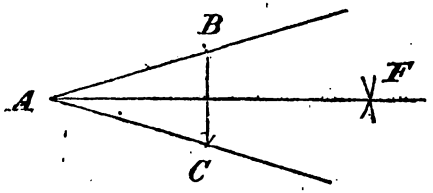
Auflöſ. Man beſchreibe über derſelben ein gleichſchenkliges Dreyeck, und fälle aus der Spitze deſſelben ein Perpendikel auf die Grundlinie.

Der Beweis gründet ſich auf 69, 1. Zuſ.

Zuſ. Durch fortgeſetztes Halbiren eines jeden Theils der Linie läßt ſich dieſe in 4, 8, 16, ꝛc. gleiche Theile *theilen.*

Anmerk. Eine gerade Linie in drey oder jede beliebige Anzahl gleicher Theile zu theilen, wird im folgenden Abschnitt gelehrt (102.).

72. Aufg. Einen Winkel, A, in zwey gleiche Theile zu theilen.



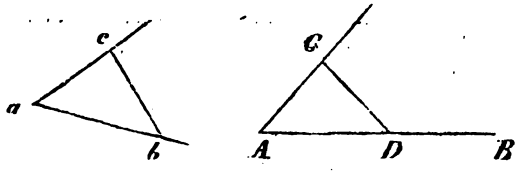
Auflös. Man nehme AB willkührlich, mache AC = AB und ziehe BC, so ist BAC ein gleichschenkliges Dreyeck. Alsdann ziehe man aus A die Linie AF senkrecht auf BC, so halbirt diese den Winkel A.

Der Beweis ist ebenfalls in 69, 1. Zus. enthalten.

Zus. Durch fortgesetztes Halbiren eines jeden Theils kann der ganze Winkel auch in 4, 8, 16, ꝛc. gleiche Theile getheilt werden.

Anmerk. Einen Winkel in drey gleiche Theile zu theilen ist ungleich schwieriger, als eine gerade Linie auf diese Art zu theilen. Diese Aufgabe (problema trisectionis anguli) hat daher schon die alten Mathematiker viel beschäftigt, und es ist erweislich, daß sie sich nicht vermittelst des Kreises und der geraden Linie, auf eine geometrische Weise, auflösen lasse. Gleichwohl hat man eine Menge mißlungener Versuche, sie auf diese Art aufzulösen. Einer der besten von diesen, d. h. welcher der Wahrheit sehr nahe kommt, ist der von Albrecht Dürer, den Kästner in seinen Geometr. Abhh. 1ste Samml. S. 241. ff. beschreibt, wo er jedoch durch einen Rechnungsfehler bey weitem nicht so vortheilhaft erscheint, als er wirklich ist. Uebrigens ist diese Aufgabe einerley mit der Aufgabe: einen Bogen in drey gleiche Theile zu theilen. Man vergleiche daher unten §. 142. Anmerk.

73. Aufg. Einen gegebenen Winkel, a, an eine gerade Linie, AB, in den Punkt A zu tragen.



Auflöſ. Man ziehe zwiſchen den Schenkeln des Winkels a die beliebige gerade Linie bc, mache darauf AD = ab, ſchlage aus A mit einer Eröffnung des Zirkels = ac einen Bogen über AD, und aus D mit einer Eröffnung des Zirkels = bc einen andern Bogen, der jenen in C durchſchneidet, endlich ziehe man eine gerade Linie durch A und C, ſo iſt DAC der verlangte Winkel.

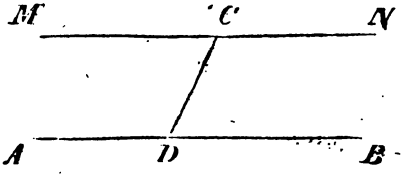
Bew. Man ziehe CD, ſo iſt das Dreyeck ADC = abc (68. und 57.), und der Winkel A = a (55, 1. Zuſ.).

Zuſ. Um ein Perpendikel auf das Ende einer geraden Linie zu errichten, kann man erſt ein Perpendikel in einem beliebigen Punkt einer andern Linie errichten, und dann den rechten Winkel an das Ende der erſtern Linie übertragen. (Vergl. unten 154.).

Anmerk. Da das Uebertragen der Winkel ſo häufig nothwendig wird, ſo hat man zur Erleichterung deſſelben noch eine andere Methode, die ſich auf die Lehre vom Kreiſe gründet, und darin beſteht, daß man zwiſchen die Schenkel des Winkels mit einer beliebigen Eröffnung des Zirkels einen Bogen ſchlägt, alsdann aus A mit derſelben Eröffnung ebenfalls einen Bogen von unbeſtimmter Größe, der die Linie AB trifft, darauf die Sehne des erſtern Bogens mißt, und ſie auf den andern Bogen aus dem Punkte, wo er die Linie AB trifft, überträgt; der andere Punkt, in welchem die

Sehne mit dem Bogen zusammenfällt, gibt mit dem Punkt A die Richtung für den andern Schenkel des Winkels. — Ein mechanisches Hülfsmittel zur Uebertragung der Winkel ist der Transporteur.

74. Aufg. Durch einen Punkt C eine Linie mit AB parallel zu ziehen.



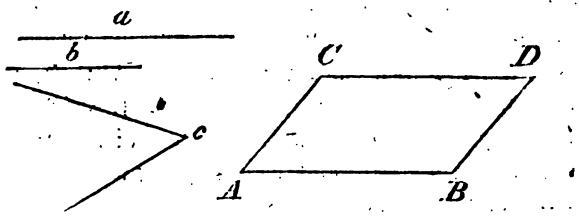
Auflös. Man ziehe aus C eine gerade Linie, CD, willkührlich nach AB, und mache den Winkel DCM = CDB, so ist CM oder MN || AB.

Bew. Verlängert man die Linie CD nach beyden Seiten hin, so werden die Linien MN und AB so von ihr geschnitten, daß die Winkel MCD und BDC gleich sind; folglich sind die Linien parallel. (50, 1. Zus.)

Anmerk. Man hat auch verschiedene mechanische Hülfsmittel, um Parallellinien zu ziehen; dergleichen sind das Parallel-Lineal, das Anschlag-Lineal in Verbindung mit einem Reißbret, und das rechtwinklige Dreyeck nebst einem guten Lineal.

75. Aufg. Wenn zwey gerade Linien, a und b, und ein Winkel, c, gegeben sind, ein Parallelogramm zu verfertigen, das die gegebenen Stücke enthält.

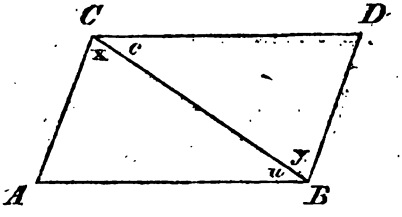
Auflös. Man nehme eine gerade Linie AB = a, trage an A den gegebenen Winkel c (73.), mache AC = b, und ziehe CD || AB, und BD || AC (74.): so ist AD das verlangte Parallelogramm.



Der Beweis ergibt sich aus der Construction von selbst.

76. Erklärung. Eine gerade Linie, die innerhalb einer geradlinigen Figur von einem Winkel zum andern gezogen wird, ohne mit der Seite der Figur zusammen zu fallen, heißt eine Diagonale oder Diagonallinie.

77. Lehrs. Ein Parallelogramm wird durch die Diagonallinie in zwey gleiche Dreyecke getheilt.



Bew. Man ziehe in dem Parallelogramm AD die Diagonale BC, so ist

$$\left.\begin{array}{r} BC = BC \\ o = u \\ y = x \end{array}\right\} \text{ als Wechselswinkel}$$

folglich das Dreyeck BCD = ABC (49.).

1. Zus. Zieht man statt BC die Diagonale AD, so ist auch Dr. $ABD = ACD$; folglich jedes gleich der

Hälfte des Parallelogramms, folglich auch dem Dr. ABC und BDC an Größe gleich, obwohl nicht an Gestalt.

2. Zuſ. Da das Dreyeck BCD = ABC iſt, ſo iſt auch BD = AC, und CD = AB (55, 1. Zuſ.), d. h. die gegenüberſtehenden Seiten eines Parallelogramms, oder, Parallelen zwiſchen Parallelen ſind einander gleich.

3. Zuſ. Da o = u
und x = y iſt,
ſo iſt auch o + x = u + y (39, 9.), d. i. C = B. Und aus der Gleichheit der Dreyecke folgt auch, daß A = D iſt. Folglich ſind in einem Parallelogramm die ſchräg gegenüberliegenden Winkel einander gleich.

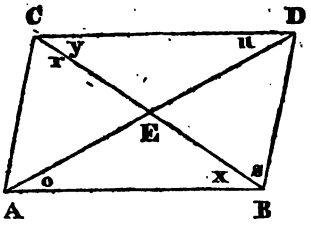
4. Zuſ. Durch einen einzigen Winkel eines Parallelogramms werden alle Winkel deſſelben beſtimmt.

5. Zuſ. Die Summe aller Winkel in einem Parallelogramm iſt = 4 R.

6. Zuſ. Die Summe der Winkel in jedem Viereck iſt = 4 R., da es durch die Diagonale in zwey Dreyecke getheilt wird.

78. Erklärung. Wenn in einem Parallelogramm alle Seiten einander gleich und alle Winkel rechte ſind, ſo heißt es ein Quadrat (quadratum); ſind zwar alle Seiten gleich, aber die Winkel ſchief, ſo heißt es eine Raute (rhombus); ſind die an einander ſtoßenden Seiten ungleich, und alle Winkel rechte, ſo heißt es ein Rechteck (rectangulum); ſind endlich, bey ungleichen an einander ſtoßenden Seiten, die Winkel ſchief, ſo heißt es ein Rhomboid (rhomboides).

79. Lehrſ. Die beyden Diagonalen eines Parallelogramms halbiren einander gegenſeitig.



Bew. In dem Parallelogramm ABCD ist Dr. AEB = CED, weil AB = CD (77, 2. Zus.) o = u; x = y, als Wechselsw. Folglich ist auch EB = EC; AE = DE (49, Zus.)

1. Zus. Eben so ist auch Dr. AEC = BED.

Aus 109, 1. Zus. erhellet, daß alle vier Dreyecke einander gleich sind.

2. Zus. Jede gerade Linie, zwischen den gegenüberstehenden Seiten eines Parallelogramms, durch die Mitte der Diagonalen gezogen, theilt das Parallelogramm in zwey gleiche Theile.

80. Lehrs. Wenn in einem Viereck die beyden Diagonalen einander gegenseitig halbiren, so ist es ein Parallelogramm.

Bew. Es sey in dem Viereck ABCD (s. die vorhergeh. Fig.) AE = DE; BE = CE, so ist auch Dr. AEB = CED; und Dr. AEC = BED (55.); folglich o = u, und r = s; und daher AB || CD; und AC || BD (50, 1. Zus.).

81. Lehrs. Wenn in einem Viereck die gegenüberstehenden Seiten einander gleich sind, so sind sie auch parallel, und die Figur ist folglich ein Parallelogramm.

Bew. Es sey AB = CD (m. s. die Fig. zu 77.); AC = BD; man ziehe die Diagonale BC; alsdann ist das Dr. *ABC* = *BCD* (57); folglich der Winkel x = y,

beyden einander gleich. Folglich ist die Summe aller Glieder der ersten Reihe um 2 größer, als die Summe der dritten Reihe. Also ist die Summe der Seiten $= p + 3$.

Die Summe der Dreyecke, welche durch die Diagonalen gebildet werden, ist also um 2 kleiner, als die Anzahl der Seiten der Figur.

1. Zus. Bezeichnet man die Anzahl der Seiten einer geradlinigen Figur durch n, so ist die Anzahl der Dreyecke, welche durch die Diagonalen gebildet werden $= n - 2$.

2. Zus. Die Anzahl der Diagonalen in einer Figur ist, wenn sie einander nicht schneiden, um 3 kleiner, als die Anzahl der Seiten. Ist diese also $= n$, so ist die Anzahl der Diagonalen $= n - 3$.

3. Zus. Hebt man die Einschränkung auf, daß die Diagonalen einander nicht schneiden, so ist die Anzahl aller Diagonalen in einer Figur von n Seiten $= \frac{n \cdot (n-3)}{2}$.

Denn man kann von jedem Winkelpunkte aus, wie von A, $(n - 3)$ Diagonalen ziehen. Dieß gibt in einem n eck $n \cdot (n-3)$ Diagonalen. Von diesen aber fallen je zwey zwischen denselben Punkten in eine zusammen; z. B. die von A nach C mit der von C nach A; daher reduzirt sich diese Anzahl auf die Hälfte und wird $= \frac{n \cdot (n-3)}{2}$.

4. Zus. Rechnet man zu der Anzahl aller Diagonalen noch die Anzahl der Seiten der Figur selbst hinzu, so erhält man $\frac{n \cdot (n-3)}{2} + n = \frac{n \cdot (n-3) + 2n}{2}$ $= \frac{nn - 3n + 2n}{2} = \frac{nn - n}{2} = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$. So groß ist also die Anzahl aller geraden Linien, die zwischen n Punkten, von denen nicht mehr als zwey in einer geraden Linie liegen, möglich sind. — Man kann sich auch *vorstellen*, es werden von jedem der n Punkte nach den

übrigen $n-1$ Punkten gerade Linien gezogen, d. i. $n-1$ Linien; also aus allen n Punkten zusammen $n.(n-1)$ Linien; und da von diesen wieder je zwey und zwey zusammenfallen, so ist ihre Anzahl $= \frac{n.(n-1)}{1.2}$.

85. Lehrs. Die Summe aller Winkel in einem Vieleck beträgt noch einmal soviel rechte, als die Anzahl der Seiten, weniger 4 rechten.

Bew. Es sey die Anzahl der Seiten $= n$, so ist die Anzahl der Dreyecke, in welche das Vieleck durch Diagonalen, die sich nicht schneiden, zertheilt werden kann, $= n-2$ (84.), und die Summe der Winkel in jedem derselben $= 2$ R.; folglich die Summe aller $= 2(n-2)$ R. $= 2n$ R. $- 4$ R.

1. Zus. So wie die Summe der Winkel in allen Dreyecken einander gleich ist, so ist sie es auch in allen geradlinigen Figuren von gleichvielen Seiten, so ungleich übrigens die Figuren selbst und ihre Winkel seyn mögen.

2. Zus. In einem regelmäßigen Vieleck von n Seiten ist die Größe eines jeden Winkels $= \frac{2n\text{ R.} - 4\text{ R.}}{n}$

$= 2$ R. $- \frac{4\text{ R.}}{n}$

Wie groß ist die Summe aller äußern Winkel eines Vielecks, die dadurch entstehen, daß die Seiten nach einerley Richtung hin verlängert werden, nehmlich AB über B hinaus, BC über C hinaus, CD über D hinaus u. s. w.?

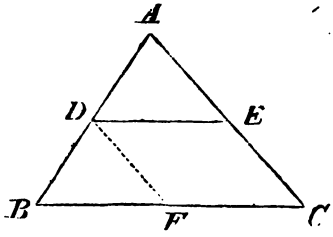
86. Aufg. Ein Vieleck zu verzeichnen, das einem gegebenen gleich sey.

Auflös. Man soll z. B. ein Fünfeck $=$ ABCDE verzeichnen, so mache man ab $=$ AB, trage an b einen Winkel $=$ B, mache bc $=$ BC; trage an c einen Winkel $=$ C u. s. w.

3. Zuſ. Es bedeute m irgend eine ganze Zahl, ſo iſt mp : mp′ = AM : AN, d. h. gleiche Mengen der gleichen Theile beyder Linien, AM und AN, verhalten ſich zu einander wie die ganzen Linien.

4. Zuſ. Gleiche Mengen der gleichen Theile von AM und AN fallen zwiſchen einerley Parallellinien. Daher verhalten ſich auch ſolche Stücke der Linien AM und AN, die zwiſchen einerley Parallellinien fallen, wie die ganzen Linien.

88. Lehrſ. Wenn in einem Dreyeck, ABC, eine Linie, DE, parallel mit der Grundlinie, BC, gezogen wird, ſo verhalten ſich ſowohl die obern Abſchnitte, AD und AE, als die untern, DB und EC, zu einander wie die ganzen Seiten, AB : AC.



Bew. Man denke ſich die Linie AB in n gleiche Theile getheilt, und nehme an, ein Theilungspunkt falle in D; alsdann denke man ſich durch alle Theilungspunkte von AB Parallelen mit BC nach AC gezogen: ſo wird auch AC dadurch in n gleiche Theile getheilt (87.). Eine der Parallelen iſt DE; es liegen daher ſowohl über als unter derſelben eben ſo viele der gleichen Theile von AB, als der gleichen Theile von AC; folglich iſt AD : AE = AB : AC; ingleichen DB : EC = AB : AC (87, 4. Zuſ.).

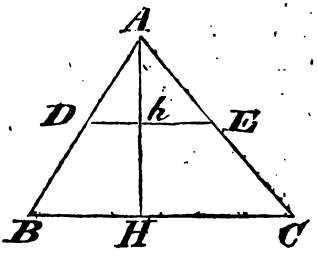
Anmerk. Die Annahme, daß ein Theilungspunkt in D falle, kann in aller Schärfe nur dann ſtatt finden, wenn das Verhältniß der Linien AB : AD rational iſt. Iſt es

gegen irrational, so haben die Linien kein gemeinschaftliches Maaß, und heißen deßhalb incommensurabel. Indessen da n eine jede noch so große Zahl bedeuten kann, so kann ein Theil von AB so klein werden, als man immer will; folglich kann man auch einen Theilungspunkt dem Punkte D, durch eine ins Unendliche fortgesetzte Verkleinerung der Theile von AB, so nahe bringen, daß der Unterschied so gut als verschwindet; und da der obige Satz, unter der angenommenen Voraussetzung, bey keiner noch so weit gehenden Theilung von AB aufhört, wahr zu bleiben, so gilt er auch für den Fall, da AB : AD wirklich irrational sind, indem dieser Fall nur als das letzte Glied der unendlichen Reihe von Fällen, wodurch man sich dem Punkte D immer mehr und mehr nähert, zu betrachten ist.

1. Zus. Aus AD : AE = AB : AC
und DB : EC = AB : AC
folgt AD : AE = DB : EC (Nr. 345.).

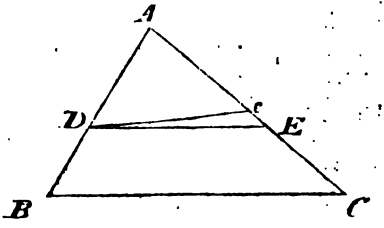
2. Zus. Betrachtet man AC als Grundlinie und zieht DF || AC, so ist AB : BC = AD : FC; oder, da FC = DE ist, (77, 1. Zus.), AB : BC = AD : DE, d. h. in Beziehung auf die Grundlinie BC, es verhält sich die Seite des Dreyeckes zur Grundlinie, wie der nähere Abschnitt der Seite zur Parallellinie. — Zieht man durch E eine Parallele mit AB, so findet sich auf ähnliche Art: AC : BC = AE : DE.

3. Zus. Wenn man aus A ein Perpendikel AH auf BC fällt, welches von DE in h geschnitten wird, so ist AH : Ah = AB : AD, folglich auch = BC : DE.



Anmerk. Das Perpendikel aus der Spitze eines Dreyecks auf die gegenüberliegende Grundlinie oder deren Verlängerung bestimmt die Höhe des Dreyecks.

89. Lehrs. Umgekehrt, wenn in einem Dreyeck, ABC, eine Linie DE die Seiten AB, AC so schneidet, daß die obern, oder die untern, Abschnitte derselben sich so zu einander verhalten, wie die ganzen Seiten, so ist DE || BC.



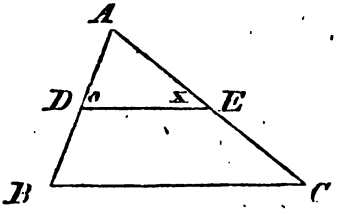
Bew. Gesetzt es sey DE nicht || BC, so sey De || BC. Alsdann wäre AB : AC = AD : Ae (88.). Der Voraussetzung zufolge aber ist auch AB : AC = AD : AE. Folglich wäre Ae = AE (Ar. 343.), welches unmöglich ist. Also muß DE || BC seyn.

90. Erklärung. Geradlinige Figuren sind einander ähnlich, wenn sie 1) eine gleiche Anzahl Seiten haben; 2) wenn die Winkel der einen den Winkeln der andern gleich sind, und in gleicher Ordnung auf einander folgen; 3) wenn die Seiten, welche die gleichen Winkel einschließen, in allen einerley Verhältniß haben.

91. Erklärung. Diejenigen Seiten ähnlicher Figuren, welche zwischen gleichen Winkeln liegen, heißen gleichnamige Seiten. In ähnlichen Dreyecken kann man ihre Lage auch durch die gleichen Winkel, denen sie gegenüberliegen, bestimmen.

92. Lehrs. Wenn in einem Dreyeck, ABC, eine Linie, DE, parallel mit einer Seite, BC,

ezogen wird, so ist das Dreyeck ADE dem Dreyeck ABC ähnlich.



Bew. 1) Was die Winkel betrifft, so ist A beyen Dreyecken gemein, o = B, und x = C (51.). 2) In nsehung der Seiten ist AD : AE = AB : AC (88.); ferer AD : DE = AB : BC; und AE : ED = AC : BC (88, . Zus.) Folglich ist das Dreyeck ADE ∼ ABC.

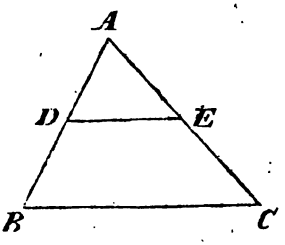
Das Zeichen ∼ bedeutet ähnlich.

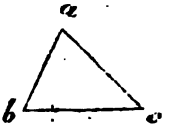
Zus. Denkt man sich aus A ein Perpendikel auf C oder deren Verlängerung, wie in der Figur zu 88, . Zus., so steht es auch auf DE oder deren Verlängerung senkrecht, und bezeichnet folglich die Höhe des Dreyecks ADE; da nun AH : Ah = BC : DE ist (88, 3. Zus.), o verhalten sich die Höhen ähnlicher Dreyecke, wie die Grundlinien derselben.

93. Anmerk. So wie die Congruenz zweyer Dreyecke aus der Gleichheit derjenigen Theile erkannt wird, von welchen die Größe und Gestalt eines Dreyecks bhängen; so läßt sich die Aehnlichkeit derselben aus der Gleichheit derjenigen Stücke in ihnen folgern, durch welche ie Gestalt eines Dreyecks bestimmt wird. Drey Stücke aren jedesmal zur Bestimmung der Gestalt und Größe ines Dreyecks erforderlich, und es ließen sich im Allgeeinen drey Fälle unterscheiden, in welchen eine Conruenz statt findet. Eben so hängt auch die Gestalt eines Dreyecks von je drey Stücken desselben ab, und es

lassen sich in Absicht auf die Aehnlichkeit der Dreyecke eben so viele Fälle unterscheiden.

94. Lehrs. Dreyecke sind einander ähnlich, wenn die Winkel des einen den Winkeln des andern gleich sind.





Bew. Es sey in den Dreyecken, ABC und abc, der Winkel A = a, B = b, C = c. Man mache AD = ab, AE = ac, und ziehe DE, so ist das Dr. ADE ≅ abc (55.); folglich der Winkel D = b. Da nun auch B = b ist, so muß D = B seyn; folglich ist DE || BC (50.); also das Dr. ADE ∼ ABC (92.). Es war aber auch ADE ≅ abc; folglich ist ABC ∼ abc.

1. Anmerk. Das Zeichen ≅ bedeutet gleich und ähnlich oder congruent.

2. Anmerk. Da aus der Gleichheit zweyer Winkel in zweyen Dreyecken die Gleichheit des dritten folgt, so ist es für diesen Satz hinreichend, nur zwey Winkel in beyden als gleich vorauszusetzen.

95. Lehrs. Dreyecke, in denen ein Winkel gleich ist, und die diesen Winkel einschließenden Seiten einerley Verhältniß haben, sind einander ähnlich.

Bew. Es sey in den Dreyecken ABC und abc (m. s. die vorhergeh. Fig.) der Winkel A = a, und AB : AC = ab : ac. Man mache AD = ab, und ziehe DE || BC, so ist das Dr. ADE ∼ ABC (92.). Ferner ist

AB : AC = AD : AE

u. (per hypoth.) AB : AC = ab : ac

folglich AD : AE = ab : ac (An. 345.)

Da nun AD = ab ist,

so ist auch AE = ac

Ferner war A = a

folglich ist Dr. ADE ≅ abc

Und da Dr. ADE ∼ ABC ist,

so ist auch Dr. ABC ∼ abc.

96. Lehrs. Dreyecke, deren Seiten einerley Verhältniß unter einander haben, sind einander ähnlich.

Bew. Es sey in den Dreyecken ABC und abc (m. s. die Figur zu 94.)

1) AB : AC = ab : ac

2) AB : BC = ab : bc, woraus von selbst schon folgt: 3) AC : BC = ac : bc.

Man mache wiederum AD = ab und ziehe DE || BC, so ist das Dr. ADE ∼ ABC (92.). Ferner ist AB : AC = AD : AE (88.). Dieß mit der ersten der angenommenen Proportionen verglichen, da AD = ab ist, gibt AE = ac. Eben so ist AB : BC = AD : DE (88, 2. Zus.), woraus, in Vergleichung mit der zweyten der obigen Proportionen, folgt, daß DE = bc ist.

Folglich ist das Dr. ADE ≅ abc

und da das Dr. ADE ∼ ABC war,

so ist auch das Dr. ABC ∼ abc.

97. Lehrs. Dreyecke sind auch einander ähnlich, wenn zwey Seiten einerley Verhältniß haben, und der Winkel, welcher der größern von diesen Seiten gegenüber liegt, in ihnen gleich ist.

S. die Figg. bey 94.

Bew. Es sey in den Dreyecken ABC und abc

AB : AC = ab : ac, und der Winkel B = b; AC aber > AB, folglich auch ac > ab. Man mache AD = ab und ziehe DE ∥ BC, so ist das Dr. ADE ∼ ABC. Ferner ist AB : AC = AD : AE. Dieß, verglichen mit der angenommenen Proportion, gibt

AE = ac

Da nun auch AD = ab (per construct.)

und D = b ist, weil beyde = B sind,

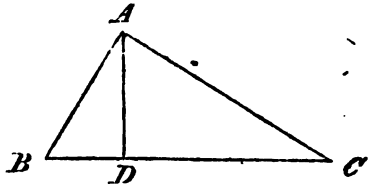
so ist das Dr. ADE ≅ abc (64.)

Nun ist Dr. ADE ∼ ABC

also ist das Dr. ABC ∼ abc.

Zus. Wenn in rechtwinkligen Dreyecken ein Kathete und die Hypotenuse einerley Verhältniß haben, so sind die Dreyecke einander ähnlich.

98. Lehrs. Wenn in einem rechtwinkligen Dreyecke ein Perpendikel aus der Spitze des rechten Winkels auf die Hypotenuse gefällt wird, so entstehen zwey Dreyecke, von denen jedes dem ganzen, und das eine dem andern ähnlich ist.



Bew. Es sey das Dr. ABC in A rechtwinklig, und AD senkrecht auf BC, so ist

I. der Winkel ADB = BAC = R.

ingleichen — — B = B

folgl. auch — — BAD = C (53, 4. Zus.)

also das Dr. ABD ∼ ABC. (94.).

II. Es ist der Winkel ADC = BAC = R.
ingleichen — — C = C
folglich auch — — CAD = B (53, 4. Zus.)
also das Dr. ACD ∼ ABC (94.).

III. Es ist der Winkel ADB = ADC = R.
ferner — — BAD = C (Nr. I.)
und — — CAD = B (Nr. II.)
also das Dr. ABD ∼ ACD.

1. Zus. Aus ABD ∼ ACD folgt BD : AD = AD : DC (90.), d. h. das Perpendikel ist die mittlere Proportional-Linie zwischen den beyden Abschnitten der Hypotenuse.

2. Zus. Aus ABD ∼ ABC folgt BD : AB = AB : BC, und aus ACD ∼ ABC folgt DC : AC = AC : BC, d. h. ein jeder Kathete des Dreyecks ABC ist die mittlere Proportional-Linie zwischen dem Abschnitt der Hypotenuse, der mit ihm zusammenstößt, und der ganzen Hypotenuse.

3. Zus. Aus den beyden Proportionen im 2. Zus. folgt
$AB^2 = BD \cdot BC$ (Ar. 331.)
und $AC^2 = DC \cdot BC$
folgl. ist $AB^2 + AC^2 = BD \cdot BC + DC \cdot BC$ (39, 9.)
$= (BD + DC) \cdot BC$ (Ar. 162.)
$= BC \cdot BC = BC^2$.

Dieß ist ein arithmetisch-geometrischer Beweis des pythagoräischen Lehrsatzes, von welchem im folgenden Abschnitt ein mehreres (132.).

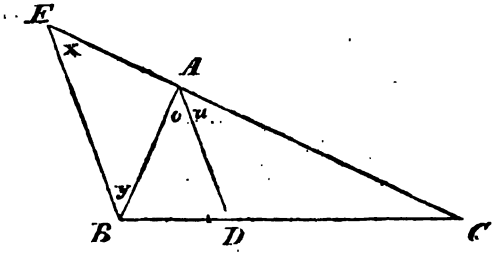
4. Zus. Aus $AB^2 = BD \cdot BC$
und $AC^2 = DC \cdot BC$
folgt auch $AB^2 : AC^2 = BD \cdot BC : DC \cdot BC$ (Ar. 341.)
$= BD : DC$
d. h. die Quadrate der beyden Katheten verhalten sich wie die Abschnitte der Hypotenuse.

5. Zus. Auf ähnliche Weise ergibt sich daß das

Quadrat eines jeden Katheten sich zu dem Quadrat der Hypotenuse, wie der angrenzende Abschnitt derselben zur ganzen Hypotenuse verhalte.

99. Lehrs. Wenn in einem Dreyeck, ABC, der Winkel BAC durch AD halbirt wird, so ist CD : DB = AC : AB, d. h. die Abschnitte der Seite BC verhalten sich wie die beyden andern Seiten.

Bew. Man verlängre AC, so daß AE = AB werde, und ziehe EB, so ist x = y (55, 2. Zus.). Ferner ist der Winkel BAC = x + y (53, 1. Zus.) oder = 2y. Folglich ist die Hälfte des Winkels BAC, d. i. o = y; also AD || EB (50, 1. Zus.); folglich CD : DB = CA : AE (88, 1. Zus.); und da AE = AB ist, so ist auch CD : DB = AC : AB.



100. Lehrs. Umgekehrt, wenn in einem Dreyeck, ABC, (m. s. die vorhergeh. Fig.) eine Linie AD aus der Spitze des Winkels BAC nach der gegenüberliegenden Seite, BC, so gezogen wird, daß CD : DB = AC : AB ist, so ist der Winkel BAC durch AD halbirt.

Bew. Durch B ziehe man BE || AD, und verlängere AC bis es BE in E schneidet, so ist

CD : DB = AC : AE

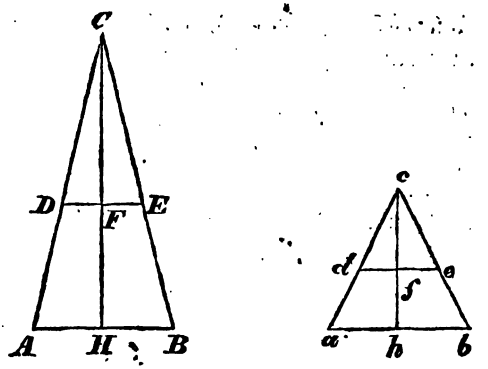
Es ist aber auch CD : DB = AC : AB (per hyp.)

Folglich ist AE = AB

und daher x = y (55, 2. Zuſ.)
Ferner iſt o = y (als Wechſelsw.)
alſo o = x (39, 8.)
Endlich iſt auch u = x (als correſp. W.)
folglich o = u.

Alſo iſt der Winkel BAC durch AD halbirt.

101. Lehrſ. Wenn zwey Dreyecke, ABC und abc, gleiche Grundlinien, AB = ab, aber ungleiche Höhen, CH > ch, haben, ſo ſind die mit den Grundlinien parallelen Durchſchnitte in beyden Dreyecken, wie DE und de, einander gleich, wenn die Abſtände der Durchſchnitte von der Spitze ſich wie die Höhen der Dreyecke verhalten, d. i. wenn CF : cf = CH : ch iſt.

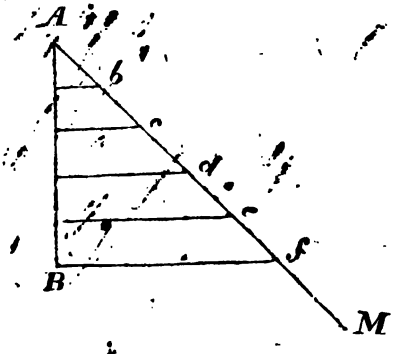


Bew. Es iſt CH : CF = AB : DE
und ch : cf = ab : de (88, 3. Zuſ.)
Nun iſt auch CH : CF = ch : cf — wie aus der angenommenen Proportion ſich leicht ergibt, folglich iſt AB : DE = ab : de (Ar. 345.), und da AB = ab iſt, ſo iſt auch DE = de. (Ar. 339.).

Es ſey alſo die Höhe des Dreyecks ABC noch ſo groß,

so ist es nicht möglich in ihm eine Parallele mit der Grundlinie zu ziehen, die man nicht auch in dem andern Dreyeck, abc, haben könnte.

102. Aufg. Eine gerade Linie in eine beliebige Anzahl gleicher Theile zu theilen.

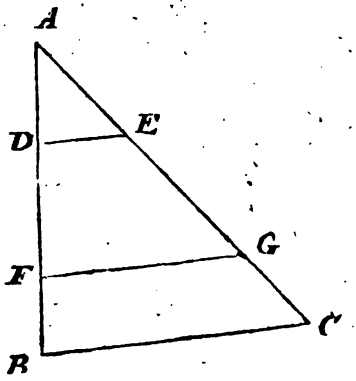


Auflös. Es soll z. B. AB in 5 gleiche Theile getheilt werden; man lege eine andere gerade Linie, AM, unter einem beliebigen Winkel an A, mache auf derselben von A aus 5 gleiche Abschnitte, Ab, bc u. s. w. von beliebiger Größe, durch den letzten Theilungspunkt f ziehe man eine gerade Linie nach B, und durch die übrigen Theilungspunkte lauter Parallelen mit Bf; diese theilen AB in 5 gleiche Theile.

Der Beweis erhellet aus 87.

103. Aufg. Eine gerade Linie so zu theilen, daß die Theile sich wie die Abschnitte einer andern gegebenen Linie verhalten.

Auflös. Es soll z. B. AB in drey Theile getheilt werden, die sich wie die Abschnitte, AE, EG, GC der Linie AC verhalten; man lege beyde Linien unter einem beliebigen Winkel, A, an einander, ziehe BC, und durch G und E die Parallelen GF und ED mit BC; dadurch wird AB auf die verlangte Weise getheilt.

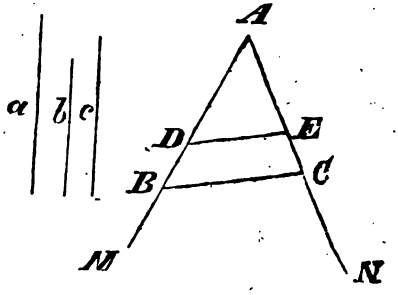


Bew. In dem Dreyeck AFG ist 1) AD : DF = : EG (88, 1. Zus.), ingleichen 2) AD : AE = AF : (88.). In dem Dreyeck ABC aber ist 3) FB : GC AF : AG; folglich (aus Nr. 2. und 3.) ist 4) AD : = FB : GC oder AD : FB = AE : GC (Nr. 342, 4.). lich (aus Nr. 1. und 4.) ergibt sich DF : FB = EG :

Also ist AD : DF : FB = AE : EG : GC.

Anmerk. Eine arithmetische Größe so zu theilen, daß Theile ein bestimmtes Verhältniß unter einander haben, ht den Gegenstand der sogenannten Gesellschafts- nung aus (Nr. 368.). Dieser Satz zeigt, wie solche gaben geometrisch aufgelöst werden können.

104. Aufg. Zu drey gegebenen Linien eine vierte Proportional-Linie zu finden.



Auflöſ. Es ſeyen die Linien a, b, c gegeben, und dazu werde eine vierte, x, geſucht, die mit jenen die Proportion a : b = c : x gibt; man lege zwey gerade Linien, AM, AN, unter einem beliebigen Winkel, A, an einander, mache darauf AB = a, AD = b, AC = c; ziehe BC und durch D DE || BC. Die Linie AE iſt die geſuchte Linie.

Der Beweis erhellet aus 88.

Anmerk. Dieſer Satz zeigt, wie ſich eine Aufgabe der Regel de tri geometriſch auflöſen laſſe.

105. Aufg. Ein Dreyeck zu verzeichnen, das einem gegebenen ähnlich ſey.

S. die Figg. zu 94.

Auflöſ. Ein jeder der obigen Sätze (92. 94. 95. und 96.) gibt ein Verfahren zur Auflöſung dieſer Aufgabe.

1) Das gegebene Dreyeck ſey ABC; man nehme in einer ſeiner Seiten einen beliebigen Punkt, D, und ziehe durch denſelben DE || BC; ſo iſt ADE ∾ ABC (92.)

2) Man nehme eine beliebige Linie, bc, als gleichnamige Seite von BC an, trage an b einen Winkel = B, und an c einen Winkel = C, ſo iſt Dr. abc ∾ ABC (94.).

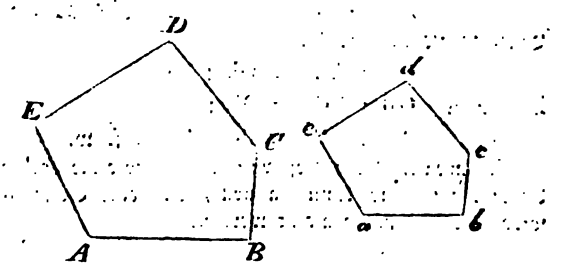
3) Man nehme wieder bc als gleichnamige Seite von BC, trage an b einen Winkel = B, ſuche alsdann zu BC, AB und bc die vierte Proportional-Linie, mache ab dieſer gleich und ziehe ac, ſo iſt Dr. abc ∾ ABC (95.).

4) Man ſuche zu BC, AB und der willkührlich angenommenen bc eine vierte Proportional-Linie, und beſchreibe mit dieſer aus b über bc einen Bogen; alsdann nehme man die vierte Proportional-Linie zu BC, AC und bc, und beſchreibe damit aus c einen Bogen, der den erſten ſchneide: ſo erhält man den Punkt a des Dreyecks abc, welches dem Dr. ABC ähnlich iſt (96.).

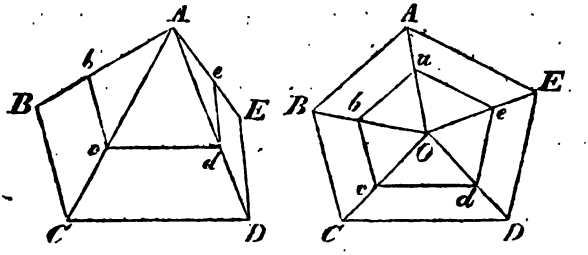
Der Beweis für ein jedes Verfahren iſt in dem bey jeder Nr. angeführten §. enthalten.

Anmerk. Diese Aufgabe gehört in die Klasse der unbestimmten, indem einem gegebenen Dreyecke unzählige andere ähnlich seyn können. Ist noch die gleichnamige Seite von einer der Seiten des Dreyecks ABC gegeben, so wird die Aufgabe bestimmt.

106. Aufg. Ein Vieleck zu verzeichnen, das einem gegebenen ähnlich sey.



Auflös. 1) Es sey das gegebene Vieleck ABCDE; man nehme ab willkührlich; trage an b einen Winkel = B, mache bc der vierten Proportional-Linie zu AB, BC und ab gleich; trage an c einen Winkel = C, mache cd der vierten Proportional-Linie zu BC, CD, bc gleich u. s. w.: so wird abcde ∼ ABCDE (90.).



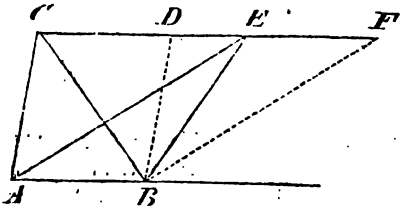
2) Man kann auch das gegebene Vieleck ABCDE durch Diagonalen oder auf andere Art in Dreyecke zertheilen, und durch Parallellinien, bc, cd u. s. w. mit den Seiten des Vielecks, wie beystehende Figuren es zeigen, ein ähnliches Vieleck erhalten.

chen Grundlinien und gleicher Höhe einander gleich.

2. Zus. Unter allen Parallelogrammen von gleichen Grundlinien und gleicher Höhe hat das rechtwinklige den kleinsten Umfang (63.)

Anmerk. Hieraus erhellet, wie mangelhaft es ist, die Größe einer Fläche, z. B. eines Landes, eines See's, einer Stadt, bloß nach ihrem Umfange zu bestimmen.

109. Lehrs. Dreyecke über einerley Grundlinie und zwischen denselben Parallellinien sind einander gleich.

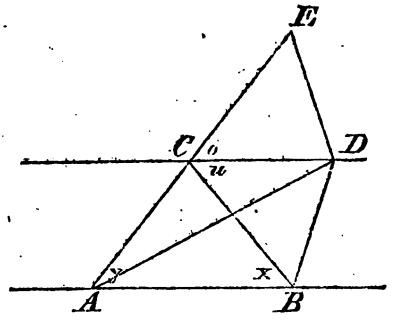


Bew. Es stelle ABC und ABE zwey solche Dreyecke vor; man ziehe durch B BD || AC, und BF || AE, so ist ABDC = ABFE (108.). Es ist aber Dr. ABC = ½ ABCD (77.), und Dr. ABE = ½ ABFE. Da nun die ganzen Parallelogramme einander gleich sind, so sind es auch ihre Hälften, also Dr. ABC = ABE.

1. Zus. Aus ähnlichen Gründen, wie in 108. 1. Zus. läßt sich schließen, daß Dreyecke von gleichen Grundlinien und gleicher Höhe einander gleich sind.

2. Zus. Ein Dreyeck ist halb so groß als ein Parallelogramm, das mit ihm gleiche Grundlinie und gleiche Höhe hat.

110. Lehrs. Unter allen Dreyecken von gleichen Grundlinien und gleicher Höhe hat das gleichschenklige den kleinsten Umfang.



Bew. Es ſey ABC gleichſchenklig, und über der undlinie deſſelben, AB, und zwiſchen den Parallelen 3 und CD noch irgend ein andres Dreyeck ABD errich-, ſo hat dieſes einen größern Umfang als jenes, wenn) + DB > AC + CB iſt.

Man verlängre alſo AC, ſo daß CE = CB werde, d ziehe ED, ſo iſt

CE = CB

CD = CD

und o = u (weil o = y, y = x, x = u iſt)

lglich iſt Dr. CDE = CDB; alſo auch DE = DB. Es aber AD + DE > AE (61.); folglich iſt auch AD + B > AC + CB.

Zuſ. Die Summe der Seiten AD + DB wird de-) größer, je weiter ſich D von der Spitze C des gleich- henkligen Dreyecks entfernt (62. u. 63.).

111. Aufg. Ein Parallelogramm in eine eliebige Anzahl gleicher Theile zu theilen.

Auflöſ. Man theile die Grundlinie in eine eben große Anzahl gleicher Theile, und ziehe durch die Thei- ngspunkte Parallelen mit den Seiten des Parallelo- ramms, ſo iſt die verlangte Theilung geſchehen.

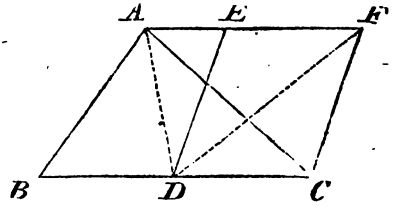
Bew. Man erhält auf dieſe Art lauter Parallelo-

gramme von gleichen Grundlinien und gleicher Höhe, folglich ſind ſie einander gleich. (108, 1. Zuſ.)

Zuſ. Auch ein Dreyeck wird in gleiche Theile getheilt, wenn man ſeine Grundlinie in gleiche Theile theilt, und nach der gegenüberliegenden Spitze aus den Theilungspunkten gerade Linien zieht. (109, 1. Zuſ.).

112. Aufg. Ein Parallelogramm zu verfertigen, das einem gegebenen Dreyeck gleich ſey.

Auflöſ. Es ſey ABC das gegebene Dreyeck; man halbire die Grundlinie BC in D, ziehe DE unter einem beliebigen Winkel, ferner AF || BC, und CF || DE, ſo iſt DCFE das verlangte Parallelogramm.



Bew. Man ziehe AD und DF, ſo iſt das Dr. ABD = ADC (111, Zuſ.); folglich iſt

Dr. ADC = ½ ABC
Ferner iſt Dr. DCF = ½ DCFE (77.)
ingleichen Dr. ADC = DCF (109.)
Folglich iſt ½ ABC = ½ DCFE
alſo auch ABC = DCFE.

1 Zuſ. Man könnte eben ſo gut das Parallelogramm über der ganzen Grundlinie BC conſtruiren, aber es nur halb ſo hoch als das Dreyeck machen.

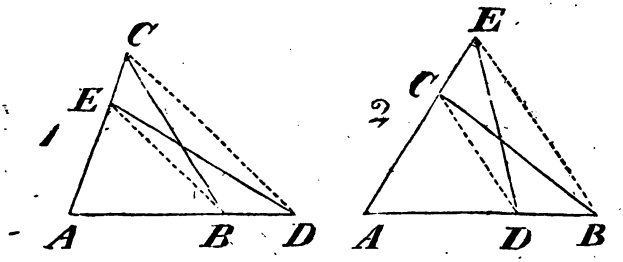
2. Zuſ. Ein Dreyeck iſt einem Parallelogramme gleich, das entweder eine gleiche Höhe, aber nur eine *halb* ſo große Grundlinie; oder eine gleiche Grundlinie, aber nur eine halb ſo große Höhe hat.

3. Zus. Ist ein Winkel des Parallelogramms gegeben, so ziehe man DE unter dem gegebenen Winkel; übrigens bleibt die Construction wie oben.

4. Zus. Aus dem 3. Zus. zeigt sich, wie ein Parallelogramm in ein anderes von einem gegebenen Winkel zu verwandeln sey. — Dasselbe ergibt sich auch schon aus 108.

5. Zus. Aus dem 2. Zus. ergibt sich, wie ein Dreyeck zu verfertigen ist, das einem gegebenen Parallelogramme gleich sey.

113. Aufg. Ein Dreyeck in ein anderes von einer gegebenen Seite zu verwandeln.



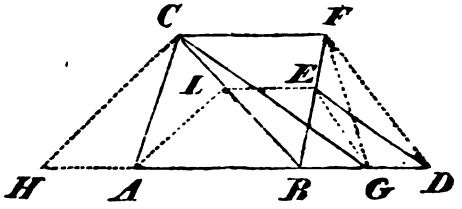
Auflös. Es sey ABC das zu verwandelnde Dreyeck, und AD die gegebene Seite. Man ziehe DC und durch B die Linie BE || DC — wobey in Fig. 2. die Seite AC verlängert werden muß —; darauf ziehe man DE, so ist ADE das verlangte Dreyeck.

Bew. Es ist Dr. ABC = ABE + BEC (Fig. 1.) und Dr. BEC = BED (109.) Folglich ist Dr. ABC = ABE + BED = ADE.

In Fig. 2. ist Dr. ABC = ABE — BEC, und Dr. BEC = BED; folglich ist Dr. ABC = ABE — BED = ADE.

114. Aufg. Ein Dreyeck zu verzeichnen,

das zweyen gegebenen Dreyecken an Inhalt gleich ſey.



Auflöſ. Es ſeyen ABC und BDE die beyden Dreyecke; man lege beyde auf einer geraden Linie, AD, an einander, ziehe CF || AD, verlängere BE bis F, ziehe FD, und durch E die Linie EG || FD; endlich ziehe man CG, ſo iſt ACG das verlangte Dreyeck.

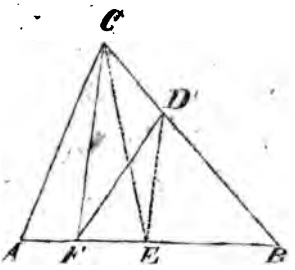
Bew. Es iſt nur zu beweiſen nöthig, daß Dr. BGC = BDE iſt. Es iſt aber Dr. BDE = BGE + GED; und Dr. GED = GEF (109.); folglich Dr. BDE = BGE + GEF = BGF; und Dr. BGF = BGC (109.) folgl. auch Dr. BDE = BGC.

1. Zuſ. Anſtatt der Linie GC kann man auch AF ziehen, und dann iſt AFG das verlangte Dreyeck.

2. Zuſ. Man kann auch anſtatt CF die Linie EL || AB ziehen; alsdann AL und durch C die Parallele CH mit AL; endlich HE, ſo iſt Dr. HED = ABC + BDE.

3. Zuſ. Mit dem gefundenen Dr. ACG könnte man ein drittes gegebenes vereinigen; alsdann ein viertes u. ſ. f. — ſo daß man nach dieſem Verfahren ein Dreyeck finden kann, das mehrern andern zuſammengenommen an Inhalt gleich iſt.

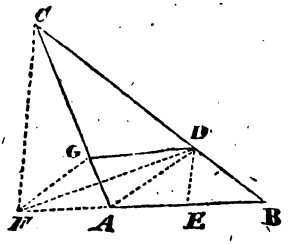
115. Aufg. **Ein Dreyeck aus einem in einer Seite gegebenen Punkt durch eine gerade Linie in zwey gleiche Theile zu theilen.**



Auflöſ. Es ſey das Dr. ABC, und D der gegenüberliegende Punkt; man halbire die Grundlinie AB in E, ziehe DE, und aus C die Parallele CF mit DE; alsdann iſt AF die geſuchte Linie.

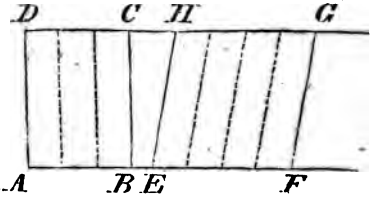
Bew. Man ziehe CE, ſo iſt Dr. BEC $= \frac{1}{2}$ ABC (11, Zuſ.). Es iſt aber BEC $=$ BED $+$ EDC; und EDC $=$ EDF; folglich BEC $=$ BED $+$ EDF $=$ BDF; ſo Dr. BDF $= \frac{1}{2}$ ABC; folglich iſt auch ACDF $= \frac{1}{2}$ ABC; ſo Dr. ABC durch DF in zwey gleiche Theile getheilt.

1. Zuſ. Fällt die Parallele CF außerhalb des Dreyecks, ſo muß die Grundlinie AB nach F hin verlängert, außer DF, noch DA, und durch F die Parallele FG mit DA gezogen werden; alsdann iſt DG die geſuchte Linie. — Denn es iſt wieder Dr. BDF $= \frac{1}{2}$ ABC; und BDF $=$ BDA $+$ ADF; ADF aber $=$ ADG (109.); folglich BDF $=$ BDA $+$ ADG $=$ ABDG, und daher ABDG $= \frac{1}{2}$ ABC.



2. Zuſ. Liegt der Punkt D gerade in der Mitte der Seite BC, ſo geht die Theilungslinie nach A, und die Parallele CF fällt mit der Seite AC zuſammen.

116. Lehrſ. Parallelogramme von gleicher Höhe verhalten ſich wie ihre Grundlinien.



Bew. Es ſeyen ABCD und EFGH zwey Parallelogramme von gleicher Höhe; man theile beyde Grundlinien in gleich große Theile, AB z. B. in 3, EF in 4 ſolche Theile — ein ſolcher Theil ſey = p — ſo iſt

AB = 3 p
EF = 4 p
folglich AB : EF = 3 p : 4 p (Ar. 341.)
= 3 : 4 (Ar. 342, 3.).

Ferner ziehe man durch die Theilungspunkte der Grundlinien Parallelen mit den Seiten der Parallelogramme, ſo erhält man in jedem Parallelogramm ſo viel kleinere Parallelogramme, als ſeine Grundlinie Theile = p hat, und alle dieſe Parallelogramme ſind einander gleich (111.). Es ſey eines derſelben = p′, ſo iſt

ABCD = 3 p′
und EFGH = 4 p′
folglich ABCD : EFGH = 3 p′ : 4 p′
= 3 : 4. Es war aber
auch AB : EF = 3 : 4
folglich iſt ABCD : EFGH = AB : EF (Ar. 345.).

Anmerk. Anſtatt AB in 3 und EF in 4 Theile getheilt

anzunehmen, kann man die Anzahl der Theile allgemein m und n ſetzen; ſo wird AB : EF = m : n; ingleichen ABCD : EFGH = m : n; alſo ebenfalls ABCD : EFGH = AB : EF.

Sind AB und EF incommenſurabel, ſo kann man auf ähnliche Art, wie in 88., durch eine ins Unendliche fortgeſetzte Verkleinerung des gemeinſchaftlichen Maaßes einer genauen Meſſung beyder Linien ſo nahe kommen, als man will, ohne daß der Satz je aufhörte, richtig zu ſeyn; alſo iſt er als allgemein gültig zu betrachten.

Zuſ. Auch Dreyecke, als die Hälften von Parallelogrammen gleicher Grundlinien und Höhe, verhalten ſich, bey gleicher Höhe, wie ihre Grundlinien.

117. Lehrſ. Parallelogramme von gleichen Grundlinien verhalten ſich wie ihre Höhen.

Bew. Man denke ſich die beyden Parallelogramme der vorigen Figur in Rechtecke verwandelt (112, 4. Zuſ.), und betrachte den Abſtand der Parallelen AF und DG als ihre Grundlinien, ſo ſind ihre Grundlinien gleich, und AB und EF ihre Höhen. Nun verhalten ſich jene Parallelogramme, wie AB : EF, alſo verhalten ſich auch die ihnen gleichen Rechtecke, wie AB : EF, d. i. wie ihre Höhen. Ein Rechteck aber iſt jedem andern Parallelogramme von gleicher Grundlinie und Höhe gleich; ſetzt man daher an die Stelle dieſer Rechtecke irgend ein Paar andere Parallelogramme, die mit ihnen gleiche Grundlinie und Höhe haben, ſo haben dieſe unter ſich gleiche Grundlinien und verhalten ſich auch wie AB : EF, d. i. wie ihre Höhen. Alſo verhalten ſich Parallelogramme von gleichen Grundlinien wie ihre Höhen.

Zuſ. Dreyecke von gleichen Grundlinien verhalten ſich wie ihre Höhen.

118. Lehrſ. Parallelogramme von ungleichen Grundlinien und ungleicher Höhe

sind in zusammengesetztem Verhältniß ihrer Grundlinien und Höhen, oder verhalten sich wie die Grundlinien multiplizirt mit den Höhen.

Bew. Man bezeichne drey verschiedene Parallelogramme durch P, π und p, die Grundlinien derselben durch G, g und g, und ihre Höhen durch H, H und h. Die zusammengehörigen Größen ordne man in eine Reihe, so erhält man

1) P G H
2) π g H
3) p g h

Hier drücken P und π zwey Parallelogramme von gleicher Höhe, aber verschiedenen Grundlinien aus; π und p zwey Parallelogramme von gleichen Grundlinien, aber verschiedener Höhe; endlich P und p zwey Parallelogramme von ungleichen Grundlinien und ungleicher Höhe. Nun ist

$$P : \pi = G : g \quad (116.)$$
$$\pi : p = H : h \quad (117.)$$

Folglich $P : p = GH : gh$ (Ar. 349.).

Anmerk. Um zu verstehen, was das Produkt einer Grundlinie und Höhe eigentlich sagen wolle, muß man sich erinnern, daß man überhaupt bey Zusammensetzung von Verhältnissen nie die benannten Größen selbst, welche die Glieder der einzelnen Verhältnisse ausmachen mögen, gebrauchen kann — weil zwey benannte Zahlen sich nicht zusammen multipliziren lassen — sondern daß man statt ihrer es mit den unbenannten Zahlen zu thun hat, die das Verhältniß jener Größen ausdrücken. Dasselbe ist auch schon bey jeder Rechnung der Regel de tri der Fall (Ar. 338, 2.). Man muß sich also auch hier an die Stelle sowohl der Grundlinien als der Höhen unbenannte Zahlen denken, die sich so zu einander verhalten, wie diese Größen. Und solche Zahlen erlangt man, wenn man die Linien mit einerley Maaße mißt. Die Produkte

dieser Zahlen, die also selbst wiederum unbenannt sind, drücken dann das Verhältniß der Parallelogramme gegen einander aus.

1. Zus. Dreyecke von ungleichen Grundlinien und ungleicher Höhe verhalten sich wie die Produkte ihrer Grundlinien und Höhen.

2. Zus. Parallelogramme sowohl als Dreyecke sind gleich, wenn die Produkte ihrer Grundlinien und Höhen gleich sind; und dieß ist der Fall, wenn ihre Höhen sich umgekehrt wie ihre Grundlinien verhalten.

Anmerk. Dieser Zusatz, verbunden mit 109, 1. Zus., bestimmt die dritte Art der Gleichheit der Dreyecke, nehmlich die ihrer Größe ohne Rücksicht auf ihre Gestalt (54.). Die Größe eines Dreyecks hängt lediglich von seiner Grundlinie und Höhe ab, und die Beschaffenheit der Winkel hat keinen Einfluß darauf.

3. Zus. Umgekehrt, wenn Parallelogramme einander gleich sind, so sind auch die Produkte ihrer Grundlinien und Höhen gleich. Dasselbe gilt von gleichen Dreyecken.

4. Zus. Ein Parallelogramm ist einem Dreyecke gleich, dessen Grundlinie mit der Höhe multiplizirt ein noch einmal so großes Produkt gibt, als das Produkt der Grundlinie und Höhe des Parallelogramms.

119. Erklärung. Der vorhergehende Satz macht die Grundlage für die Ausmessung der Parallelogramme, und aller Flächen überhaupt, aus. Zur Ausmessung irgend einer Größe wird eine andere ihr gleichartige erfordert, und jene wird durch diese gemessen, wenn ihr geometrisches Verhältniß zu dieser bestimmt wird. Wird diese $= 1$ gesetzt, so drückt die Zahl, welche das Verhältniß der andern Größe zu dieser bezeichnet, zugleich die Größe des Verhältnisses aus, oder zeigt unmittelbar an, *wie vielmal die eine* Größe in der andern enthalten

ist; und das ist unstreitig die bequemste Art der Messung. Die zur Einheit angenommene Größe heißt der Maaßstab oder das Maaß.

Der Maaßstab einer Fläche kann nur wiederum eine Fläche seyn. Man hat zum allgemeinen Flächenmaaß das Quadrat angenommen, und man nennt es einen Quadratzoll, einen Quadratfuß, eine Quadratmeile ꝛc., je nachdem die Seite desselben ein Zoll, oder ein Fuß, oder eine Meile ꝛc. ist.

120. Aufg. Ein Parallelogramm auszumessen.

Auflös. Man messe die Grundlinie und Höhe des Parallelogramms mit der Seite desjenigen Quadrats, das zum Maaßstabe dienen soll, und multiplizire die Zahlen, welche man durch die Messung beyder Linien erhält, zusammen, so gibt das Produkt die Anzahl der Quadrate, welche den Inhalt des Parallelogramms ausmachen.

Bew. Das Quadrat, welches zum Maaßstabe des Parallelogramms angenommen wird, ist ebenfalls ein Parallelogramm, folglich verhält es sich zu dem auszumessenden, wie das Produkt seiner Grundlinie und Höhe zu dem Produkt der Grundlinie und Höhe von diesem. Um diese Produkte zu erhalten, müssen die Verhältnisse der Grundlinien und Höhen beyder Parallelogramme gesucht, folglich diese Linien mit einerley Maaße gemessen werden (118. Anmerk.). Dieses Maaß ist hier die Seite des Quadrats selbst, die also $= 1$ zu setzen ist, und da sie mit der Grundlinie und Höhe desselben einerley ist, so ist das Produkt dieser beyden $= 1 . 1 = 1$. Es sey nun die Grundlinie des Parallelogramms (P) m mal und seine Höhe n mal so groß als die Seite des Quadrats (Q): so ist

$$Q : P = 1 : mn$$

folglich $P = mn\ Q$ (Ax. 329.), d. h. P ist mn mal so groß als Q.

Anmerk. Zu dieser Art von Messung braucht man nicht das Quadrat selbst, welches das eigentliche Maaß des Parallelogrammes ist, sondern nur die Seite desselben. Man findet aber auch durch diese nicht den Inhalt des Parallelogrammes selbst, sondern nur die Data zur Berechnung desselben. Das ganze Verfahren ist also keine unmittelbare, sondern eine mittelbare Messung. Eine unmittelbare würde große Schwierigkeiten haben, ja in vielen Fällen gar nicht auszuführen seyn. Es ist daher auch gar nicht gewöhnlich, die Quadratmaaße selbst zu verfertigen, sondern man begnügt sich mit den Seiten derselben, welches die gewöhnlichen Längenmaaße sind.

1. Zus. Ist das auszumessende Parallelogramm selbst wieder ein Quadrat, so ist seine Höhe der Grundlinie gleich. Man kann alsdann in der angegebenen Formel für P $n = m$ setzen, und es wird $P = m^2 Q$. Folglich ist $Q : P = 1 : m^2$, d. h. die Quadrate Q und P verhalten sich zu einander wie die arithmetischen Quadrate derjenigen Zahlen, welche das Verhältniß ihrer Seiten ausdrücken. Umgekehrt also verhalten sich die Seiten von Q und P wie die Quadratwurzeln der Zahlen, welche das Verhältniß der Quadrate selbst ausdrücken.

Hieraus erklärt sich, warum in der Arithmetik die zweyten Potenzen der Zahlen Quadrate genannt werden.

2. Zus. Was die Unterabtheilungen der Quadratmaaße anbetrifft, so ergibt sich aus 1. Zus., daß man von den kleinern Maaßen so viel auf ein größres rechnen müsse, als das arithmetische Quadrat der Zahl ausmacht, welche anzeigt, wie vielmal die Seite des kleinern in der Seite des größern enthalten ist. Wenn z. B. die Ruthe 12 Fuß hält, so hält die Quadratruthe 12 . 12, d. i. 144 Quadratfuß.

Hierauf hat man auch bey der Reduktion irgend einer Anzahl von Quadratmaaßen einer Art in eine andere von gleicher Benennung, aber verschiedener Größe zu achten, z. B. pariser Quadratfuße in rheinländische. Wenn nehmlich die Längenmaaße sich wie $m : n$ verhalten, so verhalten sich die davon benannten Quadratmaaße wie $m^2 : n^2$.

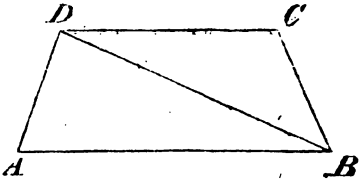
121. Aufg. Ein Dreyeck auszumessen.

Auflös. Man messe die Grundlinie und Höhe desselben mit einerley Längenmaaß, multiplizire die dadurch erhaltenen Zahlen zusammen, und halbire das Produkt, so gibt der Quotient den Inhalt des Dreyecks in Quadraten des gebrauchten Längenmaaßes.

Bew. Da ein Dreyeck halb so groß als ein Parallelogramm von gleicher Grundlinie und Höhe ist (109, 2. Zus.), und das Produkt der Grundlinie und Höhe den Inhalt des Parallelogramms in Quadratmaaßen ausdrückt (120.), so muß das Dreyeck der Hälfte dieses Produktes gleich seyn.

Zus. Es sey die Grundlinie eines Dreyecks = g, seine Höhe = h, so ist der Inhalt desselben = $\frac{hg}{2}$, wofür auch gesetzt werden kann $h \cdot \frac{g}{2}$ oder $g \cdot \frac{h}{2}$ d. h. der Inhalt eines Dreyecks wird auch durch das Produkt seiner Höhe mit der halben Grundlinie, oder seiner Grundlinie mit der halben Höhe ausgedrückt.

122. Aufg. Ein Trapezium, ABCD, auszumessen.



Auflös. Man addire die parallelen Seiten, AB und CD, und multiplizire ihre Summe mit der Hälfte ihres Abstandes, d. i. des Perpendikels zwischen ihnen.

Bew. Man ziehe die Diagonale BD, und bezeichne

den Abſtand der Parallelen AB und CD durch h, ſo iſt

$$\text{Dr. ABD} = \text{AB} \cdot \frac{h}{2}$$

$$\text{und Dr. CDB} = \text{CD} \cdot \frac{h}{2}$$

$$\text{folglich ABD} + \text{CDB} = \text{AB} \cdot \frac{h}{2} + \text{CD} \cdot \frac{h}{2}$$

$$\text{oder ABCD} = (\text{AB} + \text{CD}) \cdot \frac{h}{2}$$

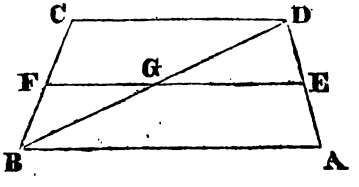
Es verſteht ſich, daß das Produkt bey allen ſolchen Flächen-Ausmeſſungen in Quadraten des gebrauchten Längenmaaßes auszudrücken iſt.

1. Zuſ. Ein Trapezium kann in zwey gleiche Theile getheilt werden, wenn man jede der parallelen Seiten halbirt, und durch die Theilungspunkte eine gerade Linie zieht.

2. Zuſ. Auf ähnliche Weiſe kann es auch in drey oder mehrere gleiche Theile getheilt werden.

3. Zuſ. Trapezien ſind einander gleich, wenn die Summen ihrer parallelen Seiten, und die Abſtände derſelben von einander gleich ſind; eben ſo auch, wenn die Produkte der Summe der parallelen Seiten, mit ihrem Abſtande multiplizirt, gleich ſind.

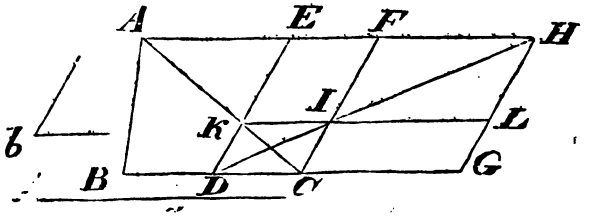
123. Eine gerade Linie EF, die in einem Trapezium ABCD mitten zwiſchen den parallelen Seiten deſſelben, ihnen parallel, gezogen wird, iſt der halben Summe der parallelen Seiten gleich.



Seiten einander gleich ſind, ſo ſind die ganzen Parallelogramme einander gleich; und verhalten ſich dieſe Produkte, wie m : n, ſo haben auch die Parallelogramme daſſelbe Verhältniß.

6. Zuſ. Auch Dreyecke, die einen gleichen Winkel haben, verhalten ſich wie die Produkte der Seiten, die dieſe Winkel einſchließen, und ſind folglich einander gleich, wenn dieſe Produkte gleich ſind. (118, 1. Zuſ.).

126. Aufg. Ein Parallelogramm von einem gegebenen Winkel und einer gegebenen Seite zu verfertigen, das einem gegebenen Dreyeck gleich ſey.



Auflöſ. Es ſey ABC das Dreyeck, a die Seite, und b der Winkel, die gegeben ſind. Man mache zuerſt das Parallelogramm DCFE = ABC und darin den Winkel EDC = b (112, 3. Zuſ.). Alsdann verlängere man EF, ſo daß EH = a werde, vollende das Parallelogramm DEHG (75.), ziehe die Diagonale DH, und durch den Punkt J, in welchem ſie die Seite CF ſchneidet, KL || DG, ſo iſt DKLG das verlangte Parallelogramm.

Bew. Es iſt das Parallelogramm DCFE = DCJK + KJFE; KJFE = CGLJ (125.); folglich DCFE = DCJK + CGLJ = DGLK; und da DCFE = ABC iſt, ſo iſt auch DGLK = ABC.

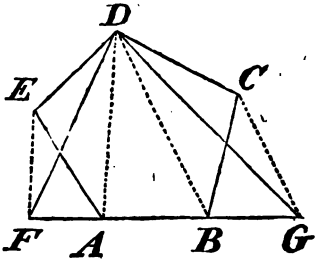
Es iſt ferner DG = EH = a; und Winkel EDG = b; folglich enthält das Parallelogramm DGLK die gegebene Seite und den gegebenen Winkel.

1. Zus. Hieraus ergibt sich auch, wie ein Parallelogramm von einem gegebenen Winkel und einer gegebenen Seite zu verfertigen ist, das einem gegebenen Parallelogramme gleich sey.

2. Zus. Jede geradlinige Figur in ein Parallelogramm zu verwandeln, zertheile man sie in Dreyecke, und verwandle diese in Parallelogramme von derselben Seite und demselben Winkel. Alsdann können alle Parallelogramme mit den gleichen Seiten so an einander gefügt werden, daß sie zusammen nur ein einziges Parallelogramm ausmachen. (Vergl. die folgende Aufgabe in 127.).

127. Aufg. Ein Fünfeck, ABCDE, in ein Dreyeck zu verwandeln.

Auflös. Man ziehe die Diagonalen AD und BD; ferner EF || AD, und CG || BD — wobey AB nach beyden Seiten verlängert werden muß —; endlich ziehe man FD und GD, so ist FGD das verlangte Dreyeck.

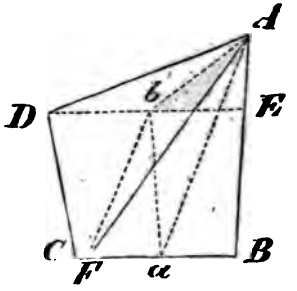


Bew. Es ist Dr. ADE = ADF; und Dr. BDC = BDG (109.); folglich ist Dr. FGD = ADE + ABD + BDC = ABCDE.

Auf diese Art läßt sich jedes Vieleck nach und nach auf ein Dreyeck zurückbringen; dieses kann alsdann in ein Parallelogramm verwandelt werden (126) — wodurch gleichfalls die Aufgabe 126, 2. Zus. aufgelöst wird.

128. Aufg. Ein beliebiges Viereck, ABCD,

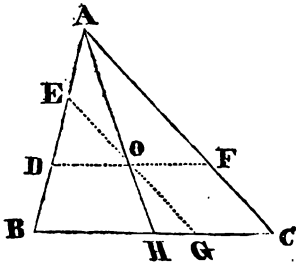
durch eine gerade Linie aus einem Wink
punkt in zwey gleiche Theile zu theilen.



Auflöſ. Man ziehe DE || CB, halbire CB in
DE in b; ziehe Aa, und durch b die Linie bF || A
endlich ziehe man AF, ſo halbirt dieſe das Viereck.

Bew. Man ziehe Ab und ab, ſo iſt ABab
Hälfte des Vierecks ABCD gleich (111. Zuſ. und 1
1. Zuſ.). Es iſt aber ABab = ABa + Aab; und A
= AaF; folglich ABab = ABa + AaF = ABF; fo
lich iſt ABF der Hälfte des Vierecks gleich.

129. Aufg. In einem Dreyeck ABC d
Punkt O zu finden, von welchem drey gera
Linien, OA, OB, OC, nach den Winkeln g
zogen, das Dreyeck in drey gleiche Thei
theilen.



Auflöſ. Man theile die Seite AB in drey gleiche Theile, ziehe durch D eine Parallele DF mit BC, und durch E eine Parallele EG mit AC. Der Durchſchnittspunkt O iſt der geſuchte Punkt.

Bew. Da der Abſtand der Linie DF von BC dem dritten Theil der Höhe des Dr. ABC gleich iſt, ſo iſt jenes Dreyeck über BC, deſſen Spitze in DF fällt, $= \frac{1}{3}$ ABC (117, Zuſ.); alſo auch Dr. BOC. Eben ſo iſt Dr. AOC $= \frac{1}{3}$ ABC; folglich muß auch Dr. AOB $= \frac{1}{3}$ ABC ſeyn. Alſo iſt das Dreyeck ABC durch OA, OB, OC in drey gleiche Theile getheilt.

1. Zuſ. Verlängert man AO bis BC, ſo wird dieſe Seite dadurch halbirt. Denn es iſt in dem Dr. ADF E $=$ AE (per constr.) folglich auch DO $=$ OF (88, 3. Zuſ.). Ferner iſt

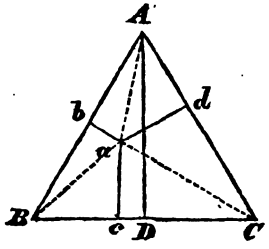
AO : DO $=$ AH : BH
und AO : OF $=$ AH : HC
folglich DO : OF $=$ BH : HC.

Da nun DO $=$ OF iſt, ſo iſt auch BH $=$ HC.

2. Zuſ. Auf gleiche Weiſe werden auch die Seiten AB und AC durch Verlängerung der Linien CO und BO halbirt.

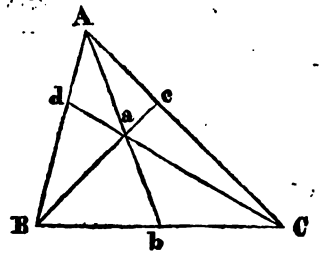
3. Zuſ. Man kann daher auch den Punkt O finden, wenn man das Dreyeck durch eine Linie aus dem Winkel, wie AH, halbirt, und von dieſer HO $= \frac{1}{3}$ AH nimmt.

130. Lehrſ. Wenn man in einem gleichſeitigen Dreyeck, ABC, aus irgend einem Punkt a Perpendikel auf die drey Seiten fällt, ſo ſind dieſe zuſammen der Höhe des ganzen Dreyecks gleich, d. i. ab $+$ ac $+$ ad $=$ AD.



Bew. Man ziehe aA, aB, aC, wodurch das ganze Dreyeck in die Dreyecke ABa, BCa und ACa getheilt wird. Nun iſt Dr. ABa $= \frac{1}{2}$ AB . ab; Dr. BCa $= \frac{1}{2}$ BC . ac; und Dr. ACa $= \frac{1}{2}$ AC . ad (121. Zuſ.) und da AB $=$ BC $=$ AC iſt, ſo ſind alle drey zuſammen $= \frac{1}{2}$ BC . (ab + ac + ad). Es iſt aber auch Dr. ABC $= \frac{1}{2}$ BC . AD; folglich iſt AD $=$ ab + ac + ad.

131. Lehrſ. Wenn man in einem Dreyeck ABC durch irgend einen Punkt a innerhalb deſſelben, die Linien Ab, Bc und Cd zieht, ſo hat ab zu Ab, ac zu Bc, ad zu Cd ein ſolches Verhältniß, daß $\frac{ab}{Ab} + \frac{ac}{Bc} + \frac{ad}{Cd} = 1$ iſt.

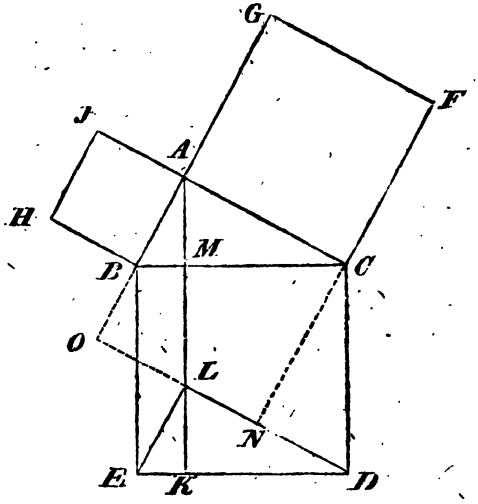


Bew. Es iſt Dr. BCa : ABC $=$ ab : Ab; ingleichen Dr. ACa : ABC $=$ ac : Bc; und Dr. ABa : ABC $=$ ad : Cd (wie aus 88. und 117. Zuſ. leicht gefolgert

wird, wenn man aus A, B und C Perpendikel auf die gegenüberſtehenden Seiten fällt, und durch a Parallelen mit den Seiten zieht). Folglich iſt $\frac{BCa}{ABC} = \frac{ab}{Ab}$; $\frac{ACa}{ABC} = \frac{ae}{Bc}$; $\frac{ABa}{ABC} = \frac{ad}{Cd}$, und da $\frac{BCa}{ABC} + \frac{ACa}{ABC} + \frac{ABa}{ABC} = \frac{ABC}{ABC} = 1$ iſt, ſo iſt auch $\frac{ab}{Ab} + \frac{ac}{Bc} + \frac{ad}{Cd} = 1$.

132. Lehrſ. Das Quadrat der Hypotenuſe eines rechtwinkligen Dreyecks iſt ſo groß, als die Quadrate der beyden Katheten zuſammengenommen.

Bew. Es ſey ABC das rechtwinklige Dreyeck, BCDE das Quadrat der Hypotenuſe, ACFG und ABHJ die Quadrate der beyden Katheten. Man ziehe AK || BE, mache AL = BE, und ziehe EL und LD.



Da BE ♯ AL, und AL ♯ CD, ſo iſt ſowohl ABEL, als ACDL *ein Parallelogramm* (83.).

Man fälle ferner aus C das Perpendikel CN auf LD, so ist das Dr. CND = ABC (49.); folglich CN = AC = CF.

Es ist daher das Quadrat ACFG = ACDL, da beyde einerley Grundlinie, AC, und gleiche Höhe, CF und CN, haben. Das Parallelogramm ACDL aber ist = CDKM (108.); folglich ist CDKM = ACFG.

Man fälle endlich aus L das Perpendikel LO auf die verlängerte Seite AB, so ist das Dr. AOL = ABC (49.); folglich LO = AB = AJ.

Es ist daher das Quadrat ABHJ = ABEL, da beyde einerley Grundlinie, AB, und gleiche Höhe, AJ und LO, haben. Das Parallelogramm ABEL aber ist = BEKM (108.); folglich ist BEKM = ABHJ.

Aus CDKM = ACFG
und BEKM = ABHJ
folgt CDKM + BEKM = ACFG + ABHJ
d. i. BCDE = ACFG + ABHJ.

Anmerk. Von diesem, nach seinem Erfinder, dem Pythagoras, benannten Lehrsatze hat man eine Menge von Beweisen. Den Euklidischen, der gewöhnlich in Lehrbüchern angetroffen wird, findet man auch in meiner Anweis. zur Rechenk. ꝛc. Geom. 73. — Vergl. auch oben 98, 3. Zus.

1. Zus. Ist das rechtwinklige Dreyeck gleichschenklig, so wird das Quadrat der Hypotenuse noch einmal so groß als das Quadrat eines Katheten. Die Diagonale eines Quadrats aber macht mit zweyen Seiten desselben ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreyeck; daher gibt die Diagonale eines Quadrates die Seite zu einem noch einmal so großen Quadrat.

2. Zus. Die Seite eines Quadrats, das dreymal so groß als ein gegebenes ist, wird gefunden, wenn man die Seite des doppelten und des einfachen rechtwinklig an einander setzt und die Hypotenuse zieht.

Die Seite des vierfachen Quadrats iſt noch ein-
l ſo groß als die Seite des einfachen.

Die Seite des fünffachen wird aus der recht-
nkligen Zuſammenſetzung der Seiten des doppelten
d des dreyfachen Quadrats gefunden u. ſ. w.

3. Zuſ. Die Seite eines Quadrats, das ſo groß
als mehrere andere zuſammengenommen, wird gefun-
n, wenn man die Seite des erſten und des zweyten
uadrats rechtwinklig zuſammenſetzt, und die Hypote-
ſe zieht; an dieſe die Seite des dritten Quadrats recht-
nklig ſetzt, und wieder die Hypotenuſe zieht; an dieſe
Seite des vierten Quadrats rechtwinklig ſetzt u. ſ. w.

4. Zuſ. Aus $BC^2 = AC^2 + AB^2$ folgt $AC^2 = BC^2 - AB^2$; alſo $AC = \sqrt{(BC^2 - AB^2)}$. Hieraus
gibt ſich, wie man den einen Katheten aus der Hypo-
nuſe und dem andern Katheten beſtimmen, oder, wie
an die Seite eines Quadrats finden könne, welches
r Differenz zweyer gegebenen Quadrate
leich iſt.

Anmerk. Die Seite eines Quadrats zu finden, wel-
s einem Theile eines gegebenen Quadrats, der durch ir-
nd einen Bruch ausgedrückt wird, gleich ſey, wird weiter
ten gelehrt (155, 3. Zuſ.).

5. Zuſ. Wenn die Seite des einfachen Quadrats
= 1 geſetzt wird, ſo iſt die des doppelten $= \sqrt{2}$; die
s dreyfachen $= \sqrt{3}$ u. ſ. w. So ſtellt alſo die Geo-
etrie irrationale Verhältniſſe vollkommen ge-
au dar.

6. Zuſ. Die Seite eines Quadrats verhält ſich
r Diagonale deſſelben $= 1 : \sqrt{2}$.

7. Zuſ. Die Diagonale eines Quadrats iſt die
ittlere Proportionallinie zwiſchen der einfachen und dop-
lten Seite deſſelben; ingleichen zwiſchen den beyden

Katheten desjenigen rechtwinkligen Dreyecks, welches dem Quadrat an Inhalt gleich ist.

8. Zus. Die Seiten der meisten rechtwinkligen Dreyecke stehen in einem irrationalen Verhältniß unter einander.

133. Erklärung. Rechtwinklige Dreyecke, deren Seiten in einem rationalen Verhältnisse unter einander stehen, heißen pythagoräische Dreyecke.

134. Aufg. Ein pythagoräisches Dreyeck zu verfertigen.

Auflös. Die Auflösung dieser Aufgabe läuft darauf hinaus: ein Paar Zahlen zu finden, deren Quadrate zusammenaddirt wiederum ein Quadrat geben, das eine rationale Wurzel hat. Denn ob ein Paar Linien in einem rationalen oder irrationalen Verhältnisse stehen, läßt sich nur aus der Beschaffenheit der Zahlen, durch die ihr Verhältniß ausgedrückt wird, erkennen.

Man nehme also irgend ein Paar ganze Zahlen a und b, wo $a > b$ ist, und leite daraus zwey andre her, nehmlich: 1) $a^2 - b^2$; 2) $2ab$, so haben diese die verlangte Eigenschaft.

Zwey Linien also, die sich wie diese Zahlen verhalten, rechtwinklig zusammengesetzt, geben, nebst der Hypotenuse, ein pythagoräisches Dreyeck.

Bew. Es ist

$$(a^2 - b^2)^2 = a^4 - 2a^2b^2 + b^4$$
$$(2ab)^2 = \quad 4a^2b^2$$

folglich $(a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2 = a^4 + 2a^2b^2 + b^4$

und hiervon ist die Quadratwurzel $= a^2 + b^2$, also eine rationale Zahl, welcher die Hypotenuse gleich zu setzen ist.

Anmerk. Nimmt man für a und b die zwey kleinsten ganzen Zahlen, 2 und 1, so wird $a^2 - b^2 = 3$, $2ab = 4$, und $a^2 + b^2 = 5$. Daß aber drey Seiten, die sich wie 3,

nd 5 verhalten, ein rechtwinkliges Dreyeck machen, soll
n Pythagoras entdeckt haben.

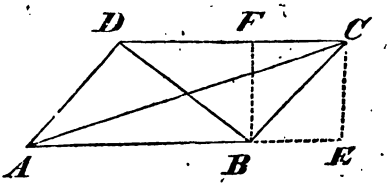
Der Unterschied zwischen dem einen Katheten und der
potenuse kann 1, 2, 3, u. s. w. jede ganze Zahl seyn,
) für jeden Unterschied kann man eine unendliche Reihe
schiedener pythagor. Dreyecke erhalten; so sind also un-
lich viele Reihen unendlich vieler pythagor. Dreyecke mög-
. Für jeden bestimmten Unterschied läßt sich eine allge-
ine Formel für jede Seite geben, die man leicht aus fol-
den ganz allgemeinen Ausdrücken erhält: man setze nehm-
den einen Katheten = a, und den Unterschied zwischen
n andern und der Hypotenuse = d,

so ist der andre $= \frac{a^2 - d^2}{2d}$

und die Hypotenuse $= \frac{a^2 + d^2}{2d}$.

135. Lehrs. In einem jeden Parallelo-
amm ist die Summe der Quadrate der bey-
n Diagonalen der Summe der Quadrate
r vier Seiten gleich.

Bew. Bey einem Quadrat und bey einem Rechteck
ellet der Satz unmittelbar aus dem pythagoräischen
ɔrsatze (132.).



Bey einem schiefwinkligen Parallelogramm, wie
BCD, verlängere man AB nach E hin, und ziehe so-
ohl CE senkrecht auf AE, als BF senkrecht auf CD —
odurch CE = BF, und CF = BE wird (77. 1. Zus.).
dann ist

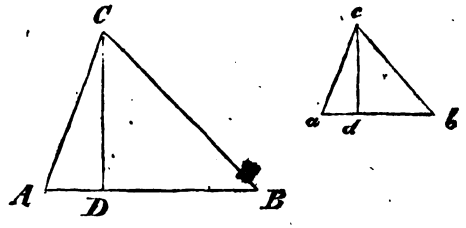
$$AC^2 = AE^2 + CE^2 = (AB + BE)^2 + CE^2$$
$$= AB^2 + 2AB \cdot BE + BE^2 + CE^2 = AB^2 + 2AB \cdot BE + BC^2$$

und $BD^2 = DF^2 + BF^2 = (CD - CF)^2 + BF^2$
$$= CD^2 - 2CD \cdot CF + CF^2 + BF^2 = CD^2 - 2CD \cdot CF + BC^2$$

folgl. $AC^2 + BD^2 = AB^2 + CD^2 + 2BC^2 = AB^2 + CD^2 + AD^2 + BC^2$

Denn die Produkte 2 AB . BE und 2 CD . C
gleich, und heben sich, bey entgegengesetzten Zeiche
und AD ist = BC, folglich auch $AD^2 = BC^2$,

136. Lehrs. Aehnliche Dreyecke v
ten sich zu einander wie die Quadrate
gleichnamigen Seiten (91.).



Bew. Es ſey das Dr. ABC ∼ abc, man fälle ie Perpendikel CD und cd, ſo iſt AB : ab = CD : cd 92, Zuſ.). Nun iſt Dr. ABC : abc = AB . CD : ab cd (118, 1. Zuſ.); und vertauſcht man in dem letztern Verhältniß die Factoren CD und cd mit AB und ab, ie daſſelbe Verhältniß haben (Ar. 355.), ſo erhält man

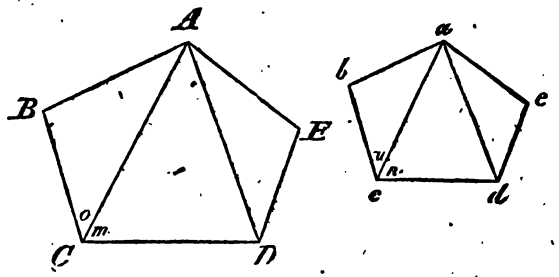
$$\text{Dr. ABC} : \text{abc} = \text{AB}^2 : \text{ab}^2.$$

Es verhalten ſich aber AB : ab wie jede andere zwey gleichamige Seiten beyder Dreyecke, folglich auch $AB^2 : ab^2$ ie die Quadrate zweyer andern gleichnamigen Seiten; olglich verhalten ſich überhaupt beyde Dreyecke wie die Quadrate gleichnamiger Seiten in ihnen.

1. Zuſ. Setzt man in die Proportion ABC : abc = AB . CD : ab . cd anſtatt der Factoren AB, ab die Factoren CD, cd, welche daſſelbe Verhältniß haben (92, Zuſ.), ſo erhält man ABC : abc = $CD^2 : cd^2$, d. h. ie ähnlichen Dreyecke verhalten ſich wie die Quadrate ihrer Höhen.

2. Zuſ. Gleichnamige Seiten, ingleichen die Höhen ähnlicher Dreyecke verhalten ſich wie die Quadratwurzeln der Zahlen, welche das Verhältniß ihres Inhalts ausdrücken.

137. Lehrſ. Aehnliche Vielecke verhalten ich wie die Quadrate gleichnamiger Seiten n ihnen.



Bew. Es sey ABCDE ∼ abcde; man zerfälle beyde auf eine ähnliche Art in Dreyecke, so ist Dr. ABC ∼ abc (95.), folglich ist auch o = u. Da nun C = c ist, so ist auch C — o = c — u, d. i. m = n.

Ferner ist BC : AC = bc : ac

und BC : CD = bc : cd

also AC : CD = ac : cd

folglich ist Dr. ACD ∼ acd (95.).

Diese Art zu schließen kann man auf jedes Paar der folgenden Dreyecke in beyden Figuren anwenden, und zeigen, daß sie einander ähnlich sind.

Es ist aber

Dr. ABC : abc = AC^2 : ac^2 (136.)

und Dr. ACD : acd = AC^2 : ac^2

Folglich Dr. ABC : abc = ACD : acd.

Eben so läßt sich erweisen, daß ACD : acd = ADE : ade ist. Folglich haben die ähnlichen Dreyecke einerley Verhältniß gegen einander.

Nun ist

Dr. ABC : abc = AB^2 : ab^2 (136.)

also auch Dr. ACD : acd = AB^2 : ab^2

und Dr. ADE : ade = AB^2 : ab^2

folglich ABC + ACD + ADE : abc + acd + ade = $3AB^2$: $3ab^2$ (Ar. 344.)

d. i. ABCDE : abcde = $3AB^2$: $3ab^2$

= AB^2 : ab^2.

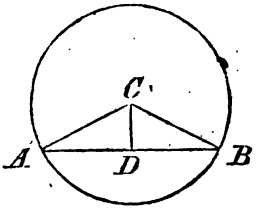
ıb da AB : ab wie jede zwey andere gleichnamige Sei- ı ſich verhalten, folglich auch $AB^2 : ab^2$ wie die Qua- ıte zweyer andern gleichnamigen Seiten, ſo verhalten). überhaupt die beyden Vielecke wie die Quadrate ıichnamiger Seiten in ihnen.

Zuſ. Gleichnamige Seiten ähnlicher Vielecke ver- lten ſich wie die Quadratwurzeln aus den Zah- ı, welche das Verhältniß der Vielecke ſelbſt ausdrücken.

Fünfter Abſchnitt.

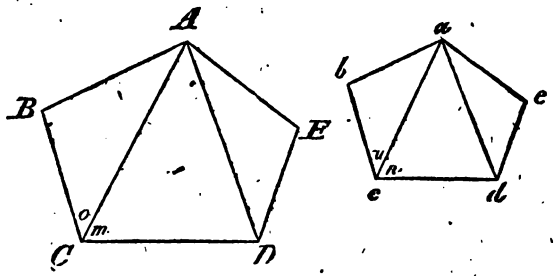
Vom Kreiſe.

138. Lehrſ. Wenn man aus dem Mittel- ınkt eines Kreiſes ein Perpendikel auf eine ehne deſſelben fällt, ſo wird dieſe dadurch ılbirt.



Bew. Es ſey C der Mittelpunkt eines Kreiſes, ıb CD ſenkrecht auf AB. Man ziehe CA und CB, ſo ABC ein gleichſchenkliges Dreyeck, und daher AB ırch CD halbirt (69, 1. Zuſ.).

1. Zuſ. Eine gerade Linie aus dem Mittelpunkt s Kreiſes auf die Mitte der Sehne gezogen, ſteht nkrecht auf ihr (69, 2. Zuſ.).



Bew. Es sey ABCDE ∼ abcde; man zerfälle beyde auf eine ähnliche Art in Dreyecke, so ist Dr. ABC ∼ abc (95.), folglich ist auch o = u. Da nun C = c ist, so ist auch C — o = c — u, d. i. m = n.

Ferner ist BC : AC = bc : ac

und BC : CD = bc : cd

also AC : CD = ac : cd

folglich ist Dr. ACD ∼ acd (95.).

Diese Art zu schließen kann man auf jedes Paar der folgenden Dreyecke in beyden Figuren anwenden, und zeigen, daß sie einander ähnlich sind.

Es ist aber

Dr. ABC : abc = AC^2 : ac^2 (136.)

und Dr. ACD : acd = AC^2 : ac^2

Folglich Dr. ABC : abc = ACD : acd.

Eben so läßt sich erweisen, daß ACD : acd = ADE : ade ist. Folglich haben die ähnlichen Dreyecke einerley Verhältniß gegen einander.

Nun ist

Dr. ABC : abc = AB^2 : ab^2 (136.)

also auch Dr. ACD : acd = AB^2 : ab^2

und Dr. ADE : ade = AB^2 : ab^2

folglich ABC + ACD + ADE : abc + acd + ade = $3AB^2$: $3ab^2$ (Ar. 344.)

d. i. ABCDE : abcde = $3AB^2$: $3ab^2$

= AB^2 : ab^2.

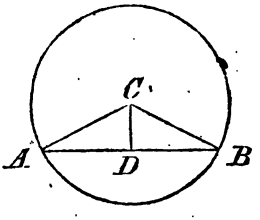
Und da AB : ab wie jede zwey andere gleichnamige Seiten ſich verhalten, folglich auch $AB^2 : ab^2$ wie die Quadrate zweyer andern gleichnamigen Seiten, ſo verhalten ſich überhaupt die beyden Vielecke wie die Quadrate gleichnamiger Seiten in ihnen.

Zuſ. Gleichnamige Seiten ähnlicher Vielecke verhalten ſich wie die Quadratwurzeln aus den Zahlen, welche das Verhältniß der Vielecke ſelbſt ausdrücken.

Fünfter Abſchnitt.

Vom Kreiſe.

138. Lehrſ. Wenn man aus dem Mittelpunkt eines Kreiſes ein Perpendikel auf eine Sehne deſſelben fällt, ſo wird dieſe dadurch halbirt.



Bew. Es ſey C der Mittelpunkt eines Kreiſes, und CD ſenkrecht auf AB. Man ziehe CA und CB, ſo iſt ABC ein gleichſchenkliges Dreyeck, und daher AB durch CD halbirt (69, 1. Zuſ.).

1. Zuſ. Eine gerade Linie aus dem Mittelpunkt des Kreiſes auf die Mitte der Sehne gezogen, ſteht ſenkrecht *auf ihr* (69, 2. Zuſ.).

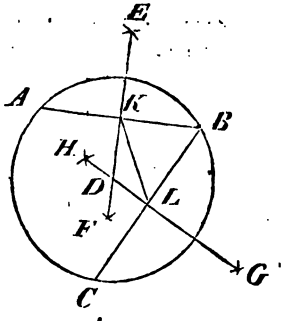
2. Zus. Ein Perpendikel, durch die Mitte einer Sehne gezogen, geht durch den Mittelpunkt des Kreises.

3. Zus. Zwey Perpendikel, durch die Mitte zweyer Sehnen gezogen, treffen, wenn sie einander schneiden, im Mittelpunkte des Kreises zusammen.

4. Zus. Der Mittelpunkt eines Kreises kann daher durch zwey solche Perpendikel gefunden werden.

5. Zus. Zwey Sehnen, wofern nicht beyde durch den Mittelpunkt gehen, können einander nicht gegenseitig halbiren; weil sonst eine gerade Linie aus dem Mittelpunkte des Kreises nach dem Durchschnittspunkte der Sehnen gezogen, auf beyden zugleich senkrecht stehen müßte, welches unmöglich ist.

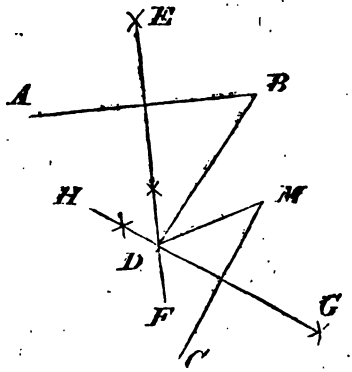
139. Aufg. Durch drey Punkte, A, B, C, die nicht in einer geraden Linie liegen, einen Kreis zu ziehen.



Auflös. Man ziehe AB und BC und durch die Mitte einer jeden dieser Linien ein Perpendikel EF, GH, der Punkt D, in welchem diese einander schneiden, ist der Mittelpunkt des Kreises.

Bew. AB und BC können als Sehnen des Kreises betrachtet werden; schneiden also die Perpendikel GH und EF einander, so ist ihr Durchschnittspunkt der Mittelpunkt des Kreises (138, 3. Zus.).

Die Perpendikel aber müſſen einander auf der Seite
n D ſchneiden; denn man ziehe KL, ſo iſt EKL +
LK > 2 R., folglich, divergiren EF und GH auf die
Seite, und convergiren mithin auf der andern (51,
Zuſ.).



Zuſ. Zieht man durch die Mitte einer geraden Li-
e, AB, ein Perpendikel EF, ſo kann jeder Punkt des
erpendikels der Mittelpunkt eines Kreiſes werden, in
elchem AB eine Sehne ausmacht. Daſſelbe gilt von
len Punkten des Perpendikels GH in Bezug auf die Li-
e MC. Schneiden beyde Perpendikel einander in D,
iſt D ſowohl der Mittelpunkt eines Kreiſes, der durch
e Punkte A, B, als eines Kreiſes, der durch die Punkte
, C geht; aber dieſe Kreiſe ſind verſchieden,
enn DB und DM ungleich ſind. Daher kann
an nicht durch jede vier Punkte einen Kreis ziehen.
allen aber B und M in einen Punkt zuſammen, ſo
ird DB = DM, und man hat die obige Aufgabe.

Anmerk. Dieſe Aufgabe macht eigentlich einen beſon-
rn Fall einer andern, viel allgemeinern und ſchwerern
ufgabe, des berühmten Apollonianiſchen Problems
is, das ſeinen Namen von Apollonius aus Perga
(*Einleit. 13.*) hat, der es in einer beſondern Schrift, περὶ

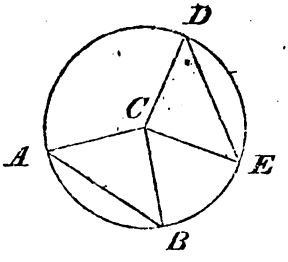
ἐπαφῶν (de tactionibus), behandelt hat. Diese Schrift ist leider verloren gegangen. Indessen hat uns Pappus von Alexandrien eine nähere Anzeige davon aufbewahrt, und zugleich Lemmata dazu aufgesetzt, die sich erhalten haben. Diese hat Camerer zuerst griechisch, zugleich mit einer latein. Uebersetzung, Erläuterungen und Zusätzen — nebst einer Geschichte des Problems selbst, und der Wiederherstellung der Apollonianischen Schrift von Vieta — unter dem Titel: Apollonii de tactionibus quae supersunt etc. Gothae et Amstel. 1795. 8. herausgegeben. Seitdem haben wir eine ausführlichere geschickte Bearbeitung des Problems von C. G. Haumann (Versuch einer Wiederherstellung der Bücher des Apollonius von Perga von den Berührungen. Bresl. 1817. 8.) — und eine noch allgemeinere, obwohl nicht im Geist des Apollonius abgefaßte, von W. Ch. Christmann (Apollonius Suevus, sive tactionum problema nunc demum restitutum. Tubing. 1821. 8.) erhalten. Eine vollständige Aufzählung der zahlreichen Fälle, welche das Problem in sich faßt, gibt G. U. A. Vieth in in einer besondern Schrift: Leitfaden zur vollständigen Bearbeitung des wiederhergestellten Apollonius, von Franzisc. Vieta. Dessau 1820. 4. — Das Apollon. Problem läßt sich auf folgende Art ausdrücken:

Wenn von Punkten, geraden Linien, oder Kreisen je drey Stücke in einer Ebene gegeben sind, einen Kreis zu ziehen, der durch die Punkte, wenn welche gegeben sind, hindurch gehe, und die gegebenen Linien oder Kreise berühre.

140. Lehrs. Gleiche Sehnen eines Kreises haben gleiche Bogen.

Bew. Es sey AB = DE, und C der Mittelpunkt; man ziehe CA, CB, CD und CE, so ist Dr. ABC = DCE. Man denke sich nun den Ausschnitt DCE auf den Ausschnitt ACB gelegt, so daß die Dreyecke ACB und DCE einander decken, so muß auch jeder Punkt des Bogens DE mit einem Punkt des Bogens AB zusammenfallen, und umgekehrt. Denn geschähe das nicht, so

müßte ein ſolcher Punkt entweder näher bey C liegen oder weiter davon abſtehen, als die Größe des Halbmeſſers beträgt; welches nicht ſeyn kann. Folglich decken die Ausſchnitte einander, und alſo iſt der Bogen DE = dem Bogen AB.



1. Zuſ. Gleiche Bogen eines Kreiſes haben gleiche Sehnen.

2. Zuſ. Gleichen Sehnen und Bogen eines Kreiſes liegen gleiche Winkel am Mittelpunkt gegenüber; und umgekehrt gehören in einem Kreiſe zu gleichen Winkeln am Mittelpunkt gleiche Sehnen und gleiche Bogen.

Anmerk. Hierauf gründet ſich das oben beſchriebene Verfahren, einen Winkel überzutragen (73, Anmerk.).

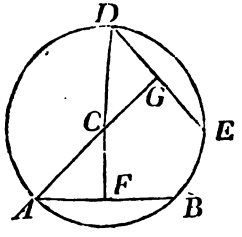
3. Zuſ. Der größern Sehne eines Kreiſes gehört ein größrer Bogen und ein größrer Winkel am Mittelpunkte zu, und umgekehrt.

Anmerk. Hierbey iſt jedoch zu erinnern, daß eigentlich zu jeder Sehne 2 Bogen gehören, die zuſammen den ganzen Kreis ausmachen, hier aber jedesmal nur von dem kleinern dieſer beyden Bogen die Rede iſt, d. i. von demjenigen, deſſen Größe den Halbkreis nicht übertrifft; ſo wie unter dem Winkel, der z. B. der Sehne AB zugehört, der ſpitze Winkel ACB, nicht der überſtumpfe, deſſen Maaß der Bogen ADEB iſt, verſtanden wird.

4. Zuſ. Unter allen Sehnen im Kreiſe iſt der Durchmeſſer die größte, weil er dem größten Bogen im Halbkreiſe, dem Halbkreiſe ſelbſt, zugehört.

5. Zus. Was hier von Sehnen, Bogen und Winkeln desselben Kreises gesagt ist, gilt auch von Sehnen, Bogen und Winkeln verschiedener, aber gleicher Kreise.

141. Lehrs. Gleiche Sehnen eines Kreises haben gleichen Abstand vom Mittelpunkt.



Bew. Es sey die Sehne AB = DE; man fälle die Perpendikel CF und CG, und ziehe CA und CD; alsdann ist AF = DG (138.) und Dr. ACF = DCG (64, 1. Zus.), folglich CF = CG.

1. Zus. Sehnen eines Kreises, die gleichen Abstand vom Mittelpunkt haben, sind einander gleich.

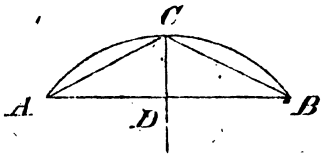
2. Zus. Je größer die Sehne eines Kreises, desto kleiner ist ihr Abstand vom Mittelpunkt, und je kleiner jene, desto größer dieser. Denn da $AF^2 = AC^2 - CF^2$ ist (132, 4. Zus.), so wird AF^2, und folglich auch AF, desto größer oder kleiner, je kleiner oder größer CF^2, und daher auch CF, ist.

3. Zus. Umgekehrt, je kleiner der Abstand der Sehne eines Kreises vom Mittelpunkt ist, desto größer ist die Sehne, und je größer jener, desto kleiner diese.

4. Zus. Auch hieraus folgt, daß die Sehne durch den Mittelpunkt, d. i. der Durchmesser, am größten ist, weil sein Abstand vom Mittelpunkt = Null ist.

Anmerk. Die Größe der Sehnen nimmt nicht in demselben Verhältniß zu oder ab, als ihr Abstand vom Mittelpunkt ab- oder zunimmt.

142. Aufg. Einen Bogen zu halbiren.

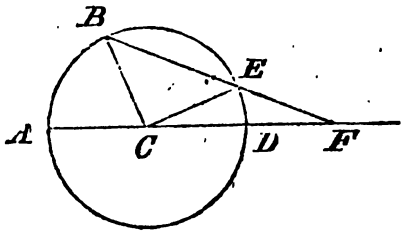


Auflös. Es sey ACB der zu theilende Bogen; man ziehe die Sehne AB, und durch die Mitte derselben das Perpendikel CD, so halbirt dieses auch den Bogen.

Bew. Man ziehe AC und BC, so ist Dr. ADC = BDC (55.); folglich AC = BC; also auch der Bogen AC = dem Bogen BC (140.).

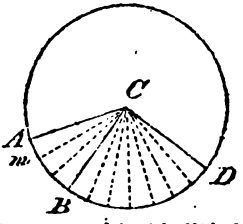
Zus. Durch fortgesetztes Halbiren eines jeden Theils wird der ganze Bogen in 4, 8, 16 u. s. w. gleiche Theile eingetheilt.

Anmerk. Die Theilung eines Bogens in drey gleiche Theile hat dieselbe Schwierigkeit, als die Theilung eines Winkels in so viel gleiche Theile. Wollte man die Sehne in drey gleiche Theile theilen, so läßt sich leicht zeigen, daß man weder durch Perpendikel, noch durch Halbmesser, die man durch die Theilungspunkte zöge, den Bogen in drey gleiche Theile theilen würde. Im erstern Fall würde der mittlere Bogen zu klein, und im letztern zu groß werden. — Ein artiges Verfahren, die Aufgabe vermittelst des Kreises und der geraden Linie, unter einer gewissen Voraussetzung zu lösen, findet sich schon im Archimedes (S. dessen lemmata. Propos. VIII.). Es sey nehmlich AB der Bogen, oder ACB der Winkel, welcher getheilt werden soll, so verlängere man AC nach F hin, und ziehe BF, so daß EF = CD werde: alsdann ist ED = ½ AB oder ECD = ½ ACB. Dieß ist, wie man leicht wahrnimmt, vollkommen richtig; aber die Schwierigkeit ist, den Punkt E oder F geometrisch zu bestimmen. Mechanisch oder durch Probiren läßt er sich leicht finden.



Uebrigens verdient noch bemerkt zu werden, daß gewisse Bogen, z. B. der Halbkreis oder ein Quadrant, sich ohne Schwierigkeit in drey gleiche Theile theilen lassen; aber nicht eben so ein jeder beliebiger Bogen.

143. Lehrs. In einem Kreise verhalten sich die Winkel am Mittelpunkte wie die ihnen gegenüberstehenden Bogen.



Bew. Man vergleiche die Winkel ACB und BCD, und ihre Bogen AB und BD gegen einander. Die letztern theile man zu diesem Ende mit irgend einem Maaße = Am; das so klein seyn kann als man will, in lauter gleiche Theile, z. B. AB in 3, BD in 7 solche Theile, so ist AB : BD = 3 : 7.

Alsdann ziehe man durch jeden Theilungspunkt der Bogen eine Linie nach C, so werden auch die Winkel ACB und BCD in lauter gleiche Winkel getheilt (140, 2. Zus.), und zwar ACB in 3, und BCD in 7. Folglich ist

ACB : BCD = 3 : 7. Es war aber auch

AB : BD = 3 : 7.

Daher ist ACB : BCD = AB : BD.

Anmerk. Die Zahlen 3 und 7 sind hier nur in Beziehung auf eine Figur gesetzt, in der eine bestimmte Einteilung statt finden muß. Man kann aber dafür allgemein und n setzen, ohne daß der Gang des Beweises sich im geringsten ändert, und sich darunter so große Zahlen denken, als man nur immer will. Da es auch nicht darauf ankommt, daß die Bogen wirklich in irgend eine beliebige Anzahl gleicher Theile getheilt werden, sondern daß sie mit irgend einem, gleich viel welchem, gemeinschaftlichen Maaße gemessen werden, so ist es kein Fehler gegen die Methode, daß die Theilung eines Bogens in irgend eine bestimmte Anzahl gleicher Theile nicht vorher gezeigt worden ist. Es ist hier genug, sich die Möglichkeit einer Theilung beyder Bogen in lauter gleiche Theile vorzustellen, wobey es ganz gleichgültig ist, wie groß die Menge der Theile sey, die dabey herauskommt. Man geht hier also von der Annahme eines Maaßes aus, dessen Größe man so lange abändern kann — ohne auf ihre absolute Beschaffenheit nichts ankommt — bis es für beyde Bogen passend wird. Selbst in dem Fall also, daß das Verhältniß der Bogen irrational ist, kann man, wie in 88. und 116., durch Annahme eines unendlich kleinen Maaßes machen, daß der Ueberrest des Bogens für so gut als nichts zu achten ist.

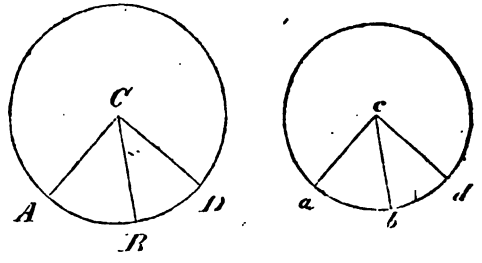
1. Zus. Wird die Peripherie eines Kreises in irgend eine Anzahl gleicher Theile getheilt, so kann sie zu einer bequemen Bestimmung der Größe der Winkel gebraucht werden.

2. Zus. Da die Winkel um den Mittelpunkt eines Kreises zusammen 4 R. ausmachen, und sie die ganze Peripherie zwischen ihre Schenkel fassen, so ist der Bogen, welcher 1 R. zugehört, dem vierten Theil der Peripherie gleich, und der Halbkreis umfaßt die Summe von 2 R.

144. Erklär. Aehnliche Bogen heißen Bogen verschiedener Kreise, die zu ihren Peripherieen einerley Verhältniß haben, oder einen gleich großen Theil ihrer Peripherieen ausmachen.

145. Lehrs. Gleiche Winkel am Mittel-

punkte verschiedener ungleicher Kreise fassen ähnliche Bogen zwischen ihre Schenkel.



Bew. Es sey der Winkel ACB = acb; man errichte aus C ein Perpendikel CD auf AC, ingleichen aus c ein Perpendikel cd auf ac, so ist

$$\left.\begin{array}{rl} \text{ACB} : \text{ACD} &= \text{AB} : \text{AD} \\ \text{und acb} : \text{acd} &= \text{ab} : \text{ad} \end{array}\right\} \quad (143.)$$

folglich AB : AD = ab : ad (Ar. 345.).

Nun ist AD = dem vierten Theil der Peripherie (143, 2. Zus.), die durch P bezeichnet werde; und ad = dem vierten Theil der Peripherie des andern Kreises, die = p gesetzt werde. Folglich ist

$$\text{AB} : \tfrac{1}{4}\text{P} = \text{ab} : \tfrac{1}{4}\text{p}$$

Also auch AB : P = ab : p.

Zus. Wenn die Peripherieen ungleicher Kreise in eine gleiche Anzahl unter sich gleicher Theile getheilt werden, so schneiden gleiche Winkel, in den Mittelpunkt dieser Kreise gebracht, gleiche Mengen von Theilen der Peripherie ab.

Anmerk. Wirklich bedient man sich daher der Kreise zur Bestimmung der Größe der Winkel. Zu diesem Ende theilt man die Peripherie eines jeden Kreises in 360 gleiche Theile ein, die man Grade nennt, und bestimmt die Größe eines Winkels nach der Menge von Graden, die er zwischen seine Schenkel faßt, wenn seine Spitze im Mittelpunkt des Kreises liegt. Auf die Größe des Kreises kommt dabey nichts

; denn von dieser hängt zwar die Größe der Grade ab, r nicht die Menge derselben, die irgend einem Winkel ommt. Winkel von verschiedener Größe schneiden auch schiedene Mengen von Graden ab, und die Anzahl der ade bestimmt unmittelbar das Verhältniß der Winkel ge- einander selbst (143.).

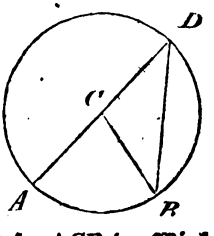
Die Eintheilung in 360 Grade ist sehr alt, und grün- sich vermuthlich auf eine alte Eintheilung der Sonnen- n in so viel gleiche Theile, die wiederum darin ihren und hatte, daß es schien, als ob die Sonne jeden Tag einen solchen Theil in ihrer Bahn fortrückte.

Zur genauern Messung der Winkel wird der Grad noch 60 Minuten, und die Minute in 60 Sekunden getheilt, man bezeichnet diese Größen, wie Ruthen, Fuße und lle durch ° ′ ″. Z. B. 12° 28′ 36″ heißt 12 Grad 28 Min. Sek.

Nach dieser Eintheilung kommen auf den Quadranten, das Maaß des rechten Winkels, 90°.

Neuerlich hatte man in Frankreich, zur Bequemlichkeit astronomischen Rechnungen, den Quadranten in 100 Gra- den Grad in 100 Minuten, und die Minute in 100 Sek. getheilt, aber mit der Umänderung des politischen Sy- ns ist man auch hierin wieder auf das Alte zurückge- igen.

146. Lehrs. **Der Winkel am Mittelpunkt noch einmal so groß als der Winkel an der Peripherie, der mit ihm auf demselben Bo- n steht.**



Bew. I. Es sey ACB der Winkel am Mittelpunkt, DB der Winkel an der Peripherie, und C falle in den ten Schenkel des letztern; so ist ACB als ein äußerer

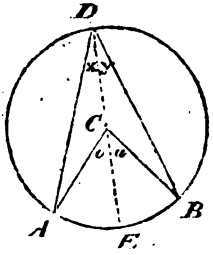
Winkel des gleichschenkligen Dreyecks BDC anzusehen, und daher

$$ACB = BDC + DBC \text{ (53, 1. Zus.)}$$

Ferner ist $BDC = DBC$ (55, 2. Zus.)

Folglich $ACB = BDC + BDC$

$= 2\,BDC$ oder $= 2\,ADB$.

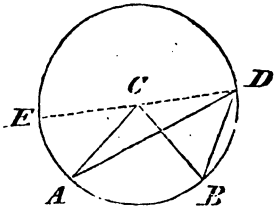


II. Es falle C zwischen die Schenkel des Peripheriewinkels; man ziehe durch D und C die Linie DE, so ist

$$o = 2x$$
$$u = 2y \quad \text{(Nr. I.)}$$

folglich $o + u = 2x + 2y = 2(x + y)$.

d. i. $ACB = 2\,ADB$.



III. Es falle C außerhalb der Schenkel des Peripheriewinkels; man ziehe durch D und C die Linie DE, so ist

$$ECB = 2\,EDB$$

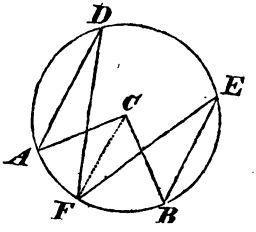
d. i. $ECA + ACB = 2(EDA + ADB)$

$= 2\,EDA + 2\,ADB$

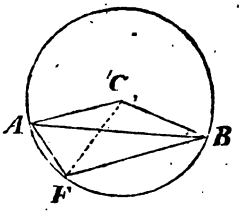
Ferner ist $ECA = 2\,EDA$. Dieses subtrahirt gibt $ACB = 2\,ADB$.

1. Zus. Wenn anstatt eines Peripheriewinkels deren zwey oder mehrere sind, welche zusammen auf demselben Bogen stehen, auf welchem der Centriwinkel steht, so ist dieser noch einmal so groß, als jene zusammengenommen.

a) Es ist z. B. ACB = 2 (D + E). Denn man ziehe CF, so ist ACF = 2 D; und BCF = 2 E; folglich ACF + BCF d. i. ACB = 2 D + 2 E = 2 (D + E).



b) Eben so ist ACB = 2 (ABF + BAF). Denn man ziehe wiederum CF, so ist ACF = 2 ABF; und BCF = 2 BAF; folglich ACF + BCF d. i. ACB = 2 ABF + 2 BAF = 2 (ABF + BAF).



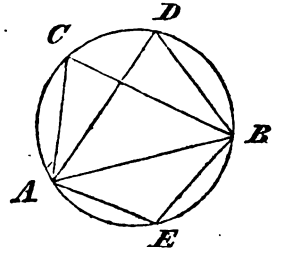
2. Zus. Die Hälfte des Bogens, auf welchem ein Peripheriewinkel steht, ist sein Maaß oder bestimmt die Größe desselben.

3. Zus. Peripheriewinkel, die auf gleichen oder ähnlichen Bogen stehen, sind einander gleich. — Auch ist ein Peripheriewinkel so groß, als zwey oder mehrere

andere zuſammengenommen, wenn dieſe zuſammen auf einem eben ſo großen Bogen ſtehen, als jener.

4. Zuſ. Gleiche Peripheriewinkel eines Kreiſes ſchließen gleiche Bogen zwiſchen ihre Schenkel.

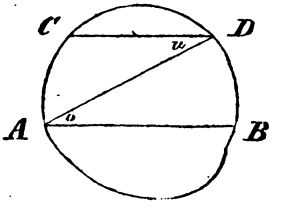
5. Zuſ. Alle Winkel in demſelben Abſchnitt (d. i. Peripheriewinkel, welche die Sehne des Abſchnitts zwiſchen ihre Schenkel faſſen, wie ACB und ADB) ſind einander gleich.



6. Zuſ. Zwey Winkel in entgegenſtehenden Abſchnitten, wie ACB und AEB (ſ. die vorherg. Fig.) ſind zuſammen = 2 R.; denn ſie ſtehen auf dem ganzen Umkreiſe, folglich iſt der Halbkreis ihr Maaß.

7. Zuſ. Sind die entgegenſtehenden Abſchnitte einander gleich, ſo ſind auch die Winkel in beyden einander gleich, folglich jeder = 1 R. Mit andern Worten: der Winkel im Halbkreiſe iſt = $\frac{1}{2}$ R.

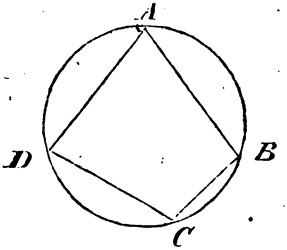
147. Lehrſ. Wenn zwey Sehnen eines Kreiſes, AB und CD, einander parallel laufen, ſo ſind die zwiſchen ihnen liegenden Bogen, AC und BD, einander gleich.



Bew. Man ziehe AD, so ist o = u (als Wechselsw.); folglich BD = AC (146, 4. Zus.).

Zus. Umgekehrt, sind die Bogen gleich, die zwischen zweyen Sehnen liegen, so sind die Sehnen parallel.

148. Lehrs. In einem Viereck, ABCD, dessen Spitzen in der Peripherie eines Kreises liegen, sind die gegenüberstehenden Winkel, sowohl A + C als B + D, = 2 R.

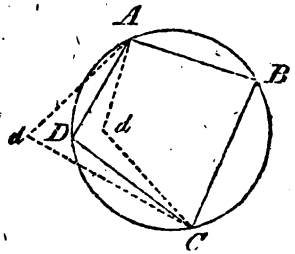


Bew. Man denke sich eine Diagonale BD gezogen, so sind A und C Winkel in entgegenstehenden Abschnitten; folglich A + C = 2 R. (146, 6. Zus.). Dasselbe gilt von B und D, wenn die Diagonale AC gezogen wird.

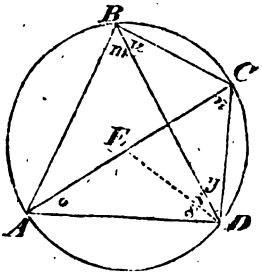
149. Lehrs. Umgekehrt, wenn die Summe der gegenüberstehenden Winkel in einem Viereck = 2 R. ist, so läßt sich ein Kreis um das Viereck beschreiben.

Bew. Es sey in dem Viereck ABCD, A + C = B + D = 2 R.; man beschreibe einen Kreis, der durch A, B, und C gehe (139.). Geht dieser nicht zugleich auch durch D, so gehe er durch einen andern Punkt, d, der inner- oder außerhalb des gegebenen Vierecks liegt. Man ziehe alsdann Ad und Cd, so muß B + d = 2 R. seyn (148). Da nun auch B + D = 2 R. ist *(per hypoth.)*, so wäre B + d = B + D; mithin

d = D, welches unmöglich ist (62.). Folglich muß der Kreis durch D gehen.



150. Lehrs. In einem Kreis-Viereck, ABCD, ist die Summe der Produkte der gegenüberstehenden Seiten dem Produkte der Diagonalen gleich d. i. AB . CD + AD . BC = AC . BD.



Bew. Man ziehe DE so, daß der Winkel x = y werde; alsdann ist Dr. ADE ∼ BDC — weil auch W. o = u ist (146, 5. Zus.) — und Dr. ABD ∼ CDE — weil W. x + r = y + r u. W. m = n ist — folglich ist

1) AD : AE = BD : BC
2) CD : CE = BD : AB

Aus Nr. 1. folgt AD . BC = AE . BD
— — 2. — AB . CD = CE . BD

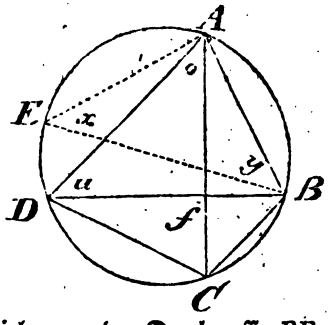
folgl. AD . BC + AB . CD = AE . BD + CE . BD
= (AE + CE) . BD = AC . BD.

Dieser Satz wird der Ptolemäische Lehrsatz genannt, weil ihn schon Ptolemäus in seinem Almagest zur Berechnung der Sehnen im Kreise gebraucht hat.

Zus. Sind AC und BD Durchmesser, so wird das Viereck ein Rechteck, und man erhält den pythagoräischen Lehrsatz.

151. Lehrs. Durchschneiden die Diagonalen eines Kreis-Vierecks einander rechtwinklig, so ist nicht nur die Summe der Quadrate der gegenüberstehenden Seiten einander gleich — d. i. $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$ — sondern auch jede dieser Summen dem Quadrate des Durchmessers gleich.

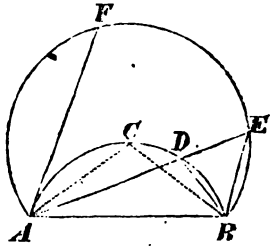
Bew. Es ist $AB^2 = Af^2 + Bf^2$; u. $CD^2 = Df^2 + Cf^2$; folglich $AB^2 + CD^2 = Af^2 + Bf^2 + Df^2 + Cf^2$. Der Summe dieser 4 Quadrate aber ist auch $AD^2 + BC^2$ gleich; u. daher $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$.



Ferner ziehe man den Durchmesser BE und die Sehne AE, so ist $BE^2 = AB^2 + AE^2$ (146, 7. Zus.). Es ist aber W. $o + u = x + y = 1$ R., u. $u = x$ (146, 3. Zus.); folgl. $o = y$ folgl. $CD = AE$ (146, 4. Zus. u. 140, 1. Zus.); also $BE^2 = AB^2 + CD^2$.

152. Lehrs. Wenn man aus der Mitte C des *Bogens ACDB* einen zweyten Bogen

AFEB über derselben Sehne AB beschreibt, und aus A oder B irgend eine gerade Linie, wie AE, nach dem äußern Bogen zieht, so ist der Theil DE dieser Linie, welcher zwischen beyde Bogen fällt, eben so groß, als die Linie DB, welche von dem Durchschnittspunkte D nach dem andern Endpunkte der Sehne geht.



Bew. Man ziehe EB, ingleichen AC und CB, so ist der W. ADB = ACB (146, 5. Zus.); ferner ACB = 2 AEB (146.); folglich ADB = 2 AEB. Es ist aber auch ADB = AEB + DBE (53, 1. Zus.), folglich AEB oder DEB = DBE; also auch DB = DE (60.).

1. Zus. Ist AF eine Tangente an den innern Bogen in A, und die Sehne AE rückt derselben näher, so fallen die Punkte D und A immer näher zusammen; kommt AE endlich in die Lage von AF selbst, so fällt D in A, woraus denn folgt, daß AF = AB ist.

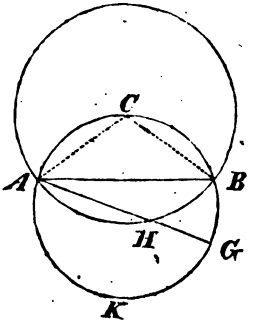
Die Erklärung einer Tangente s. unten 156.

2. Zus. Vollendet man die beyden Kreise, wie in nachstehender Figur, und zieht von A, nach der andern Seite von AB, die Sehne AG, welche den Bogen AHB in H schneidet, so ist auch hier die Sehne BG, des Kreises ACBG, der Linie HG, welche zwischen beyde Kreise fällt, gleich.

Denn man ziehe BH, ſo iſt
der Winkel ACB = 2 (BAH + ABH) (146. 1. Zuſ. b.).
= 2 BHG (53, 1. Zuſ.)

Es iſt aber auch
der Winkel ACB = ABG + BAG (146, 3. Zuſ.).
= ABH + HBG + BAG
= HBG + BHG

Folglich 2 BHG = HBG + BHG
alſo BHG = HBG
folglich BG = HG (60).

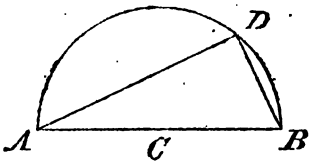


3. Zuſ. Rückt AG ſo weit von AB, daß H und A zuſammen fallen, ſo wird AG eine Tangente in A an den Kreis um C, und AG = BG. Folglich trifft die Tangente in die Mitte des Bogens AGB. (140.).

4. Zuſ. Bezeichnet man die Mitte des Bogens AGB durch K, ſo wird die gerade Linie CK ein Durchmeſſer des Kreiſes: und zieht man die Linie AK, ſo wird CAK ein Winkel im Halbkreiſe, folglich AK ſenkrecht auf CA, woraus gleichfalls folgt, daß AK eine *Tangente an A iſt.* (Vergl. unten §. 157.).

153. Aufg. Ueber einer gegebenen geraden Linie, als Hypotenuſe, ein rechtwinkliges Dreyeck zu beſchreiben.

Auflöſ. Es ſey AB die gegebene Linie; man beſchreibe aus der Mitte, C, derſelben, mit einer Eröffnung des Zirkels = AC, einen Halbkreis, und ziehe nach irgend einem Punkt, D, deſſelben die Linien AD und BD, ſo iſt ABD das verlangte Dreyeck.



Bew. Da der Winkel ADB ein Winkel im Halbkreiſe iſt, ſo iſt er = 1 R. (146, 7. Zuſ.)

Anmerk. Die Aufgabe gehört in die Klaſſe der unbeſtimmten, indem man in dem Halbkreiſe unzählig verſchiedene Punkte, wie D, annehmen kann, von denen jeder der Aufgabe Gnüge leiſtet. Allein außer dem Halbkreiſe über oder unter AB iſt es unmöglich, einen Punkt zu finden, von welchem ein Paar Linien nach A und B gezogen einen rechten Winkel einſchlöſſen.

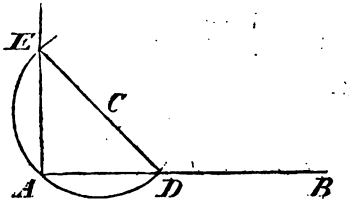
So wie in der Arithmetik die unbeſtimmten Aufgaben durch Gleichungen aufgelöſt werden, die alle möglichen Fälle der Auflöſung in ſich begreifen; ſo wird in der Geometrie eine unbeſtimmte Aufgabe durch eine Linie — auch wohl durch eine Fläche — aufgelöſt, in welcher jeder Punkt eine Auflöſung gibt. Die Linie ſelbſt, die zur Auflöſung einer ſolchen Aufgabe dient, wird der geometriſche Ort (locus geometricus) derſelben genannt; und zwar heißen die gerade Linie und der Kreis, in dieſer Hinſicht, ebene Oerter (loca plana); die Kegelſchnitte hingegen körperliche Oerter (loca solida). — Apollonius hatte eine eigene Schrift über ſolche unbeſtimmte Aufgaben, welche durch die gerade Linie und den Kreis aufgelöſt werden, unter dem Ti-

περὶ τόπων ἐπιπέδων geſchrieben — die zwar verloren angen, aber durch Robert Simſon wieder hergeſtellt, von Camerer überſetzt iſt. Leipzig 1796. 8.

1. Zuſ. Unter allen rechtwinkligen Dreyecken über iſt das gleichſchenklige, deſſen Spitze in die tte des Halbkreiſes fällt, das größte. (117, Zuſ.)

2. Zuſ. Auch hat das gleichſchenklige Dreyeck den ößten Umfang. Denn man ſetze, es ſey der Abnitt ACB in der obigen Figur (152.) ein Halbkreis, glich die Dr. ACB und ADB rechtwinklig, und denke eine gerade Linie von C nach E, ſo iſt AC + CE > (61.) folglich auch AC + CB > AD + DB (152.).

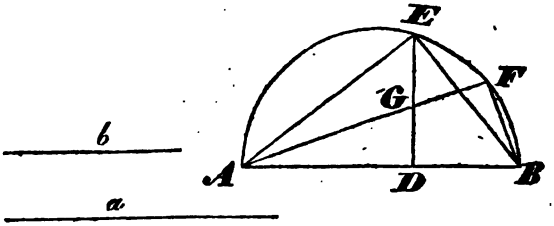
154. Aufg. Auf das Ende einer geraden nie ein Perpendikel zu errichten.



Auflöſ. Es ſoll in A auf AB ein Perpendikel erhtet werden; man ſetze den Zirkel in einen beliebigen unkt C über AB, eröffne ihn bis A, beſchreibe einen ogen, der AB in D ſchneidet, ziehe durch D und C die nie DE, ſo iſt E der Punkt, durch welchen das verngte Perpendikel geht.

Bew. DE iſt ein Durchmeſſer des um C beſchrienen Kreiſes, folglich DAE ein Winkel im Halbkreiſe, ſo = 1 R. (146, 7. Zuſ.).

155. Aufg. Zu zwey gegebenen Linien, und b, die mittlere Proportionallinie zu inden.



Auflös. Man mache AB = a, und beschreibe darüber einen Halbkreis. Ferner mache man AD = b, errichte aus D ein Perpendikel, DE, auf AB, und ziehe AE, so ist dieses die verlangte Linie.

Bew. Man ziehe BE, so ist Dr. AEB rechtwinklig (146, 7. Zus.), ED ein Perpendikel aus der Spitze des rechten Winkels auf die Hypotenuse, und daher

$$AD : AE = AE : AB \text{ (98, 2. Zus.)}$$

d. i. $b : AE = AE : a$

1. Zus. Das Quadrat von AE ist so groß, als ein Parallelogramm, dessen Grundlinie a und Höhe b ist.

2. Zus. Ein Parallelogramm wird in ein Quadrat verwandelt, wenn man zwischen seiner Grundlinie und Höhe die mittlere Proportionallinie sucht.

3. Zus. Es sey AB in m gleiche Theile getheilt, und AD enthalte n solcher Theile, so ist $AE^2 = \frac{n}{m} AB^2$.

Dieß lehrt ein Quadrat finden, das irgend einem Theile eines gegebenen Quadrats gleich ist.

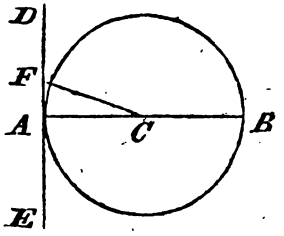
4. Zus. Es ist auch ED die mittlere Proportionallinie zwischen AD und DB (98, 1. Zus.).

5. Zus. Zieht man aus A noch irgend eine Sehne AF, welche ED in G schneidet, und hierzu FB, so ist Dr. ADG $\sim$ AFB — weil W. D = F; und W. bey A beyden gemein ist — folglich ist AD : AG = AF : AB. — Je näher AF nach AE rückt, desto näher kommen die

unkte G und F einander, und in E fallen beyde zuſam-
en. Es iſt daher auch AG : AE = AE : AF.

156. Erklär. Eine Tangente iſt eine gerade
nie, die eine krumme berührt, d. i. nur einen ein-
gen Punkt mit ihr gemein hat und auch verlängert ſie
ht ſchneidet, ſondern ganz auf dieſelbe Seite von ihr
lt. — Auch krumme Linien berühren einander,
nn ſie, ohne einander zu ſchneiden, einen Punkt ge-
in haben.

157. Lehrſ. Ein Perpendikel auf das En-
eines Durchmeſſers errichtet, iſt eine Tan-
nte am Kreiſe.



Bew. Es ſey AB der Durchmeſſer eines Kreiſes,
ab DE durch A ſenkrecht auf AB gezogen, ſo iſt der
unkt A dem Umkreiſe und der Linie DE gemein, jeder
ndere Punkt dieſer Linie aber fällt außerhalb des Kreiſes.

Man nehme z. B. den Punkt F und ziehe aus dem
Mittelpunkt C die Linie CF, ſo iſt CAF ein rechtwinkliges
Dreyeck und CF die Hypotenuſe; folglich iſt CF > CA,
alſo CF > ein Halbmeſſer. Da nun C im Mittelpunkte
liegt, ſo fällt F außerhalb des Kreiſes.

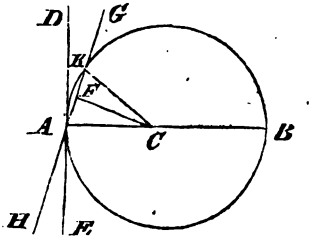
Auf ähnliche Art zeigt ſich, daß jeder andere Punkt
der Linie DE außerhalb des Kreiſes fällt, den Punkt A
ausgenommen; folglich iſt DE eine Tangente.

1. Zuſ. Ein Halbmeſſer oder Durchmeſſer, an den

Berührungspunkt einer Tangente gezogen, macht mit ihr einen rechten Winkel.

2. Zus. Ein Perpendikel auf die Tangente im Berührungspunkt geht durch den Mittelpunkt des Kreises.

158. Lehrs. Durch den Punkt A, in welchem die Tangente DE den Kreis berührt, kann zwischen ihr und dem Kreise keine gerade Linie gezogen werden, sondern jede andere gerade Linie, wie GH, schneidet den Kreis in A und noch einem zweyten Punkte, K.



Bew. Da der Halbmesser CA auf DE senkrecht ist (157, 1. Zus.), so kann er nicht GH senkrecht seyn (47, 1. Zus.); es sey also CF senkrecht auf GH; alsdann ist CA > CF (59.), also CF < ein Halbmesser. Da nun C im Mittelpunkte liegt, so muß F innerhalb des Kreises liegen; folglich hat die Linie GH den Kreis in A geschnitten.

Ferner sey KF = AF, und man ziehe CK; alsdann ist das Dr. CFA = CFK (55.), folglich auch CK = CA. Es ist aber CA ein Halbmesser, folglich ist es auch CK; mithin liegt der Punkt K in der Peripherie. Hier trifft also die Linie GH die Peripherie von neuem.

Jede andere Linie, die von C nach einem Punkte zwischen K und G gezogen wird, ist > CK (63, 2. Zus.);

folglich fällt KG außerhalb des Kreiſes; alſo iſt der Kreis in K durch HG geſchnitten.

Anmerk. Die Tangente AD und der daran liegende Bogen AK ſcheinen etwas ähnliches, wie einen Winkel, zu bilden, und wirklich hat man es den Berührungswinkel (angulus contactus) genannt. Da nun zwiſchen die Tangente und den Bogen keine gerade Linie durch A gelegt werden kann, ſo muß der Berührungswinkel kleiner als jeder noch ſo kleine geradlinige Winkel ſeyn. Dieß ſcheint um ſo mehr parador, da, wie ſich weiter unten zeigt, zwiſchen die Tangente und den Bogen noch unzählige andere Bogen gezogen werden können, es alſo ſcheint, als ob der Berührungswinkel ſich noch in unzählige andere Berührungswinkel zertheilen laſſe. Dieſer Gegenſtand hat daher mannigfaltige Streitigkeiten veranlaßt. Allein ein Mißverſtändniß liegt hierbey offenbar zum Grunde. Denn die Größe eines Winkels hängt von der Neigung eines Schenkels gegen den andern ab; einem Bogen aber kann überhaupt keine Neigung gegen eine gerade Linie beygelegt werden, da die Richtung ſeiner Theile unendlich verſchieden iſt, folglich jedes Element deſſelben eine andere Neigung gegen die Tangente hat. Man hat alſo mit Unrecht die Verbindung einer geraden und krummen Linie einen Winkel genannt, und ſie mit der Größe eines eigentlichen Winkels verglichen. Soll dabey von einem Winkel die Rede ſeyn, ſo kann nur derjenige verſtanden werden, der aus der Neigung des unendlich kleinen Elements der krummen Linie, das mit der geraden zuſammentrifft, entſteht — wobey der ganze übrige Theil der krummen Linie nicht in Betrachtung kommt. Die Richtung eines unendlich kleinen Theils einer krummen Linie aber erkennen wir eben aus der Lage der Tangente an dieſem Theil. Folglich iſt der ſogenannte Berührungswinkel der Winkel, den die Tangente mit dem Elemente des Bogens macht, durch welches ſie geht, und deſſen Richtung durch ſie beſtimmt wird, d. h. es iſt der Winkel, den die Tangente mit ſich ſelbſt macht — es iſt alſo gar kein Winkel oder er iſt = 0. Kein Wunder alſo, daß er kleiner als jeder noch ſo kleine geradlinige Winkel iſt, der > 0 iſt.

Durch alle Bogen aber, die man zwiſchen die Tangente

und den Kreis durch den Berührungspunkt ziehen mag, wird der Berührungswinkel nicht zertheilt, ſondern bleibt bey allen derſelbe, nehmlich = 0, indem die Elemente aller dieſer Bogen an der Stelle, wo ſie zuſammentreffen, einerley Richtung, die der Tangente ſelbſt, haben. Nur ihre andern Elemente haben, ſo wie ſie ſich von dem Berührungspunkte entfernen, eine verſchiedene Neigung gegen die Tangente; und in der Größe dieſer Neigung kann allerdings eine unendliche Verſchiedenheit ſtatt finden; daher an dieſelbe Tangente eine unendliche Menge von Bogen gezogen werden können.

1. Zuſ. An einem Punkt, A, der Peripherie iſt nur eine einzige Tangente möglich.

2. Zuſ. Eine gerade Linie kann einen Kreis nur in zwey Punkten ſchneiden.

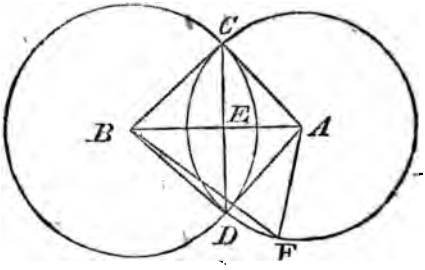
3. Zuſ. So wie der Halbmeſſer auf der Tangente im Berührungspunkt ſenkrecht ſteht, ſo kann er auch auf dem Element des Bogens, deſſen Richtung durch die Tangente beſtimmt wird, als ſenkrecht ſtehend angeſehen werden.

159. Aufg. An einen gegebenen Punkt, A, eines Kreiſes eine Tangente zu ziehen.

Auflöſ. Man ziehe den Halbmeſſer CA (ſ. die vorhergeh. Fig.) und errichte in A ein Perpendikel, DE, auf demſelben, ſo iſt dieſes die verlangte Tangente.

Der Beweis erhellet aus 157.

160. Lehrſ. Zwey Kreiſe, die einander ſchneiden, ſchneiden ſich in zwey Punkten.



Bew. Es ſey der eine Kreis um A, der andere

um B beſchrieben, und ſie mögen einander in C ſchneiden; man ziehe durch A und B eine gerade Linie AB, und fälle darauf aus C ein Perpendikel CE, verlängere dieſes ſo, daß ED = CE werde, ſo iſt D der zweyte Durchſchnittspunkt.

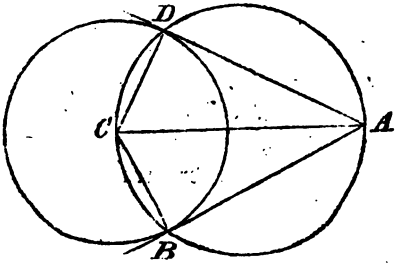
Denn man ziehe CA, CB, DA und DB, ſo iſt Dr. GEA = DEA (55); folglich CA = DA; alſo D ein Punkt in der Peripherie des Kreiſes um A. Eben ſo iſt Dr. CEB = DEB; folglich CB = DB; alſo D auch ein Punkt in der Peripherie des Kreiſes um B. Folglich treffen beyde Kreiſe in D wieder zuſammen.

Einen dritten gemeinſchaftlichen Punkt beyder Kreiſe aber gibt es nicht. Denn geſetzt, F wäre ein ſolcher Punkt, ſo wäre Dr. ABF ≅ ABD; und da alsdann BD = BF wäre, ſo müßte der Winkel BAD = BAF ſeyn, welches unmöglich iſt (39, 6.). Folglich kann F kein gemeinſchaftlicher Punkt beyder Kreiſe ſeyn.

Zuſ. Die gerade Linie, AB, die durch beyder Kreiſe Mittelpunkte geht, ſteht auf der gemeinſchaftlichen Sehne, CD, ſenkrecht.

161. Aufg. Von einem Punkt, A, außerhalb des Kreiſes eine Tangente an den Kreis zu ziehen.

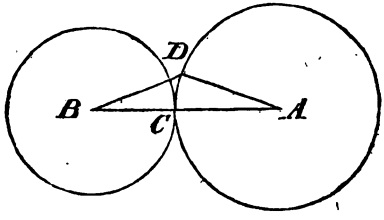
Auflöſ. Man ziehe von A nach dem Mittelpunkt eine gerade Linie AC, um dieſelbe beſchreibe man einen Kreis, ABCD, und durch die Punkte B und D, in welchen beyde Kreiſe einander ſchneiden, ziehe man AD und AB, ſo ſind dieſes Tangenten.



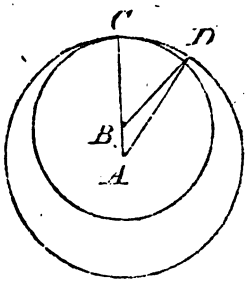
Bew. Man ziehe CB und CD, ſo iſt der Winkel ABC = ADC = 1 R. (146, 7. Zuſ.); folglich AB ſenkrecht auf CB, AD ſenkrecht auf CD, und CB CD Halbmeſſer des Kreiſes, alſo AB und AD Tangenten an den Kreis. (Vergl. 152, 3. u. 4. Zuſ.)

Zuſ. Das Dr. ABC iſt = ADC (64, 1. Zuſ.), und daher AB = AD; ingleichen Winkel BAC = DAC. Es ſind alſo von einem Punkt, A, außerhalb des Kreiſes 2 Tangenten an den Kreis möglich, die beyde einander gleich ſind; und der Winkel, den ſie einſchließen, wird durch die gerade Linie nach dem Mittelpunkt halbirt.

162. Lehrſ. Wenn die Mittelpunkte zweyer Kreiſe um die Summe ihrer Halbmeſſer von einander abſtehen, ſo berühren die Kreiſe einander von außen, und wenn ſie um die Differenz ihrer Halbmeſſer abſtehen, ſo berührt der eine Kreis den andern von innen.



Bew. I. Der eine Kreis ſey um A mit dem Halbmeſſer AC, der andere um B mit dem Halbmeſſer BC beſchrieben, ſo haben beyde Kreiſe den Punkt C gemein, und keinen weiter. Denn geſetzt, es wäre D ein ſolcher Punkt, ſo ziehe man AD und BD; alsdann wäre AD = AC, BD = BC; folglich AD + BD = AC + BC = AB, welches unmöglich iſt (61.). Beyde Kreiſe haben alſo nur den Punkt C gemein, und fallen übrigens ganz außerhalb einander, folglich berühren ſie einander in dieſem Punkt von außen.



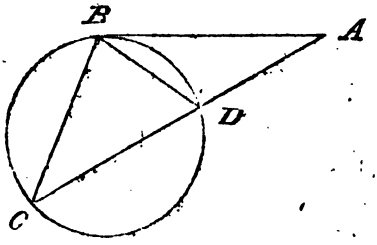
II. Es sey wiederum AC der Halbmesser des einen, BC der Halbmesser des andern Kreises, folglich AB = AC — BC, so haben beyde Kreise nur den Punkt C gemein. Denn gesetzt, es wäre D noch ein gemeinschaftlicher Punkt, so ziehe man AD und BD; alsdann wäre AD = AC, BD = BC; folglich AB + BD = AB + BC = AC = AD, welches unmöglich ist (61.). Beyde Kreise haben also nur den Punkt C gemein, und der eine fällt ganz innerhalb des andern, also berührt er diesen von innen.

1. Zus. Wenn man in der Linie AC, die man über A hin verlängern kann, noch andere Mittelpunkte annimmt, und um dieselben mit einer Eröffnung des Zirkels, die bis C geht, Kreise beschreibt, so berühren alle diese einander in C. Es können daher unzählige Kreise einander in demselben Punkte berühren. — Ein Perpendikel durch C auf AC ist alsdann die gemeinschaftliche Tangente aller.

2. Zus. Wenn Kreise einander in einem Punkte berühren, so geht die gerade Linie, die durch ihre Mittelpunkte gezogen wird, durch den Berührungspunkt.

163. Lehrs. Wenn zwey Kreise einander berühren, so theilt jede gerade Linie, die durch den Berührungspunkt geht und die

165. Lehrs. Wenn von einem Punkt, A, außerhalb des Kreises, zwey gerade Linien, AB, AC, nach dem Kreise gehen, von welchen die erstere ihn berührt und die letztere schneidet, so ist die Tangente, AB, die mittlere Proportionallinie zwischen der andern Linie, AC, und ihrem äußern Abschnitt, AD.



Bew. Man ziehe BC und BD, so ist das Dr. ABC ∼ ABD — weil der Winkel A beyden Dreyecken gemein, und Winkel C = ABD (164.) ist. Folglich ist AC : AB = AB : AD (90.).

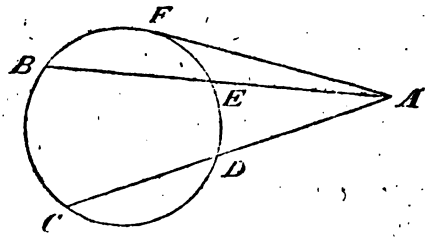
1. Zus. Umgekehrt, wenn AC : AB = AB : AD ist, so ist AB eine Tangente. Denn es ist alsdann Dr. ABC ∼ ABD (95.), folglich der W. ABD = C. Wäre nun AB keine Tangente, so müßte eine andere Linie an B die Tangente seyn, und diese müßte mit BD einen Winkel machen, der auch = C, und doch von ABD verschieden wäre, welches unmöglich ist.

2. Zus. Wenn beyde Linien, AC, AB, den Kreis schneiden, so verhalten sie sich umgekehrt wie ihre äußern Abschnitte, d. h. es ist AB : AC = AD : AE. Denn man ziehe eine Tangente AF, so ist

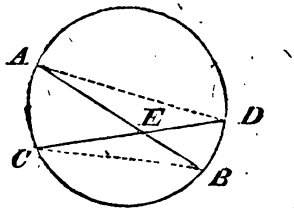
AB : AF = AF : AE

ingleichen AC : AF = AF : AD

folglich AB : AC = AD : AE (Ax. 349.).



166. Lehrs. Wenn zwey Sehnen, AB, CD, einander in E schneiden, so stehen die abgeschnittenen Theile in umgekehrtem Verhältniß, oder ihre Produkte sind einander gleich, d. h. es ist AE : ED = EC : EB oder AE . EB = ED . EC.



Bew. Man ziehe AD und CB, so ist Dr. AED ∼ CEB — weil 1) die Winkel bey E einander gleich sind, 2) A = C ist (146, 3. Zus.) — folglich ist AE : ED = CE : EB; und daher AE . EB = ED . CE.

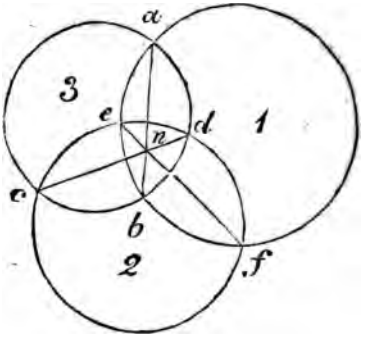
1. Zus. Wird die eine Sehne halbirt, so ist ihre Hälfte die mittlere Proportionallinie zwischen den beyden Theilen der andern Sehne.

(Man vergleiche hiermit oben 155, 4. Zus., wo ED auch die Hälfte einer Sehne ist.)

2. Zus. Alle Sehnen, die durch den Punkt E gehen, werden durch diesen in zwey Abschnitte getheilt, deren Produkte einander gleich sind.

3. Zuſ. Wenn daher zwey gleiche Sehnen einander ſchneiden, ſo ſind auch die Theile der einen den Theilen der andern gleich. Wäre AB = CD, ſo wäre auch AE = CE; BE = DE. Denn alsdann ſind ſowohl die Summen der Theile, als die Produkte derſelben einander gleich.

167. Lehrſ. Wenn drey Kreiſe einander ſchneiden, ſo durchſchneiden die drey gemeinſchaftlichen Sehnen, ab, cd, ef, einander in demſelben Punkt n.



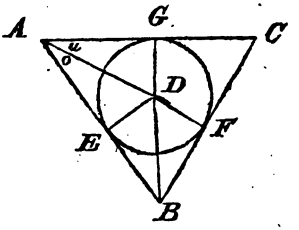
Bew. Man unterſcheide die Kreiſe durch 1, 2, 3. Da die Sehnen ab und cd dem Kreiſe 3 angehören, ſo iſt an . bn = cn . dn (166.). Es gehört aber die Sehne ab auch dem Kreiſe 1 an; gedenkt man ſich daher in dieſem eine zweyte Sehne aus f durch n gezogen, die den Kreis in e treffe, ſo iſt an . bn = fn . en; folglich iſt auch fn . en = cn . dn. Die Sehne, die durch f und n geht, gehört aber auch dem Kreiſe 2 an; geſetzt nun, ſie träfe die Peripherie deſſelben in einem Punkt k, ſo wäre fn . kn = cn . dn — da cd auch dem Kreiſe 2 angehört —; folglich wäre fn . kn = fn . en; alſo kn = en; alſo iſt k von e nicht verſchieden, d. h. die Sehne durch f und n trifft in den Durchſchnittspunkt der Kreiſe 1 und 2.

168. Erklär. Ein Kreis ist um eine geradlige Figur beschrieben, wenn alle Winkelspitzen in die ripherie fallen; hingegen ist er in die Figur beschrieı, wenn alle Seiten der Figur ihn berühren. Im er- n Fall ist die Figur in den Kreis, im zweyten ist um denselben beschrieben.

169. Aufg. Um ein Dreyeck einen Kreis beschreiben.

Auflösung und Beweis sind wie in 139; denn nn man daselbst die drey Punkte A, B und C durch ey gerade Linien verbindet, so erhält man ein Dreyeck.

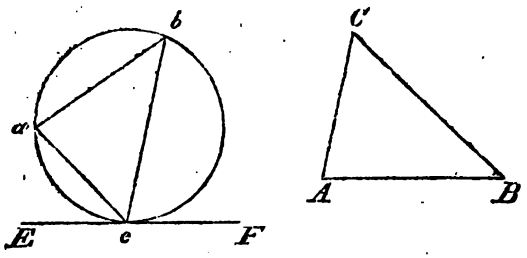
170. Aufg. In ein Dreyeck, ABC, einen reis zu beschreiben.



Auflös. Man halbire zwey Winkel des Dreyecks, B. A und B; der Punkt D, in welchem die die Winl halbirenden Linien sich schneiden, ist der Mittelpunkt.

Bew. Man fälle aus D die Perpendikel DE, DF, G, so ist Dr. ADE = ADG — weil AD beyden gein ist, der Winkel bey E und bey G = 1 R., und = u. Folglich ist DE = DG. Auf ähnliche Art zeigt h, daß auch DF = DE ist. Also sind DE, DF, DG s Halbmesser desselben Kreises zu betrachten, und die eiten des Dreyeckes Tangenten an diesem Kreise (157.). olglich ist der Kreis in das Dreyeck beschrieben.

171. Aufg. In einen Kreis ein Dreyeck u verzeichnen, das einem gegebenen, ABC, hnlich ist.



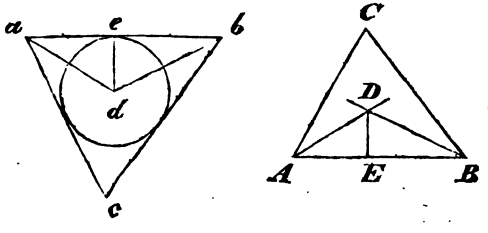
Auflös. An irgend einen Punkt, c, des Kreises ziehe man eine Tangente, EF; aus c ziehe man eine Sehne cb, die mit der Tangente cF einen Winkel = A mache, und eine andre ca unter einem Winkel = B; endlich ziehe man ab, so ist abc das verlangte Dreyeck.

Bew. Es ist der Winkel bcF = A (per constr.)
ingleichen — — bcF = a (164.)
folglich A = a.

Eben so zeigt sich, daß B = b sey; folglich ist Dr. ABC ∼ abc (94.).

Zus. Verlangt man ein gleichseitiges Dreyeck in einem Kreise, so nehme man ABC gleichseitig, alsdann wird es auch abc. — Ein kürzeres Verfahren lehrt 173, 7. Zus.

172. Um einen Kreis ein Dreyeck zu verzeichnen, das einem gegebenen, ABC, ähnlich ist.

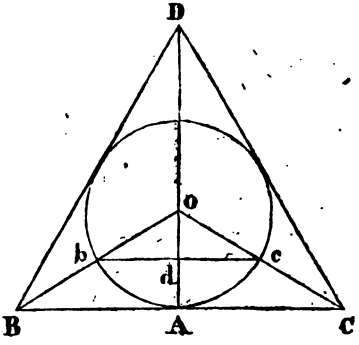


Auflöſ. Man halbire zwey Winkel des Dreyecks, z. B. A und B; und aus dem Punkt D, in welchem AD und BD ſich ſchneiden, fälle man ein Perpendikel DE. Alsdann ziehe man an einen beliebigen Punkt, e, des Kreiſes eine Tangente, ab; aus dem Mittelpunkt d ziehe man de; ferner trage man an ed in d auf die eine Seite den Winkel eda = EDA, und auf die andere den Winkel edb = EDB, und ziehe aus a und b die Tangenten ac und bc, ſo iſt abc das verlangte Dreyeck.

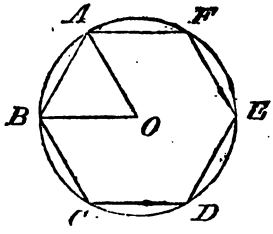
Bew. Es iſt der Winkel DEA = dea = 1 R.; ferner W. EDA = eda; alſo auch W. EAD = ead. Es iſt aber EAD = ½ A (per constr.) und ead = ½ a (161, Zuſ.); alſo ½ A = ½ a; alſo auch A = a.

Auf ähnliche Art ergibt ſich, daß B = b iſt; folglich iſt Dr. ABC ∿ abc (94.).

Zuſ. Ein gleichſeitiges Dreyeck um einen Kreis zu beſchreiben, nehme man ABC gleichſeitig. — Kürzer kann man verfahren, wenn man an irgend einen Punkt A eines Kreiſes eine Tangente von unbeſtimmter Länge zieht, aus dem Berührungspunkt A ein Perpendikel AD errichtet, durch die Mitte d des Halbmeſſers OA eine Parallele bc mit der Tangente zieht, alsdann aus dem Mittelpunkt O durch b und c die Linien OB und OC. Dadurch erhält man BC als die Seite des Dreyecks; und ſchlägt man aus B mit BC einen Bogen, der das Perpendikel in D ſchneidet, ſo iſt dadurch auch der dritte Punkt des Dreyecks beſtimmt. Der Beweis ergibt ſich leicht aus dem Folgenden.



173. Lehrſ. Wenn die Peripherie eines Kreiſes in irgend eine Anzahl gleicher Theile getheilt wird, und man zieht die Sehnen dieſer Bogen, ſo entſteht daraus ein regelmäßiges Vieleck.



Bew. Es ſey z. B. der Kreis um O in 6 gleiche Theile getheilt, und die Sehnen derſelben gezogen, ſo ſchließen dieſe 1) die zwiſchen ihnen enthaltene Fläche von allen Seiten ein, weil in jedem Theilungspunkt zwey Sehnen zuſammentreffen, 2) ſind alle Seiten einander gleich (140, 1. Zuſ.); 3) ſind die Bogen BDF, CEA u. ſ. w. einander gleich, weil ſie den ganzen Kreis weniger zweyer gleichen Abtheilungen ausmachen; mithin ſind auch die Winkel A, B, C u. ſ. w. einander gleich (146, 3. Zuſ.). Alſo iſt das Sechseck ABCDEF regelmäßig.

1. Zus. Ist die Peripherie in n gleiche Theile getheilt, so ist ein jeder derselben $= \frac{360^0}{n}$; folglich der Bogen, auf welchem ein Winkel des Vielecks steht $= 360^0 - 2 . \frac{360^0}{n}$; und daher der Winkel selbst $= (360^0 - 2 . \frac{360^0}{n}) : 2 = 180^0 - \frac{360^0}{n}$ (146, 2. Zus.).

Man vergleiche damit 85, 2. Zus.

2. Zus. Zieht man aus O nach jedem Winkelpunkt, A, B u. s. w. einen Halbmesser, so entstehen Dreyecke, die alle einander gleich sind (57). Auch die Winkel um den Mittelpunkt sind einander gleich, und daher jeder $= \frac{360}{6} = 60$, und in einem Vieleck von n Seiten $= \frac{360}{n}$.

Anmerk. Nach diesen allgemeinen Ausdrücken für die Größe des Polygon- und Centriwinkels lassen sich diese für jedes Vieleck von einer bestimmten Anzahl Seiten berechnen.

3. Zus. Der Polygon- und Centriwinkel eines regelmäßigen Vielecks machen zusammen 180^0 aus.

4. Zus. In einem regelmäßigen Sechseck sind die Dreyecke, die durch eine Seite und 2 Halbmesser gebildet werden, wie AOB, gleichseitig — weil der Centriwinkel $= 60^0$, und jeder der Winkel an der Grundlinie ebenfalls $= 60^0$ ist.

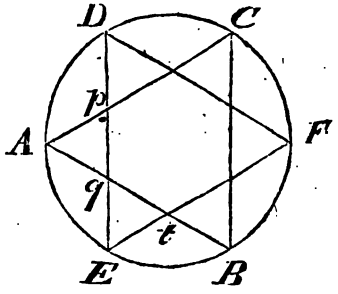
5. Zus. Man kann daher ein regelmäßiges Sechseck in einen Kreis verzeichnen, wenn man vermittelst des Halbmessers die Peripherie in 6 gleiche Theile theilt, und die Sehnen derselben zieht.

6. Zus. Verbindet man je zwey solcher Abtheilungen durch eine Sehne, so erhält man ein regelmäßiges Dreyeck, und durch fortgesetztes Halbiren einer

jeden Abtheilung kann man ein regelmäßiges Vieleck von 12, 24, 48 ꝛc. Seiten zu Stande bringen.

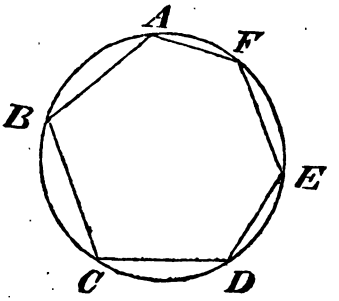
7. Zuſ. Eine Sehne, durch die Mitte eines Halbmeſſers ſenkrecht gezogen, iſt gleichfalls die Seite eines regelmäßigen Dreyecks.

174. Lehrſ. Wenn in einen Kreis zwey gleichſeitige Dreyecke ſo beſchrieben werden, daß ihre Spitzen gleich weit von einander abſtehen, ſo werden ihre Seiten gegenſeitig in drey gleiche Theile getheilt.



Bew. Da die Bogen zwiſchen den Spitzen der Dreyecke einander gleich ſind, ſo ſind die gegenüberliegenden Seiten einander parallel, z. B. BC ‖ ED (147, Zuſ.); folgl. iſt Dr. Apq ∾ ABC (92.) alſo Aq = pq. Daſſelbe gilt von den übrigen kleinern Dreyecken, wie Eqt. Es iſt aber auch Aq . Bq = Eq . Dq; folgl. Aq = Eq (166, 3. Zuſ.) folgl. ſind alle die kleinern Dreyecke einander gleich; alſo Aq = qt = Bt.

175. Lehrſ. In einem jeden Vieleck, das in einem Kreiſe beſchrieben iſt, und eine gerade Anzahl von Seiten hat, iſt die Summe des 1ſten, 3ten, 5ten Winkels, u. ſ. w. der Summe des 2ten, 4ten, 6ten u. ſ. w. gleich.



Bew. Es sey ABCDEF ein Sechseck, und P bedeute die Peripherie, so ist der Winkel

$A = \frac{1}{2}(P - \text{arc. FAB})$ (146, 2. Zus.)
$C = \frac{1}{2}(P - \text{arc. BCD})$
$E = \frac{1}{2}(P - \text{arc. DEF})$

folglich $A + C + E = \frac{1}{2}(3P - P) = P$

Ferner ist der Winkel

$B = \frac{1}{2}(P - \text{arc. ABC})$
$D = \frac{1}{2}(P - \text{arc. CDE})$
$F = \frac{1}{2}(P - \text{arc. EFA})$

folglich $B + D + F = \frac{1}{2}(3P - P) = P$
also $A + C + E = B + D + F$

Zus. In einem Vieleck von 2 n Seiten ist die Summe einer jeden der beyden Reihen von Winkeln $= \frac{1}{2}(nP - P) = \frac{1}{2}(n-1)P = \frac{1}{2}(n-1)\,4\,R. = 2(n-1)R.$; und daher die Summe beyder Reihen, oder aller Winkel des Vielecks $= 4(n-1)R. = 4nR. - 4R.$ (Vergl. oben 85.).

176. Aufg. Ein regelmäßiges Viereck in einen Kreis zu beschreiben.

Auflös. Man theile den Kreis durch einen Durchmesser in 2 Halbkreise, halbire jeden Halbkreis und ziehe die dazu gehörigen Sehnen.

Bew. Da auf diese Art die Peripherie in 4 gleiche

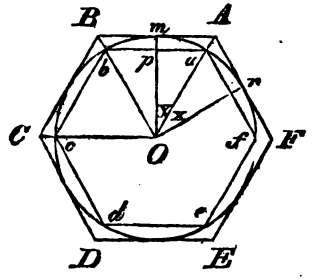
Theile getheilt wird, so bilden ihre Sehnen ein regelmäßiges Viereck (173.).

Zus. Durch fortgesetzte Halbirung eines jeden Bogens kann man ein Vieleck von 8, 16 ꝛc. Seiten zu Stande bringen.

Anmerk. Wie man ein regelmäßiges Zehneck, und die aus diesem abzuleitenden Vielecke, im Kreise erhalten könne, wird weiter unten (196, 2. u. 3. Zus.) gezeigt.

177. Aufg. Um einen Kreis ein regelmäßiges Sechseck zu beschreiben.

Auflös. Man beschreibe in den Kreis ein regelmäßiges Sechseck (173, 5. Zus.), und ziehe durch die Mitte der Bogen ab, bc, etc. Parallelen AB, BC, etc. mit den Seiten des innern Sechsecks, so ist ABCDEF die verlangte Figur.



Bew. Man ziehe den Halbmesser Om senkrecht durch ab, so ist m die Mitte des Bogens ab (142.) und AB senkrecht auf Om, also eine Tangente. Dasselbe läßt sich von den übrigen Seiten BC, CD u. s. w. darthun.

Ferner ziehe man den Halbmesser Oa, und verlängre ihn, bis er die Seiten AB und AF trifft. Er trifft sie aber in dem Punkt A. Denn gesetzt, er träfe die Seite AF in einem andern Punkte A', so ziehe man Or an die Mitte des Bogens af. Alsdann ist der Bogen ar = am, folglich x = y; ingleichen Winkel OrA

= OmA = 1 R.; und Or = Om; folglich Dr. OrA' = OmA; also auch OA' = OA. Also ist der Punkt A' von A nicht verschieden.

So wie aber Oa verlängert in A trifft, so auch Ob verlängert in B, Oc verlängert in C u. s. w. Und Dr. AOB ist = BOC — weil OB beyden gemein ist, Winkel AOB = BOC (140, 2. Zus.), und die Winkel bey B (als correspondirende der Winkel bey b) einander gleich sind. Folglich ist AB = BC.

Auf gleiche Art zeigt sich, daß BC = CD = DE etc. ist. Also sind alle Seiten einander gleich.

Endlich ist auch der Winkel A = B = C u. s. w. da jeder von diesen aus 2 Winkeln besteht, welche die correspondirenden der Winkel sind, aus welchen die Winkel a, b, c u. s. w. zusammengesetzt sind; und da diese einander gleich sind, so sind es auch jene.

Anmerk. Es ist nicht nothwendig, das innere Sechseck zuerst zu beschreiben, sondern man kann gleich an die Mitte der Bogen ab, bc, etc. die Tangenten AB, BC u. s. w. ziehen.

1. Zus. Auf ähnliche Art kann man zu jedem in dem Kreise beschriebenen regelmäßigen Vieleck ein anderes von gleich vielen Seiten um den Kreis beschreiben.

2. Zus. Es verhält sich ab : AB = Op : Om (88, 3. Zus.); also auch n . ab : n . AB = Op : Om, d. h. der Umfang des innern Vielecks von n Seiten verhält sich zum Umfange des äußern, wie die Höhe eines Dreyecks der innern Figur zum Halbmesser.

178. Aufg. Den Inhalt eines regelmäßigen Vielecks von n Seiten zu finden, wenn eine Seite = a, und der Halbmesser des umschriebenen Kreises = r gegeben ist.

Auflös. Man zertheile das Vieleck durch Linien aus dem Mittelpunkte nach den Winkelpunkten in lauter

Dreyecke, wie aOb, bOc, etc. (m. ſ. die vorhergehende Fig.), ſuche den Inhalt eines dieſer Dreyecke, und multiplizire ihn mit der Anzahl der Seiten. Dieß gibt den Inhalt des Vielecks $= \frac{ns}{2} \cdot \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4}s^2)}$.

Bew. Die Dreyecke, welche man auf dieſe Art erhält, ſind alle einander gleich (173, 2. Zuſ.), und die Anzahl derſelben der Anzahl der Seiten des Vielecks gleich.

Der Inhalt eines Dreyecks, wie aOb, aber iſt $= \frac{ab \cdot Op}{2}$ (121.). Nun iſt $Op = \sqrt{(Oa^2 - ap^2)}$ [132, 4. Zuſ.]. Setzt man alſo $ab = s$, und $Oa = r$, ſo iſt $\frac{ab \cdot Op}{2} = \frac{s}{2} \cdot \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4}s^2)}$. Folglich der Inhalt von n ſolchen Dreyecken oder dem ganzen Vieleck $= \frac{ns}{2} \cdot \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4}s^2)}$.

1. Zuſ. Da ns den ganzen Umfang des Vielecks ausdrückt, ſo findet ſich auch der Inhalt, wenn man den halben Umfang des Vielecks mit der ganzen Höhe, oder den ganzen Umfang mit der halben Höhe eines ſeiner Dreyecke multiplizirt.

2. Zuſ. Ein regelmäßiges Vieleck iſt einem Dreyecke gleich, deſſen Grundlinie dem Umfange des Vielecks, und deſſen Höhe der Höhe eines ſeiner Dreyecke gleich iſt.

3. Zuſ. Drückt s die Seite des um den Kreis beſchriebenen Vielecks aus, ſo wird r = der Höhe eines ſeiner Dreyecke, (wie die vorhergehende Figur zeigt,) und daher der Inhalt des ganzen Vielecks $= \frac{nsr}{2}$ d. i. = dem Umfange des Vielecks multiplizirt mit der Hälfte des Halbmeſſers.

Anmerk. Die Trigonometrie lehrt den Inhalt eines regelmäßigen Vielecks bloß aus der Anzahl der Seiten und dem Halbmeſſer oder einer Seite finden.

179. Lehrſ. Regelmäßige Vielecke von gleich vielen Seiten ſind ähnliche Figuren.

Bew. 1) ſind ihre Winkel einander gleich, da die Größe eines Polygonwinkels nicht von der Größe der Seiten, ſondern von der Anzahl derſelben abhängt (173, 1. Zuſ.); 2) da die Seiten eines jeden unter ſich gleich ſind, ſo haben ſie gegen einander einerley Verhältniß; folglich ſind die Figuren einander ähnlich (90.).

1. Zuſ. Zertheilt man ähnliche regelmäßige Vielecke aus dem Mittelpunkte der in oder um ſie beſchriebenen Kreiſe in Dreyecke, ſo ſind auch die Dreyecke des einen den Dreyecken des andern ähnlich, und daher verhalten ſich die Umfänge ſolcher Vielecke wie die Halbmeſſer oder Durchmeſſer der in oder um ſie beſchriebenen Kreiſe.

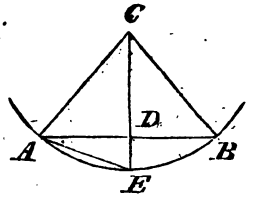
2. Zuſ. Der Flächeninhalt regelmäßiger Vielecke von gleich vielen Seiten verhält ſich wie die Quadrate der Halb- oder Durchmeſſer der in oder um ſie beſchriebenen Kreiſe.

3. Zuſ. Der Flächeninhalt des innern regelmäßigen Vielecks in einem Kreiſe verhält ſich zu dem Flächeninhalt des äußern regelmäßigen von gleich vielen Seiten, wie $Op^2 : Om^2$ (Fig. zu 177.), oder, allgemeiner ausgedrückt, wie $h^2 : r^2$, wenn h die Höhe eines der innern Dreyecke, und r den Halbmeſſer des Kreiſes bedeutet. (Vergl. 177, 2. Zuſ.).

180. Aufg. Aus der Seite eines regelmäßigen Vielecks von n Seiten und dem Halbmeſſer des umſchriebenen Kreiſes einen allgemeinen Ausdruck für die Seite eines regelmäßigen Vielecks von 2 n Seiten zu finden.

Auflöſ. Es ſey $AB = s$ die Seite des n ecks, und $CA = r$ der Halbmeſſer des umſchriebenen Kreiſes; *man ziehe* CE ſenkrecht durch AB, ingleichen

AE, so ist dieses die gesuchte Seite und sie ist $= \sqrt{2r\,[r - \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4}s^2)}]}$.



Bew. Es ist $AE^2 = AD^2 + DE^2 = (\frac{1}{2}AB)^2 + (CE - CD)^2 = \frac{1}{4}s^2 + r^2 - 2r\,CD + CD^2$. Nun ist $CD^2 = AC^2 - AD^2 = r^2 - \frac{1}{4}s^2$; daher $CD = \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4}s^2)}$; also ist

$$\begin{aligned} AE^2 &= \tfrac{1}{4}s^2 + r^2 - 2r\sqrt{(r^2 - \tfrac{1}{4}s^2)} + r^2 - \tfrac{1}{4}s^2 \\ &= 2r^2 - 2r\sqrt{(r^2 - \tfrac{1}{4}s^2)} \\ &= 2r\,[r - \sqrt{(r^2 - \tfrac{1}{4}s^2)}]. \end{aligned}$$

Folglich

$$AE = \sqrt{2r\,[r - \sqrt{(r^2 - \tfrac{1}{4}s^2)}]}.$$

1. Zus. Wenn $n = 6$, und $r = 1$ gesetzt wird, so ist auch $s = 1$ und AE als die Seite des Zwölfecks $= \sqrt{2[1 - \sqrt{(1 - \frac{1}{4})}]} = \sqrt{2 - 2\sqrt{\frac{3}{4}}} = \sqrt{(2 - \sqrt{3})} = 0,5176380\ldots$; also der ganze Umfang des Zwölfecks $= 6,2116560$. — Hieraus folgt, daß der Durchmesser des Kreises sich zum Umfange des in ihm beschriebenen Zwölfecks verhält, wie $1 : 3,1058280$.

2. Zus. Nach 177, 2. Zus. kann man aus dem Umfange des in den Kreis beschriebenen Zwölfecks den Umfang des um ihn beschriebenen finden. Das Perpendikel aus C auf AE wäre $= \frac{\sqrt{(2 + \sqrt{3})}}{2}$ für den Halbmesser $= 1$. Hiernach der Umfang des umschriebenen Zwölfecks $= 6,430776$; also das Verhältniß des Durchmessers zu diesem Umfange $= 1 : 3,215388$.

3. Zus. Denkt man sich noch eine gerade Linie von E nach B gezogen, so zeigt sich, daß der Flächeninhalt des Vielecks von 2 n Seiten (p') gleich ist dem Vieleck von n Seiten (p) + n mal dem Dreyeck AEB. Man setze also CD = h, so ist

$$p' = \frac{ns}{2} h + \frac{ns}{2} (r - h) = \frac{ns}{2} r.$$

folglich $p : p' = h : r$.

4. Zus. Nennt man P das äußere Vieleck von n Seiten, so ist

$$P : p = r^2 : h^2 \text{ (179, 3. Zus.)}$$

ferner ist $p : p' = h : r$ (3. Zus.)

folglich $P : p' = r : h = p' : p$.

Es ist also das innere Vieleck von 2n Seiten die mittlere Proportionalgröße zwischen dem innern und äußern Vieleck von n Seiten, und daher

$$p' = \sqrt{(Pp)}.$$

5. Zus. Wird endlich das äußere Vieleck von 2n Seiten mit P', und die Höhe eines der Dreyecke von p' durch h' bezeichnet, so ist

$$p' : P' = h'^2 : r^2 \text{ (179, 3. Zus.)}.$$

Es ist aber $h'^2 = r^2 - \frac{1}{4} AE^2 = \frac{1}{2} r (r + h)$ u. daher

$$p' : P' = \tfrac{1}{2} r (r + h) : r^2$$
$$= \tfrac{1}{2} (r + h) : r$$

Ferner ergibt sich aus der Proportion im 4. Zus.

$$r + h : r = p + p' : p' \text{ (Ar. 342, 5.)}$$

Folglich ist $p' : P' = \frac{1}{2} (p + p') : p'$

und daher $P' = \frac{2 p' p'}{p + p'} = \frac{2 Pp}{p + p'}$.

181. Lehrs. Ein Kreis kann als ein regelmäßiges Vieleck von unendlich vielen Seiten betrachtet werden.

Bew. Man beschreibe in einen Kreis irgend ein

regelmäßiges Vieleck, und verdopple darauf die Anzahl der Seiten deſſelben, ſo ſind die Bogen, deren Sehnen die Seiten des letztern ausmachen, nur halb ſo groß als die Bogen der Seiten des erſtern, und daher kommen die Sehnen des letztern ihren Bogen näher, und ſind folglich an Größe weniger von ihnen verſchieden, als die Sehnen des erſtern. Durch fortgeſetzte Verdoppelung der Anzahl der Seiten hat man es alſo in ſeiner Gewalt, die Sehnen ihren Bogen immer näher, und folglich ſo nahe zu bringen, als man nur will. Wird aber der Unterſchied zwiſchen der Sehne und ihrem Bogen deſto kleiner, je kleiner beyde werden, d. h. je größer die Anzahl der Theile iſt, in welche die Peripherie getheilt wird, ſo kann man mit Recht ſchließen, daß wenn beyde unendlich klein wären, oder wenn die Peripherie in unendlich viele Theile getheilt würde, der Unterſchied zwiſchen ihnen noch kleiner als unendlich klein, d. h. daß er ſo gut als nichts ſeyn müßte. Folglich kann man den Kreis einem ſolchen Vieleck gleich ſchätzen.

1. Zuſ. Kreiſe, als regelmäßige Vielecke von unendlich vielen Seiten, ſind ähnliche Figuren (179.).

2. Zuſ. Die Peripherieen der Kreiſe verhalten ſich wie ihre Halb- oder Durchmeſſer (179, 1. Zuſ.).

3. Zuſ. Die Kreisflächen verhalten ſich wie die Quadrate ihrer Halb- oder Durchmeſſer.

4. Zuſ. Ein Kreis iſt einem Dreyecke gleich, deſſen Grundlinie der Peripherie des Kreiſes, und deſſen Höhe ſeinem Halbmeſſer gleich iſt (178, 2. Zuſ.).

5. Zuſ. Der Flächeninhalt eines Kreiſes wird daher gefunden, wenn man ſeine Peripherie mit der Hälfte des Halbmeſſers multiplizirt.

6. Zuſ. Der Flächeninhalt des Kreiſes verhält ſich

zum Flächeninhalt des umſchriebenen regelmäßigen Vielecks, wie die Peripherie zum Umfange des Vielecks (178, 3. Zuſ.).

7. Zuſ. Man könnte daher den Inhalt des Kreiſes aus dem des äußern Vielecks finden, wenn das Verhältniß der Peripherie zu dem Umfange des Vielecks bekannt wäre.

182. Anmerk. Dieſes Verhältniß aufzufinden hat dieſelbe Schwierigkeit, als das Verhältniß des Durchmeſſers zur Peripherie zu beſtimmen, wodurch man eben ſo gut in den Stand geſetzt würde den Inhalt des Kreiſes zu finden. Man hat ſich daher viele Mühe gegeben, dieſes Verhältniß ausfündig zu machen. Man kennt aber hierzu keinen directen Weg. Indeſſen kann man durch mancherley Mittel dem wahren Verhältniß ſo nahe kommen, als man nur will. Man kann ein regelmäßiges Vieleck in und um den Kreis beſchreiben und das Verhältniß des Durchmeſſers zu dem Umfange beyder berechnen. Darauf muß man die Anzahl ihrer Seiten verdoppeln, und (nach 180.) die Größe der Umfänge und ihr Verhältniß zum Durchmeſſer von neuem beſtimmen; und ſo mit der Verdoppelung der Anzahl der Seiten und der Berechnung der Umfänge und des Verhältniſſes derſelben zum Durchmeſſer fortfahren, bis man beyde Vielecke einander ſo ſehr genähert hat, daß ſie nicht mehr merklich von einander abweichen. Alsdann iſt man ſicher, daß das Verhältniß des Durchmeſſers zur Peripherie mit den Verhältniſſen deſſelben zu den Umfängen dieſer Vielecke ſo weit übereinſtimmend ſeyn müſſe, als dieſe beyden unter einander ſelbſt übereinſtimmen, da die Peripherie von dem Umfange eines jeden Vielecks weniger verſchieden iſt, als beyde von einander ſelbſt abweichen.

Ludolph van Ceulen, gewöhnlich von Cölln

3. Zus. Wenn der Halbmesser eines Kreises der Summe der Halbmesser zweyer andern Kreise gleich ist, so ist der Inhalt desselben größer als der Inhalt der beyden andern zusammengenommen.

Denn man nehme die Halbmesser der Kreise wie in 183, 3. Zus. so ist der Inhalt der beyden letztern $= R^2\pi + r^2\pi$; der Inhalt des erstern aber $= \varrho^2\pi = (R+r)^2\pi = (R^2 + 2Rr + r^2)\pi$, welches offenbar größer als jene Summe ist.

185. Aufg. Die Länge eines Bogens von n Graden zu finden, wenn der Halbmesser $= r$ gegeben ist.

Auflös. und Bew. Da die Länge eines solchen Bogens sich zur Länge der ganzen Peripherie wie $n : 360$ verhält, so gibt die Proportion $360 : n = 2r\pi : x$ die gesuchte Länge $x = \frac{2nr\pi}{360} = \frac{nr\pi}{180}$.

1. Zus. Umgekehrt findet sich die Anzahl der Grade, n, die einer Linie von gegebener Länge, f, als Bogen eines Kreises, dessen Halbmesser $= r$ ist, zukommt, durch die Proportion $2r\pi : f = 360 : n$.

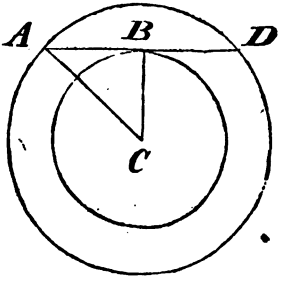
2. Zus. Auf ähnliche Art ergibt sich der Flächeninhalt eines Ausschnitts von n Graden $= \frac{nr^2\pi}{360}$. — Auch kann man ihn durch das Produkt des Bogens mit der Hälfte des Halbmessers ausdrücken.

3. Zus. Wenn man von dem Ausschnitt das Dreyeck abzieht, dessen Grundlinie die Sehne des Bogens ist, so erhält man den Inhalt des Abschnitts. Aber den Inhalt des Dreyecks kann man, ohne Hülfe der Trigonometrie, nicht aus dem bloßen Halbmesser und Bogen oder Winkel finden.

186. Erklär. Kreise, die aus demselben Mittelpunkt mit verschiedenen Halbmessern beschrieben sind, heißen concentrisch; und der Flächenraum, der zwischen

den Peripherieen zweyer concentrischen Kreise enthalten ist, heißt ein Ring (annulus).

187. Aufg. Den Inhalt eines Ringes, x, zu finden, wenn die Halbmesser CA = R, und CB = r gegeben sind.



Auflös. und Bew. Der Inhalt des Ringes ist = dem Inhalt des größern Kreises weniger dem des kleinern; also ist $x = R^2\pi - r^2\pi = (R^2 - r^2)\,\pi = (R + r) \cdot (R - r)\,\pi$.

Zus. Da $AB^2 = CA^2 - CB^2 = R^2 - r^2$ ist, so ist $AB^2\pi = (R^2 - r^2)\,\pi$ d. h. der Inhalt des Ringes ist einem Kreise gleich, dessen Halbmesser AB, oder, dessen Durchmesser diejenige Sehne des größern Kreises ist, welche den innern berührt.

188. Aufg. Einen Kreis zu construiren, dessen Flächeninhalt noch einmal so groß als der eines gegebenen ist.

Auflös. Man lege 2 Halbmesser des gegebenen Kreises rechtwinklig an einander, und ziehe die Hypotenuse, so ist diese der Halbmesser des gesuchten Kreises.

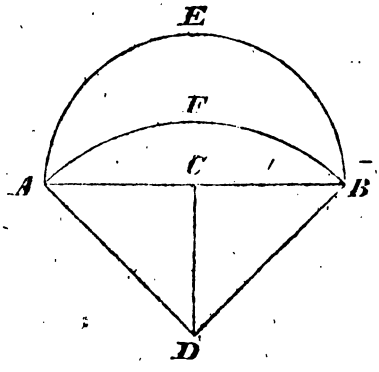
Bew. Man setze die Hypotenuse = ϱ und die Fläche des damit beschriebenen Kreises = A; ferner sey die Fläche des gegebenen Kreises = a und der Halbmesser desselben = r, so ist

$$A : a = \rho^2 : r^2 \quad (181, 3.\ \text{Zus.})$$
$$\text{ferner ist } \rho^2 = 2r^2 \quad (132, 1.\ \text{Zus.})$$
$$\text{also } A : a = 2r^2 : r^2$$
$$= 2 : 1$$
$$\text{und daher } A = 2a.$$

1. Zus. Was in den 4 ersten Zusätzen zu 132 von der Vervielfältigung, Summirung ꝛc. der Quadrate gesagt ist, läßt sich völlig auf Kreise anwenden, wenn man statt Seiten der Quadrate Halbmesser setzt.

2. Zus. Es sey AEB ein Halbkreis, dessen Mittelpunkt C ist, CD = AC senkrecht auf AB, und der Bogen AFB mit AD beschrieben, so ist AEBF = Dr. ABD = AC^2.

Denn der Punkt D liegt in der Peripherie des Kreises um C, und daher ist der Winkel ADB = 1 R. (146, 7. Zus.); folglich der Bogen AFB ein Quadrant. Ferner ist die Fläche des Kreises mit AD noch einmal so groß als die des Kreises mit AC (188.). Folglich ist die Fläche des Quadranten ADBF = der Fläche des Halbkreises AEBC; zieht man daher von beyden das gemeinschaftliche Stück AFBC ab, so bleibt AEBF = Dr. ABD. Es ist aber Dr. ABD = AC . CD = AC^2.



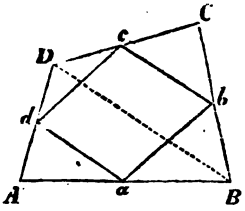
Anmerk. Die Erfindung dieses letztern Satzes wird dem Hippokrates aus Chios beygelegt, und da die zwischen den Bogen AEB und AFB eingeschlossene Figur der Gestalt des Mondes beym Zu- oder Abnehmen ähnlich ist, so heißt sie die *lunula Hippocratis*.

Sechster Abschnitt.

Planimetrische Aufgaben verschiedener Art.

189. Erste Aufg. In ein beliebiges Viereck ABCD ein Parallelogramm zu verzeichnen.

Auflös. Man halbire jede Seite und ziehe durch die Theilungspunkte je zweyer zusammenstoßenden Seiten eine gerade Linie, so entsteht ein Parallelogramm abcd.



Bew. Man ziehe die Diagonale BD. Alsdann ist in dem Dreyeck ABD, weil AB und AD halbirt sind, AB : AD = Aa : Ad; folglich ad || BD (89.). Eben so ist in dem Dreyeck BCD CB : CD = Cb : Cc; folglich bc || BD und daher ad || bc (52.). Auf ähnliche Art läßt sich erweisen, daß, wenn man die Diagonale AC zieht, ab sowohl als dc || AC ist, folglich ab || dc. Also ist abcd ein Parallelogramm.

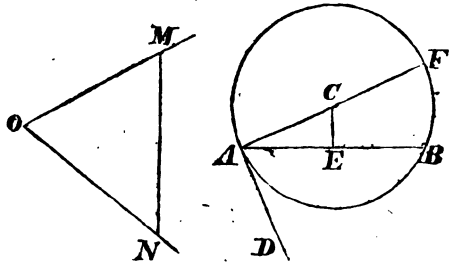
1. Zus. Der Umfang des Parallelogramms abcd ist der Summe der Diagonalen BD und AC gleich.

2. Zus. Der Inhalt des Parallelogramms ist der Hälfte des ganzen Vierecks ABCD gleich.

3. Zus. Anstatt die Seiten des Vierecks zu ren, kann man jede derselben in n gleiche Theile th nimmt man dann auf AB und AD den mten Theil punkt, von A an gerechnet; und eben so auf CB ur von C an gerechnet, und zieht durch diese Punkte Linien, zwischen den zusammenstoßenden Seiten, s steht ebenfalls ein Parallelogramm. Auf dies können unzählige Parallelogramme in Viereck beschrieben werden.

Anmerk. Es ist indessen zu bemerken, daß d schriebene Verfahren nicht das einzig mögliche ist, u rallelogramme in ein Viereck zu verzeichnen; und ist selbst ein Parallelogramm, so ist es leicht, noch ein a Verfahren dafür zu finden.

190. Zweyte Aufg. Ueber einer ge nen geraden Linie, AB, einen Kreis-Abs zu beschreiben, in welchem alle Wink nem gegebenen Winkel a gleich sind.



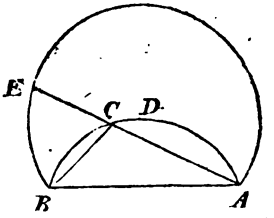
Auflös. 1) Es sey der Winkel MON = a; mache aus einem beliebigen Punkt, M, des einen S kels, mit einer Eröffnung des Zirkels = AB einen S schnitt in N auf dem andern Schenkel, ziehe MN beschreibe einen Kreis um das Dreyeck MON (169.

hält man den verlangten Abschnitt über MN = AB. ieser kann alsdann auf AB übergetragen werden.

2) Soll der Abschnitt unmittelbar über AB verzeich- t werden, so lege man eine Linie AD von beliebiger nge an AB in A, unter einem Winkel BAD = a; er- hte aus A ein Perpendikel AF auf AD, und aus E, der itte von AB, ein Perpendikel EG auf AB; der Durch- nittspunkt C beyder Perpendikel ist der Mittelpunkt s Kreises, der den gesuchten Abschnitt AFB gibt.

Bew. Für Nr. 1. ergibt sich der Beweis unmit- bar aus der Construction. — Nr. 2. betreffend, so AD eine Tangente des Kreises in A (157.), folglich r Winkel BAD den Winkeln des Abschnittes AFB gleich 64.). Es ist aber W. BAD = a (per constr.), folg-) sind die Winkel des Abschnittes AFB = a.

191. Dritte Aufg. Ueber einer gegeben- n geraden Linie AB ein Dreyeck zu be- hreiben, wenn die Summe der beyden an- rn Seiten = s, und der von ihnen einge- hlossene Winkel = a gegeben ist.



Auflös. Man beschreibe über AB einen Kreis-Ab- hnitt ADCB, in welchem die Winkel = a sind (190.) nd aus der Mitte, D, des Bogens ADCB beschreibe an über AB einen zweyten Abschnitt AEB; alsdann urchschneide man aus A, mit einer Eröffnung des Zir- ls AE = s, den äußern Bogen in E, ziehe die Linie E, und aus dem Durchschnittspunkt derselben mit dem

innern Bogen, aus C, die Linie CB, so ist ABC das verlangte Dreyeck.

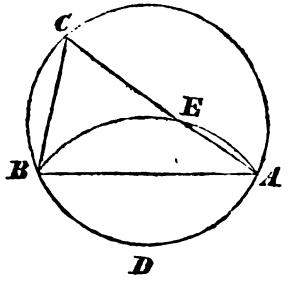
Bew. Da der Winkel ACB ein Winkel des Abschnittes ADCB ist, so ist er (per constr.) = a; ferner ist CE = CB (152.), und AC + CE = s, also ist auch AC + CB = s.

Anmerk. Wäre s dem Durchmesser des Kreises um D gleich, so würde das Dreyeck gleichschenklig und das möglich größte über AB bey dem Winkel a seyn. Wenn also s größer als dieser Durchmesser wäre, so würde das Dreyeck unmöglich seyn.

1. Zus. Kommt es nur darauf an, über AB ein gleichschenkliges Dreyeck, dessen Winkel in der Spitze = a sey, zu beschreiben, so braucht man nur in dem Abschnitte ADCB nach der Mitte seines Bogens, D, aus A und B gerade Linien zu ziehen.

2. Zus. Wäre anstatt des Winkels ACB der Winkel BAC gegeben, so lege man AE = s an AB unter einem Winkel = BAC, ziehe eine gerade Linie von B nach E, und lege BC unter einem Winkel = BEC an BE. Alsdann ist das Dreyeck BEC gleichschenklig, und daher BC = EC, folglich AC + BC = AC + EC = s.

192. Vierte Aufg. Ueber einer gegebenen geraden Linie AB ein Dreyeck zu beschreiben, wenn die Differenz der beyden andern Seiten = d, und der von ihnen eingeschlossene Winkel = a gegeben ist.



Auflös. Man beschreibe über AB einen Kreis-Abschnitt ACB, in welchem alle Winkel = a sind (190.), und vollende den Kreis. Aus der Mitte D des entgegenstehenden Bogens ADB schlage man, mit einer Eröffnung des Zirkels = AD, einen Bogen AEB, und aus A mache man mit dem Halbmesser AE = d einen Durchschnitt in E; darauf ziehe man durch A und E die Linie AC, und von B nach C die Linie BC, so ist ABC das verlangte Dreyeck.

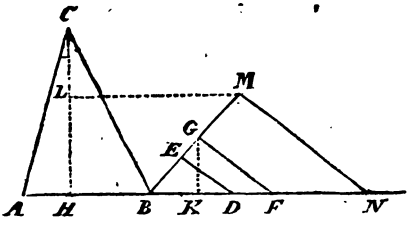
Bew. Da alle Winkel des Abschnittes ACB (per constr.) gleich a sind, so ist auch C = a. Ferner ist BC = EC (152, 2. Zus.), und AE = d; also ist AC — BC = AC — EC = AE = d.

1. Zus. Für d = Null kann man sich vorstellen, es falle der Punkt E mit dem Punkt A zusammen; folglich wird AC zur Tangente in A, ingleichen BC zur Tangente in B, und das Dreyeck ABC gleichschenklig.

2. Zus. Wäre anstatt des Winkels ACB der Winkel BAC gegeben, so lege man AE = d unter einem Winkel = BAC an AB in A, und ziehe eine Linie von B nach E; alsdann verlängere man AE und beschreibe über BE das gleichschenklige Dreyeck BCE; dessen Winkel an der Grundlinie durch die verlängerte AE bestimmt ist.

3. Zus. Wenn dagegen der W. ABC gegeben wäre, so brauchte man nur eine Linie BC von unbestimmter Länge unter diesem Winkel an AB in B zu legen; diese unterhalb B um ein Stück = AE = d zu verlängern; von dem untern Ende derselben nach A eine gerade Linie zu ziehen, und über dieser ein gleichschenkliges Dreyeck, dessen Winkel durch die Lage der rückwärts verlängerten BC gegen die Grundlinie bestimmt ist, zu beschreiben. Dadurch würde man den Punkt C und zugleich das ganze Dreyeck erhalten.

193. Fünfte Aufg. Ein Dreyeck BMN zu verzeichnen, das einem gegebenen, ABC, gleich, und einem andern gegebenen, BDE, ähnlich sey.



Geometr. Auflös. Man setze beyde Dreyecke, ABC und BDE, auf eine gerade Linie neben einander, mache darauf BF = AB, ziehe FG || DE und verlängere BE bis G; alsdann fälle man aus C und G die Perpendikel CH und GK auf AF und suche zwischen beyden Perpendikeln die mittlere Proportionallinie. Dieser mache man LH gleich; durch L ziehe man LM || AF und verlängere BG bis M; endlich ziehe man MN || ED, so ist BMN das verlangte Dreyeck.

Bew. 1) Da MN || ED ist, so ist Dr. BMN ∾ BDE (92.)

2) Es ist Dr. ABC : BFG = CH : GK (117, Zus.)

ferner Dr. BFG : BMN = GK^2 : LH^2 (136, 1. Zus.)

folglich Dr. ABC : BMN = CH . GK : LH^2

Nun ist (per constr.) CH : LH = LH : GK; folglich CH . GK = LH^2, also ist auch Dr. ABC = BMN.

Anmerk. Es ist leicht zu sehen, daß es nicht gerade nothwendig ist, die Dreyecke auf eine gerade Linie neben einander zu stellen; man erhält nur dadurch ein bequemes Mittel, den Punkt M zu bestimmen.

Analyt. Auflös. Es sey die Grundlinie des Drey-

eds ABC = a, seine Höhe = b; die Grundlinie des Dr. BDE = c, und seine Höhe = d; die Grundlinie des gesuchten Dreyecks hingegen sey = x, und seine Höhe = y: so ist

$$ab = xy \text{ und } c : d = x : y$$

folglich $y = (ab) : x$

ingleichen $y = (dx) : c$

also $(ab) : x = (dx) : c$

folglich $abc = dx^2$

und daher $x^2 = \frac{ab}{d} \cdot c$

Um hiernach x durch Construction zu finden, suche man zu d, a und b die vierte Proportionallinie (104.); sie heiße m, so ist $x^2 = mc$, folglich ist $m : x = x : c$ d. h. x ist alsdann die mittlere Proportionallinie zwischen m und c.

Eben so findet sich $y^2 = \frac{ab}{c} d$, woraus man y durch eine ähnliche Construction erhält.

Durch x und y aber ist nur die Größe, nicht die Gestalt des Dreyecks bestimmt. Diese würde sich finden, wenn man an x die Winkel an der Grundlinie des Dr. BDE trüge, wobey die Höhe = y werden müßte.

Zus. Hiernach ist es leicht, ein ungleichseitiges Dreyeck in ein gleichseitiges zu verwandeln.

194. Sechste Aufg. Aus demjenigen Theile der Diagonale eines Quadrats, um welchen sie die Seite desselben übertrifft, die letztre zu finden.

Analyt. Auflös. Es sey der gegebene Theil der Diagonale = a, die Seite = x, also die ganze Diagonale = x + a, so ist

$$(x + a)^2 = 2x^2 \text{ (132, 1. Zus.)}$$

d. i. $x^2 + 2ax + a^2 = 2x^2$

folglich $x^2 - 2ax = a^2$.

Ergänzt man diese Gleichung (Nr. 518. f.), so erhält man

$$x^2 - 2ax + a^2 = 2a^2$$

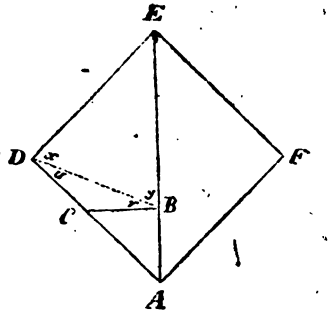
wovon die Wurzel ist

$$x - a = \sqrt{(2a^2)} = a\sqrt{2}$$

also $x = a + a\sqrt{2}$.

Da nun die Seite eines Quadrats sich zu seiner Diagonale verhält wie $1 : \sqrt{2}$ (132, 6. Zus.), so ist $x = a +$ der Diagonale des Quadrats von a.

Geometr. Auflös. Es sey AB das gegebene Stück der Diagonale; man lege BC = AB rechtwinklig daran, ziehe AC und verlängere diese Linie so, daß CD = AB werde; alsdann errichte man DE in D senkrecht auf AD, verlängere AB so weit, daß sie DE in E schneidet, und vollende das Parallelogramm ADEF, so ist es das gesuchte Quadrat.



Bew. Es ist das Dr. ABC ∼ ADE, (da beyde den Winkel bey A gemein haben, und ihre Winkel bey B und D rechte sind.) Da nun ABC per constr. gleichschenklig ist, so ist es auch ADE; folglich ADEF ein Quadrat.

Ferner ziehe man BD, so ist Dr. BDC gleichschenklig; folglich W. r = u; also auch W. x = y und daher BE = ED; also ist AB der Ueberschuß der Diagonale über die Seite des Quadrats.

Anmerk. Aus der Construction zeigt sich auch, daß die Seite AD = AC + CD = a √ 2 + a ist, wie es die obige Rechnung erfordert.

195. Siebente Aufg. Eine gegebene gerade Linie, AB, in zwey Theile zu theilen, so daß der eine derselben die mittlere Proportionallinie zwischen dem andern und der ganzen Linie sey.

Analyt. Auflös. Die gegebene Linie sey = a, und der eine Theil = x, also der andere = a — x, so ist

$$a : x = x : a - x$$

folglich $x^2 = a^2 - ax$

ferner $x^2 + ax = a^2$

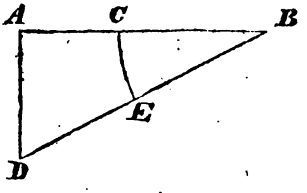
und durch Ergänzung

$$x^2 + ax + \tfrac{1}{4}a^2 = a^2 + \tfrac{1}{4}a^2$$

folglich $x + \tfrac{1}{2}a = \sqrt{(a^2 + \tfrac{1}{4}a^2)}$

also $x = \sqrt{(a^2 + \tfrac{1}{4}a^2)} - \tfrac{1}{2}a$

Um dieses geometrisch zu construiren, lege man AD = ½ AB rechtwinklig an AB in A und ziehe DB, so ist diese Linie = √ (a² + ¼ a²). Man schneide also DE = ½ a von ihr ab, so ist BE = x.

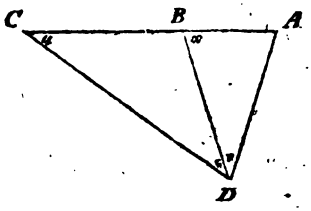


Schlägt man daher aus B mit einer Eröffnung des Zirkels = BE einen Bogen nach AB in C, so wird AB dadurch auf die verlangte Art getheilt, und es ist AC : BC = BC : AB.

196. Achte Aufg. Ein gleichschenkliges Dreyeck zu construiren, dessen Winkel an

der Spitze halb so groß, als jeder an der Grundlinie sey.

Auflös. Man theile eine beliebige Linie AC so, daß AB : BC = BC : AC sey (195.), und construire über einer Linie = BC ein gleichschenkliges Dreyeck, dessen gleiche Seiten = AC sind, so ist solches das verlangte Dreyeck.



Bew. Es sey in dem Dreyeck ACD die Seite DC = AC und AD = BC; man ziehe BD, so ist x = o + u (53, 1. Zus.). Ferner wenn man einen Kreis um DBC beschriebe, so würde AD eine Tangente an demselben in D seyn (165, 1. Zus.); folglich ist r = u (164.); also x = o + r = A; folglich BD = AD = BC; also auch o = u; folglich x = 2u und daher auch A = 2u. Also ist ACD das verlangte Dreyeck.

Anmerk. Auch in dem Dreyeck ABD ist A und x = 2r.

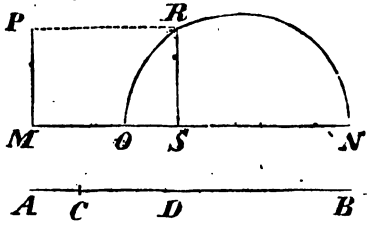
1. Zus. Der Winkel u in der Spitze des Dreyecks ADC ist = $\frac{2}{5}$ R. = 36°.

2. Zus. Da der Centriwinkel des regelmäßigen Zehnecks = 36° ist (173, 2. Zus.), so ist AD die Seite des Zehnecks, wenn AC der Halbmesser des Kreises ist, und es ergibt sich hieraus, wie ein solches Zehneck in einem jeden Kreise verzeichnet werden könne.

3. Zus. Aus dem regelmäßigen Zehneck kann leicht das regelmäßige Fünfeck, ingleichen das Zwanzigeck, Vierzigeck u. s. w. abgeleitet werden.

197. Neunte Aufg. Eine gegebene gerade Linie AB in drey Theile zu theilen, so daß der zweyte die mittlere Proportionallinie zwischen dem ersten und dritten ist.

Geometr. Auflös. Man nehme MN = AB, schneide davon ein beliebiges Stück MO ab, das jedoch nicht größer als ein Drittel von MN seyn darf, und beschreibe über dem übrigen Theil der Linie ON einen Halbkreis. Alsdann errichte man MP = MO senkrecht auf MN, ziehe PR ‖ MN, und RS senkrecht auf MN, so sind OS, RS und SN die 3 gesuchten Theile. Man mache also AC = OS und CD = RS, so ist AC : CD = CD : DB.



Bew. Da RS = MP = MO ist, so ist OS + RS + SN = MN = AB; ferner da (per constr.) AC = OS; CD = RS ist, so ist DB = SN. Nun ist OS : RS = RS : SN (142, 4. Zus.), also ist auch AC : CD = CD : DB.

1. Anmerk. Wird MO = ⅓ MN genommen, so trifft R in die Mitte des Halbkreises; daher auch die andern beyden Theile = ⅓ MN werden. Ist aber MO > ⅓ MN, so trifft die Parallele PR den Halbkreis nicht, folglich ist die Auflösung alsdann unmöglich.

2. Anmerk. Die Aufgabe gehört in die Klasse der unbestimmten, d. h. solcher, welche unzählige Auflösungen zulassen.

Analyt. Auflös. Man nehme drey beliebige

Zahlen, die eine stetige geometrische Proportion bilden, so zeigt die Summe derselben, in wie viel gleiche Theile die ganze Linie getheilt werden müsse, und die einzelne Zahlen bestimmen, wie viel dieser Theile zu jedem der gesuchten Stücke gehören.

Es ist z. B. $1 : 2 = 2 : 4$; man theile daher die ganze Linie in 7 gleiche Theile, und nehme auf das erste Stück 1, auf das zweyte 2, und auf das dritte 4 solcher Theile.

Zus. Wenn nicht nur die ganze Linie, sondern auch der erste Theil als gegeben angesehen wird, so wird die Aufgabe dadurch bestimmt.

Man setze die ganze Linie $= a$, den ersten Theil $= b$, den zweyten $= x$ und den dritten $= y$, so ist

1) $b : x = x : y$ 2) $x + y = a - b$

Aus Nr. 1. erhält man $y = x^2 : b$

— Nr. 2. — — — $y = a - b - x$

folglich $x^2 = ab - b^2 - bx$

ferner $x^2 + bx = ab - b^2$

ergänzt: $x^2 + bx + \frac{1}{4}b^2 = ab - b^2 + \frac{1}{4}b^2$ (Nr. 519.)

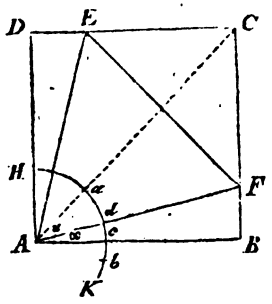
$= ab - \frac{3}{4}b^2$

folglich $x + \frac{1}{2}b = \sqrt{(ab - \frac{3}{4}b^2)} = \sqrt{(a - \frac{3}{4}b)\,b}$

also $x = \sqrt{(a - \frac{3}{4}b)\,b} - \frac{1}{2}b$.

Dieser Ausdruck läßt sich leicht construiren: man braucht nur zwischen $(a - \frac{3}{4}b)$ und b die mittlere Proportionallinie zu suchen, und von dieser $\frac{1}{2}b$ abzuziehen, so erhält man x.

198. Zehnte Aufg. In ein Quadrat ABCD ein gleichseitiges Dreyeck AFE zu beschreiben, so daß die eine Spitze desselben in den einen Winkel des Quadrats, die andern beyden aber in die Seiten desselben fallen.



Geometr. Auflös. Man ziehe die Diagonale AC und beschreibe aus A mit einer beliebigen Eröffnung des Zirkels den Bogen HK von unbestimmter Größe; darauf schneide man aus a mit derselben Eröffnung des Zirkels den Bogen ab ab, und mache cd = cb, so ist d der Punkt, durch welchen die Seite des Dreyecks, AF, gezogen werden muß.

Bew. Es ist leicht zu sehen, daß die Diagonale AC das Dr. AFE und den Winkel EAF halbiren müsse; folglich ist der W. u = 30° und x = 15°; der Bogen ab aber, dessen Sehne dem Halbmesser gleich ist, beträgt 60° (173, 4. Zus.), und da ac, als das Maaß eines halben rechten W., = 45° ist, so ist cb = 15°. Wenn also cd = cb gemacht wird, so ist auch cd = 15°, also das Maaß des Winkels, welchem x gleich seyn soll, und daher d der Punkt, durch welchen AF gehen muß.

Analyt. Auflös. Man setze die Seite des Quadrats = a, die Seite des Dreyecks = x, und CF = CE = y, so ist

$EF^2 = EC^2 + CF^2$ d. i. $x^2 = 2y^2$

$AF^2 = AB^2 + BF^2$ d. i. $x^2 = a^2 + (a - y)^2$

folglich $2y^2 = a^2 + a^2 - 2ay + y^2$

folglich $y^2 + 2ay = 2a^2$

ergänzt: $y^2 + 2ay + a^2 = 3a^2$ (Ar. 519.)
ferner $y + a = \sqrt{(3a^2)}$
also $y = \sqrt{(3a^2)} - a$.

Es findet sich also y, wenn man von der S
nes Quadrats, das dreymal so groß als das gegeb
(132, 2. Zus.) die Seite des gegebenen selbst a
Durch y aber wird der Punkt F, folglich die Se
und das ganze Dreyeck bestimmt.

1. Zus. Da $x^2 = 2y^2$; folglich $x = y\sqrt{}$
so ist $1 : \sqrt{2} = y : x$, und daher x die Diagon
Quadrats von y (132, 6. Zus.), wie man auch a
Figur sehen kann; ferner ist
$x = \sqrt{2} \cdot \sqrt{(3a^2)} - a\sqrt{2} = a\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} - a\sqrt{}$
$a\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)$.

Es ist aber $a\sqrt{2}$ = der Diagonale des Qu
von a (132, 6. Zus.), folglich ergibt sich aus dem
denen Ausdruck für x das Verhältniß der Seite des
ecks sowohl zur Seite des Quadrats, als zur Dia
desselben.

2. Zus. Es ist $BF = a - y = 2a - a$
folglich $\frac{1}{2} BF = a - \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Da aber $BF : \frac{1}{2} I$
$AB : \frac{1}{2} AB$ ist, so drückt $\frac{1}{2} BF$ den senkrechten A
der Mitte von AF über der Mitte von AB aus.
man sich nun ein gleichseitiges Dreyeck über CD
Seite des Quadrats selbst, innerhalb des Quadrat
schrieben, so würde dessen Höhe $= \frac{a\sqrt{3}}{2}$; folgli
Abstand seiner Spitze von der zunächst liegenden
des Quadrats, (von AB), $= a - \frac{a\sqrt{3}}{2} =$
seyn; und da die Spitze eines solchen Dreyecks
senkrecht über der Mitte von AB zu liegen komm
muß sie in die Mitte der Linie AF fallen.

Man kann daher die Lage der Seite AF so

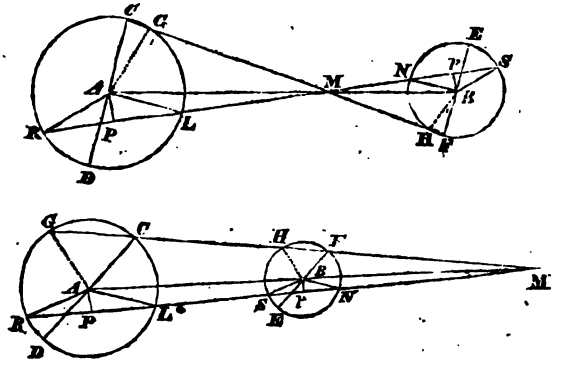
finden, wenn man über CD ein gleichseitiges Dreyeck innerhalb des Quadrats beschreibt und durch dessen Spitze die Linie AF zieht.

Anmerk. Es ist dieses Dreyeck das größte unter allen gleichseitigen, die in das Quadrat verzeichnet werden können, so wie dasjenige das kleinste, dessen Seiten den Seiten des Quadrats selbst gleich sind. Bey dem letztern liegt die Spitze in der Mitte einer Seite des Quadrats, und die ihr gegenüberstehende Seite geht der Seite des Quadrats parallel.

3. Zus. Der Inhalt des kleinsten gleichschenkligen Dreyecks ist $= \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = 0{,}433\, a^2$; der des größten $= (2\sqrt{3} - 3)\, a^2 = 0{,}464\, a^2$.

Anmerk. Das größte Dreyeck im Quadrate überhaupt ist dasjenige, dessen Grundlinie sowohl als Höhe der Seite des Quadrats gleich ist; der Inhalt desselben ist $= \frac{1}{2} a^2$.

199. Eilfte Aufg. Wenn zwey Kreise in einer Ebene gegeben sind, in der geraden Linie AB durch ihre Mittelpunkte den Punkt M zu finden, dessen Lage so beschaffen ist, daß jede gerade Linie, welche durch denselben hindurch geht und die Kreise schneidet, ähnliche Bogen von ihnen abschneidet.



Auflös. Man ziehe durch A und durch B zwey beliebige einander parallele Halbmesser AC und BF, und durch die Endpunkte derselben eine gerade Linie, CF. Der Punkt M, in welchem diese die Linie AB schneidet, ist der gesuchte Punkt.

Es fällt in die Augen, daß hier zwey Fälle möglich sind: entweder liegt der Punkt M zwischen den Mittelpunkten beyder Kreise, oder außerhalb derselben. Im letztern Falle müssen die Linien AB und CF so weit verlängert werden, bis sie sich schneiden. Auch kann man unterscheiden, ob die Kreise einander schneiden, oder nur berühren, oder, wie hier, ganz außerhalb einander liegen. In allen Fällen aber gilt die gegebene Auflösung.

Bew. 1) Die Dreyecke ACM und BFM sind, wie leicht einzusehen ist, einander ähnlich; folglich ist AC : AM = BF : BM, oder AC : BF = AM : BM (Ar. 342, 4.). Da aber alle Halbmesser eines Kreises einander gleich sind, so bleibt der Punkt M immer derselbe, welche Lage im Kreise auch die parallelen Halbmesser haben mögen.

2) Man ziehe AG und BH; die Winkel bey C und F sind einander gleich (51.), folglich auch die Winkel bey G und H (55, 2. Zus.); folglich ist Dr. CAG ∼ HBF, also auch W. CAG = HBF oder der Bogen CG ∼ dem Bogen HF.

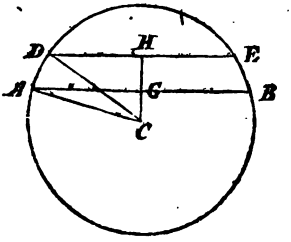
3) Auch jede andere gerade Linie durch M, wie RS oder MR, schneidet ähnliche Bogen ab. Denn man fälle aus A und B die Perpendikel AP und Bp auf RS oder MR, und ziehe AR und AL, ingleichen BS und BN, so ist Dr. APM ∼ BpM (94.); folglich AP : Bp = AM : BM = AR : BS; also auch Dr. APR ∼ BpS (97, Zus.); folglich W. PAR = pBS; mithin W. RAL = SBN (69, 1. Zus.); also der Bogen RDL ∼ dem Bogen SEN.

1. Zus. Wenn die Kreise einander berühren, so liegt der Punkt M, der zwischen A und B fällt, im Berührungspunkt (163.).

2. Zuf. Auch die gemeinschaftlichen Tangenten yder Kreise gehen durch die Punkte M.

3. Zuf. Setzt man die Linie AB = a; AC = R; F = r, und AM = x, so ist $x = \frac{Ra}{R \pm r}$. Das obere ichen im Nenner gilt für den Fall, da M zwischen A d B liegt, das untere für den, da M außerhalb liegt.

200. Zwölfte Aufg. Aus zwey parallelen ehnen eines Kreises, AB und DE, und ih- m Abstande, GH, den Halbmesser des Krei- s zu finden.



Analyt. Auflöf. Es sey C der Mittelpunkt des reises, CH ein Perpendikel auf die Sehnen, und AG = a; DH = b; GH = c; CG = y und der Halb- esser des Kreises = r; man ziehe CA und CD, so ist

1. $CA^2 = AG^2 + CG^2$ d. i. $r^2 = a^2 + y^2$

2. $CD^2 = DH^2 + CH^2$ d. i. $r^2 = b^2 + (y + c)^2$

lglich $a^2 + y^2 = b^2 + (y + c)^2$

$= b^2 + y^2 + 2cy + c^2$

rner $a^2 = b^2 + 2cy + c^2$

lglich $y = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{2c}$.

Setzt man diesen Werth für y in die Gleichung Nr. 1.) erhält man

$$r^2 = a^2 + \left(\frac{a^2 - b^2 - c^2}{2c}\right)^2$$

$$= \frac{4a^2c^2 + (a^2 - b^2 - c^2)^2}{4c^2}$$

folglich $r = \frac{\sqrt{[4a^2c^2 + (a^2 - b^2 - c^2)^2]}}{2c}$.

Zus. Liegt der Mittelpunkt des Kreises zwischen beyden Sehnen, so wird $CH = c - y$, und daher $y = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}$.

Die geometr. Auflösung würde hier sehr leicht seyn; denn man brauchte nur durch die Mitte der einen Sehne, AB, eine Linie CH senkrecht zu ziehen; ferner durch H, in einem Abstande = GH von AB eine Parallele mit AB, und auf dieser HD = HE = der Hälfte der andern Sehne zu machen; so hätte man vier Punkte, A, D, E, B, durch welche der Kreis gehen muß; folglich wäre der Mittelpunkt leicht zu finden (139.).

201. Zu einer weitern Uebung können noch folgende Aufgaben dienen.

1) Aus dem Unterschiede zwischen der Seite eines gleichseitigen Dreyecks und dem Perpendikel aus der Spitze auf die Grundlinie die Seite selbst und das ganze Dreyeck zu finden.

2) In ein gegebenes Dreyeck ein Dreyeck zu beschreiben, das einem andern gegebenen ähnlich sey.

Das eingeschriebene Dreyeck muß mit seinen Winkelspitzen in die Seiten des gegebenen Dreyecks treffen.

3) In einem Dreyeck den Punkt zu finden, welchem drey gerade Linien nach den drey Winkeln gehen, lauter gleiche Winkel um den Punkt herum bilden.

Das Dreyeck darf keinen Winkel enthalten, welcher größer als 120 Grade ist.

4) Ueber einer gegebenen geraden Linie als Hypotenuse ein rechtwinkliges Dreyeck zu construiren, in welchem das Rechteck aus den beyden Katheten dem Quadrat ihrer Differenz gleich sey.

Die Auflösung wird leicht, wenn man dabey das Perpendikel aus der Spitze des rechten Winkels in Betrachtung zieht.

5) Wenn zwey ungleiche Kreise einander schneiden, durch einen ihrer Durchschnittspunkte eine gerade Linie zu ziehen, die von beyden Kreisen ähnliche Bogen abschneidet.

Es sind durch jeden Durchschnittspunkt zwey solche Linien möglich.

6) In den Quadranten eines Kreises einen andern Kreis so zu beschreiben, daß er die beyden Halbmesser und den Bogen berühre.

Es kommt hierbey darauf an, eine gerade Linie in zwey Theile zu theilen, die sich verhalten, wie $1 : \sqrt{2}$, oder den Winkel, welchen die Tangente an der Mitte des Quadranten mit dem einen der beyden, gehörig verlängerten, Halbmesser bildet, zu halbiren.

7) Wenn der Inhalt eines rechtwinkligen Dreyecks und die Summe der beyden Katheten gegeben ist, das Dreyeck zu finden.

8) In einen Kreis ein Rechteck zu verzeichnen, das halb so groß, als das Quadrat im Kreise ist.

9) In einen Kreis ein Rechteck zu verzeichnen, das halb so groß, als das gleichseitige Dreyeck im Kreise ist.

10) Wie verhält sich der Inhalt eines Quadrats zum Inhalt des gleichseitigen Dreyeckes, wenn beyde gleichen Umfang haben? und wie verhalten sich die Umfänge beyder bey gleichem Inhalt?

11) Ein Trapezium durch eine mit den parallelen Seiten desselben parallel laufende Linie zu halbiren.

12) Es sey ein Punkt C zwischen den Schenkeln eines beliebigen Winkels gegeben, man soll durch C eine gerade Linie so zwischen die Schenkel legen, daß sie in C halbirt wird; und dann zeigen, daß das dadurch entstehende Dreyeck unter allen Dreyecken, die eine durch C gezogene Linie mit den Schenkeln des Winkels bildet, das kleinste ist.

Zweyte Abtheilung.

Stereometrie.

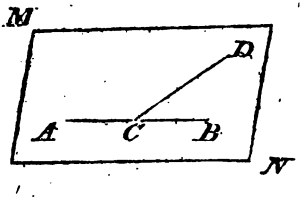
202. Erklär. Der Name der Stereometrie, der so viel als Messung der Körper (solidorum) bedeutet, gibt keinen hinreichenden Begriff von dem Gegenstande dieses Theils der Geometrie. Dieser begreift nicht bloß die Betrachtung der Körper in sich, sondern auch aller andern geometrischen Gegenstände (der Flächen, Linien und Punkte), in so fern sie nicht auf eine einzige Ebene eingeschränkt sind, oder, in einerley Ebene liegen. Kein Körper aber kann ganz in eine Ebene fallen, höchstens kann eine Seite desselben in ihr liegen, und der übrige Theil muß über sie emporragen. Daher gehören die Körper allerdings in diesen Theil der Geometrie, und als ein Hauptgegenstand desselben haben sie ihm den Namen gegeben. Indessen ist es bey der unendlichen Menge möglicher Körper nothwendig, sich auf einige Arten derselben einzuschränken. Wie weit man hierin in der Elementar-Geometrie zu gehen pflegt, wird sich aus dem Folgenden zeigen.

Die Stereometrie ist verhältnißmäßig schwerer als die Planimetrie, da die Verhältnisse der Gegenstände gegen einander mehr zusammengesetzt sind. — Eine besondere Schwierigkeit entsteht für den Anfänger noch daraus, daß man die stereometrischen Figuren in eine Ebene zu verzeichnen genöthigt ist. Ein kleiner Apparat, der nur sehr ein-

ach zu seyn braucht, kann daher zur Erläuterung des Vortrags sehr nützlich seyn.

203. Erklär. Eine Ebene durch eine Linie legen, eißt sie so legen, daß die Linie ganz in sie hinein fällt.

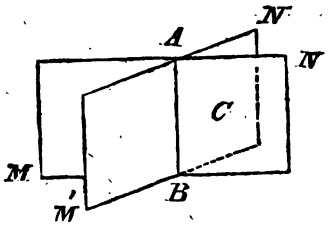
204. Lehrs. Wenn eine gerade Linie, AB, um Theil in eine Ebene, MN, fällt, so liegt ie ganz in derselben.



Bew. Gesetzt, sie läge nicht ganz darin, sondern Theil, CD, läge außerhalb, so verlängere man AC der Ebene bis B; alsdann hätte man zwey gerade Linien, AB und AD, die zum Theil zusammenfielen, zum heil von einander wichen, welches unmöglich ist (46.). lglich kann CD nicht von CB verschieden seyn.

Zus. Auch eine Ebene liegt ganz in einer andern, nn sie zum Theil mit ihr zusammenfällt.

205. Lehrs. Durch jede drey Punkte ist möglich eine Ebene zu legen.



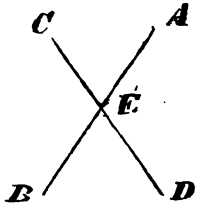
Bew. Entweder liegen die drey Punkte in einer raden Linie, oder nicht. Im ersten Fall hat man die bene nur durch die gerade Linie zu legen.

Im zweyten Fall setze man, die drey Punkte wären A, B und C; man verbinde 2 derselben, A und B, durch eine gerade Linie, AB, und lege durch dieselbe die Ebene, MN, die man sich von unbestimmter Ausdehnung zu denken hat. Alsdann drehe man MN um AB herum, so geräth die Ebene in unendlich verschiedene Lagen, dergleichen eine M′ N′ andeutet, folglich muß sie auch einmal auf den Punkt C treffen, und dann liegen alle drey Punkte in ihr.

1. Zus. Es ist nur eine einzige Lage, in welcher die Ebene, die durch AB gelegt ist, in den Punkt C trifft. Daher bestimmen 3 Punkte, die nicht in einer geraden Linie liegen, die Lage einer Ebene.

Anmerk. Man gibt daher den Garten-Tischen und Stühlen, ingleichen den Stativen der Meß-Instrumente gerne 3 Füße, weil diese auf dem ungleichen Boden immer in drey Punkte treffen müssen, die in einer Ebene liegen, wodurch das Wackeln dieser Geräthschaften verhindert wird.

2. Zus. Zwey gerade Linien, AB, CD, die einander schneiden, liegen in einer Ebene. Denn drey Punkte, A, E, C, liegen in einer Ebene; also ein Theil von jeder Linie; folglich fallen die ganzen Linien in dieselbe (204.).



3. Zus. Wenn durch zwey gerade Linien, die einander schneiden, eine Ebene gelegt wird, so ist die Lage der Ebene dadurch bestimmt.

206. Erklär. Zwey Ebenen sind einander pa-

rallel, wenn sie, so weit sie sich auch ausdehnen, nie zusammentreffen; sie sind nicht parallel, wenn sie entweder wirklich zusammenstoßen, oder bey hinreichender Vergrößerung zusammentreffen würden. Gehen sie noch über die Linie des Zusammentreffens hinaus, so schneiden sie einander.

Zus. Dieselben Ausdrücke lassen sich auch von der Lage einer geraden Linie gegen eine von ihr verschiedene Ebene gebrauchen.

207. Lehrs. Wenn zwey Ebenen einander schneiden, so ist die Durchschnittslinie eine gerade.

Bew. Schnitten sie einander in einer krummen Linie, so könnte man darin drey Punkte annehmen, die nicht in einer geraden Linie lägen, und durch diese gingen zwey Ebenen von verschiedener Lage, welches unmöglich ist (205, 1. Zus.).

Zus. Zwey Ebenen, die einander schneiden, haben außer der Durchschnittslinie keinen Punkt mit einander gemein.

208. Erklär. Errichtet man aus irgend einem Punkt der Durchschnittslinie zweyer sich schneidenden Ebenen in jeder derselben ein Perpendikel auf die Durchschnittslinie, so heißt der Winkel, den beyde Perpendikel mit einander bilden, der Neigungswinkel der Ebenen.

Ist der Neigungswinkel ein rechter, so stehen die Ebenen senkrecht auf einander.

Daß es einerley ist, aus welchem Punkt der Durchschnittslinie die Perpendikel auf dieselbe errichtet werden, erhellet aus dem weiter unten (229.) folgenden Satze.

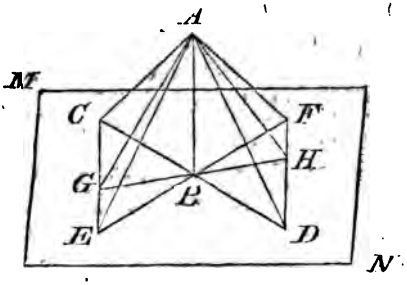
209. Erklär. Eine Linie steht auf einer Ebene senkrecht, wenn sie mit allen Linien in der Ebene, die durch den Durchschnittspunkt gehen, rechte Winkel macht.

1. Zus. In einem bestimmten Punkt einer Ebene *ist nur ein einziges* Perpendikel auf dieselbe möglich.

2. Zus. Von einem bestimmten Punkt außerhalb einer Ebene ist nur ein einziges Perpendikel auf dieselbe möglich.

210. Erklär. Wenn eine Linie, die auf eine Ebene trifft, nicht senkrecht auf derselben steht, so heißt der kleinste unter allen Winkeln, welche sie mit den Linien in der Ebene, die durch den Durchschnittspunkt gehen, bildet, ihr Neigungswinkel.

211. Lehrs. Wenn eine gerade Linie auf zwey Linien in einer Ebene, die einander schneiden, senkrecht steht, so steht sie auf der ganzen Ebene senkrecht.



Bew. Es sey AB senkrecht auf CD und EF, so ist sie auch auf jeder andern Linie, GH, die in der Ebene, MN, durch den Punkt B geht, senkrecht.

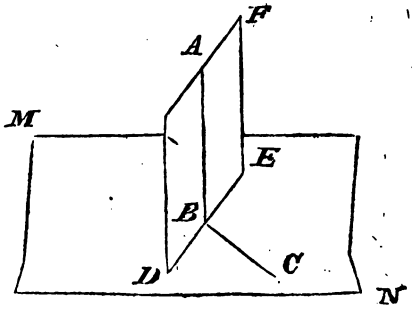
Man mache CB = BD, EB = BF, und ziehe CE und FD, so ist

1) Dr. EBC = DBF (55.)
folglich CE = DF
ingleichen Winkel ECB = BDF
da nun auch Winkel CBG = DBH
und CB = BD ist
so ist 2) Dr. BGC = BDH
folglich BG = BH
und CG = DH.

Man ziehe ferner AC, AG, AE, und AF, AH, AD, so ist

3) Dr. ABC = ABD
und Dr. ABE = ABF } (55)
folglich AC = AD
und AE = AF
Es war aber auch CE = DF (Nr. 1.)
folglich ist 4) Dr. ACE = ADF
also auch Winkel ACG = ADH
Nun war AC = AD (Nr. 3.)
und CG = DH (Nr. 2.)
also ist 5) Dr. AGC = AHD
folglich AG = AH
und da BG = BH (Nr. 2.)
und AB = AB ist,
so ist endlich 6) Dr. ABG = ABH
folglich auch Winkel ABG = ABH,
und daher jeder = 1 R. (27.); folglich ist AB senkrecht auf GH; und da GH die Stelle einer jeden andern Linie durch B vertritt, so ist AB auf der ganzen Ebene MN senkrecht.

212. Lehrs. Wenn man durch eine Linie, die auf einer Ebene senkrecht steht, eine andere Ebene legt, so steht diese auf der erstern gleichfalls senkrecht.

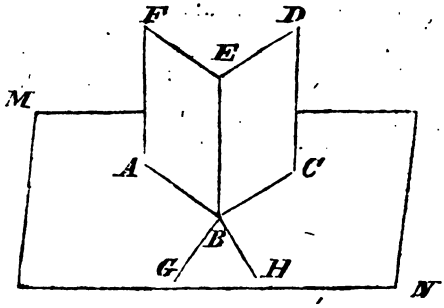


Bew. Es sey AB senkrecht auf der Ebene MN; man lege durch AB die Ebene FD, welche MN in DE schneidet, und ziehe BC senkrecht auf DE, so ist ABC der Neigungswinkel der Ebenen (208.). Da nun AB auf MN senkrecht ist, so ist ABG = 1 R.; folglich FD senkrecht auf MN.

1. Zus. Wenn eine Ebene auf einer andern senkrecht steht, und man zieht in der einen ein Perpendikel auf die Durchschnittslinie, so steht dieses auf der ganzen andern Ebene senkrecht.

2. Zus. Durch DE kann, außer der Ebene FD, keine andere auf MN senkrecht stehen, weil sonst in dem Punkt B zwey verschiedene Perpendikel auf die Ebene MN gehen würden, welches unmöglich ist (209, 1. Zus.).

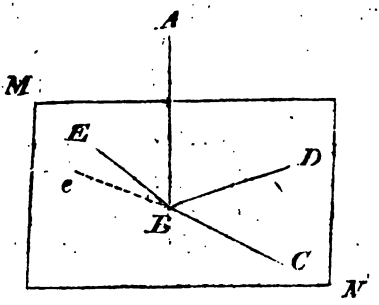
213. Lehrs. Wenn zwey Ebenen, BF und BD, die einander schneiden, auf einer dritten, MN, senkrecht stehen, so steht die Durchschnittslinie, EB, jener beyden auf MN senkrecht.



Bew. Man ziehe in der Ebene MN aus B sowohl die Linie BG senkrecht auf die Durchschnittslinie AB der Ebenen BF und MN; als auch die Linie BH senkrecht auf

die Durchschnittslinie BC der Ebenen BD und MN; so ist BG auf der Ebene BF, und BH auf der Ebene BD senkrecht (212, 1. Zus.); folglich sind beyde Linien auf EB senkrecht; folglich ist auch EB auf BG und BH senkrecht, und daher auch auf der ganzen Ebene MN senkrecht (211.).

214. Lehrs. Wenn eine Linie auf mehrern andern, die aus einem Punkte gehen, zugleich senkrecht steht, so liegen diese alle in einer und eben derselben Ebene.



Bew. Es sey AB auf BC, BD, BE senkrecht, man lege durch BC und BD die Ebene MN (205.). Gesetzt nun, BE fiele nicht zugleich in diese Ebene, so lege man durch ABE eine andere Ebene, welche die Ebene MN in Be schneidet. Alsdann ist der Winkel ABe = 1 R., weil AB auf MN senkrecht ist (211.); es ist aber auch ABE = 1 R. (per hypoth.), und daher ABe = ABE, welches unmöglich ist (39, 6.). Folglich muß BE in die Ebene MN fallen.

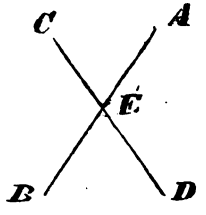
215. Lehrs. Zwey Linien, AB und CD, sind einander parallel, wenn sie auf derselben Ebene, MN, senkrecht stehen.

Im zweyten Fall setze man, die drey Punkte wären A, B und C; man verbinde 2 derselben, A und B, durch eine gerade Linie, AB, und lege durch dieselbe die Ebene, MN, die man sich von unbestimmter Ausdehnung zu denken hat. Alsdann drehe man MN um AB herum, so geräth die Ebene in unendlich verschiedene Lagen, dergleichen eine M′ N′ andeutet, folglich muß sie auch einmal auf den Punkt C treffen, und dann liegen alle drey Punkte in ihr.

1. Zus. Es ist nur eine einzige Lage, in welcher die Ebene, die durch AB gelegt ist, in den Punkt C trifft. Daher bestimmen 3 Punkte, die nicht in einer geraden Linie liegen, die Lage einer Ebene.

Anmerk. Man gibt daher den Garten-Tischen und Stühlen, ingleichen den Stativen der Meß-Instrumente gerne 3 Füße, weil diese auf dem ungleichen Boden immer in drey Punkte treffen müssen, die in einer Ebene liegen, wodurch das Wackeln dieser Geräthschaften verhindert wird.

2. Zus. Zwey gerade Linien, AB, CD, die einander schneiden, liegen in einer Ebene. Denn drey Punkte, A, E, C, liegen in einer Ebene; also ein Theil von jeder Linie; folglich fallen die ganzen Linien in dieselbe (204.).



3. Zus. Wenn durch zwey gerade Linien, die einander schneiden, eine Ebene gelegt wird, so ist die Lage der Ebene dadurch bestimmt.

206. Erklär. Zwey Ebenen sind einander pa-

rallel, wenn sie, so weit sie sich auch ausdehnen, nie zusammentreffen; sie sind nicht parallel, wenn sie entweder wirklich zusammenstoßen, oder bey hinreichender Vergrößerung zusammentreffen würden. Gehen sie noch über die Linie des Zusammentreffens hinaus, so schneiden sie einander.

Zus. Dieselben Ausdrücke lassen sich auch von der Lage einer geraden Linie gegen eine von ihr verschiedene Ebene gebrauchen.

207. Lehrs. Wenn zwey Ebenen einander schneiden, so ist die Durchschnittslinie eine gerade.

Bew. Schnitten sie einander in einer krummen Linie, so könnte man darin drey Punkte annehmen, die nicht in einer geraden Linie lägen, und durch diese gingen zwey Ebenen von verschiedener Lage, welches unmöglich ist (205, 1. Zus.).

Zus. Zwey Ebenen, die einander schneiden, haben außer der Durchschnittslinie keinen Punkt mit einander gemein.

208. Erklär. Errichtet man aus irgend einem Punkt der Durchschnittslinie zweyer sich schneidenden Ebenen in jeder derselben ein Perpendikel auf die Durchschnittslinie, so heißt der Winkel, den beyde Perpendikel mit einander bilden, der Neigungswinkel der Ebenen.

Ist der Neigungswinkel ein rechter, so stehen die Ebenen senkrecht auf einander.

Daß es einerley ist, aus welchem Punkt der Durchschnittslinie die Perpendikel auf dieselbe errichtet werden, erhellet aus dem weiter unten (229.) folgenden Satze.

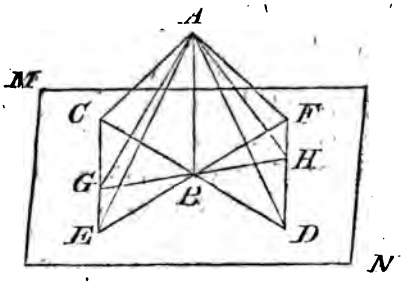
209. Erklär. Eine Linie steht auf einer Ebene senkrecht, wenn sie mit allen Linien in der Ebene, die durch den Durchschnittspunkt gehen, rechte Winkel macht.

1. Zus. In einem bestimmten Punkt einer Ebene *ist nur ein einziges* Perpendikel auf dieselbe möglich.

2. Zuſ. Von einem beſtimmten Punkt außerh einer Ebene iſt nur ein einziges Perpendikel auf dieſe möglich.

210. Erklär. Wenn eine Linie, die auf eine E ne trifft, nicht ſenkrecht auf derſelben ſteht, ſo heißt kleinſte unter allen Winkeln, welche ſie mit den Linien der Ebene, die durch den Durchſchnittspunkt gehen, bet, ihr Neigungswinkel.

211. Lehrſ. Wenn eine gerade Linie a zwey Linien in einer Ebene, die einand ſchneiden, ſenkrecht ſteht, ſo ſteht ſie auf d ganzen Ebene ſenkrecht.



Bew. Es ſey AB ſenkrecht auf CD und EF, iſt ſie auch auf jeder andern Linie, GH, die in der E ne, MN, durch den Punkt B geht, ſenkrecht.

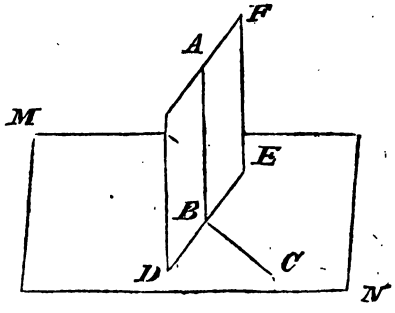
Man mache CB = BD, EB = BF, und ziehe und FD, ſo iſt

1) Dr. EBC = DBF (55.)
folglich CE = DF
ingleichen Winkel ECB = BDF
da nun auch Winkel CBG = DBH
und CB = BD iſt
ſo iſt 2) Dr. BGC = BDH
folglich BG = BH
und CG = DH.

Man ziehe ferner AC, AG, AE, und AF, AH, AD, so ist

3) Dr. ABC = ABD
und Dr. ABE = ABF } (55)
folglich AC = AD
und AE = AF
Es war aber auch CE = DF (Nr. 1.)
folglich ist 4) Dr. ACE = ADF
also auch Winkel ACG = ADH
Nun war AC = AD (Nr. 3.)
und CG = DH (Nr. 2.)
also ist 5) Dr. AGC = AHD
folglich AG = AH
und da BG = BH (Nr. 2.)
und AB = AB ist,
so ist endlich 6) Dr. ABG = ABH
folglich auch Winkel ABG = ABH,
und daher jeder = 1 R. (27.); folglich ist AB senkrecht auf GH; und da GH die Stelle einer jeden andern Linie durch B vertritt, so ist AB auf der ganzen Ebene MN senkrecht.

212. Lehrs. Wenn man durch eine Linie, die auf einer Ebene senkrecht steht, eine andere Ebene legt, so steht diese auf der erstern gleichfalls senkrecht.

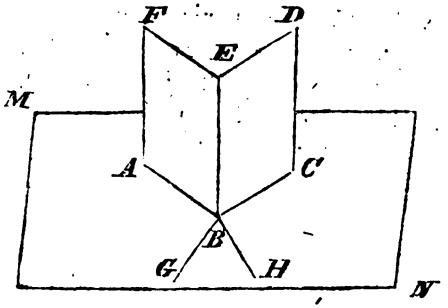


Bew. Es sey AB senkrecht auf der Ebene MN; man lege durch AB die Ebene FD, welche MN in DE schneidet, und ziehe BC senkrecht auf DE, so ist ABC der Neigungswinkel der Ebenen (208.). Da nun AB auf MN senkrecht ist, so ist ABG = 1 R.; folglich FD senkrecht auf MN.

1. Zus. Wenn eine Ebene auf einer andern senkrecht steht, und man zieht in der einen ein Perpendikel auf die Durchschnittslinie, so steht dieses auf der ganzen andern Ebene senkrecht.

2. Zus. Durch DE kann, außer der Ebene FD, keine andere auf MN senkrecht stehen, weil sonst in dem Punkt B zwey verschiedene Perpendikel auf die Ebene MN gehen würden, welches unmöglich ist (209, 1. Zus.).

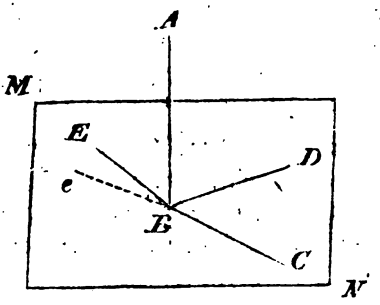
213. Lehrs. Wenn zwey Ebenen, BF und BD, die einander schneiden, auf einer dritten, MN, senkrecht stehen, so steht die Durchschnittslinie, EB, jener beyden auf MN senkrecht.



Bew. Man ziehe in der Ebene MN aus B sowohl die Linie BG senkrecht auf die Durchschnittslinie AB der Ebenen BF und MN; als auch die Linie BH senkrecht auf

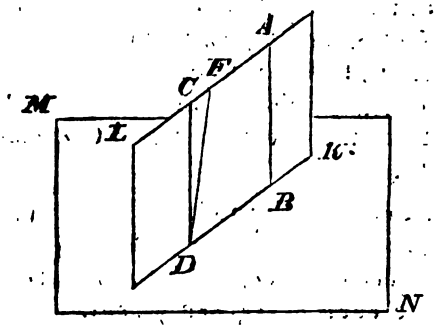
die Durchschnittslinie BC der Ebenen BD und MN; so ist BG auf der Ebene BF, und BH auf der Ebene BD senkrecht (212, 1. Zus.); folglich sind beyde Linien auf EB senkrecht; folglich ist auch EB auf BG und BH senkrecht, und daher auch auf der ganzen Ebene MN senkrecht (211.).

214. Lehrs. Wenn eine Linie auf mehrern andern, die aus einem Punkte gehen, zugleich senkrecht steht, so liegen diese alle in einer und eben derselben Ebene.



Bew. Es sey AB auf BC, BD, BE senkrecht, man lege durch BC und BD die Ebene MN (205.). Gesetzt nun, BE fiele nicht zugleich in diese Ebene, so lege man durch ABE eine andere Ebene, welche die Ebene MN in Be schneidet. Alsdann ist der Winkel ABe = 1 R., weil AB auf MN senkrecht ist (211.); es ist aber auch ABE = 1 R. (per hypoth.), und daher ABe = ABE, welches unmöglich ist (39, 6.). Folglich muß BE in die Ebene MN fallen.

215. Lehrs. Zwey Linien, AB und CD, sind einander parallel, wenn sie auf derselben Ebene, MN, senkrecht stehen.



Bew. Man ziehe BD, so ist Winkel ABD = CDB = 1 R. (209.); folglich ABD + CDB = 2 R.; folglich ist AB || CD, wenn gezeigt werden kann, daß beyde in einerley Ebene liegen.

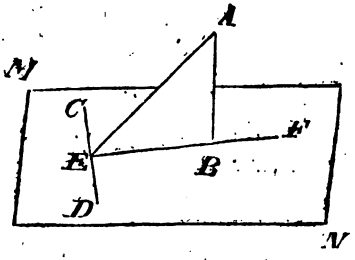
Um dieses zu beweisen, lege man durch A, B und D eine Ebene, KL; diese steht auf MN senkrecht (212.). Gesetzt nun, CD fiele nicht in diese Ebene, so ziehe man in derselben aus D die Linie DF senkrecht auf DK; alsdann ist DF auf der Ebene MN senkrecht (212, 1. Zus.). Nun ist auch CD senkrecht auf MN (per hypoth.); also wären in dem Punkt D zwey verschiedene Perpendikel auf MN — welches unmöglich ist (209, 1. Zus.). Folglich kann CD von DF nicht verschieden seyn, und liegt also mit AB in einerley Ebene; folglich ist AB || CD.

216. Lehrs. Wenn von zwey Parallelen, AB und CD, (m. s. d. vorherg. Fig.) die eine, AB, senkrecht auf der Ebene, MN, steht, so steht auch die andere senkrecht auf derselben.

Bew. Man lege durch AB und CD eine Ebene, KL, so steht diese senkrecht auf MN (212.) und der Winkel ABD ist = 1 R. (209.); folglich ist auch CDB = 1 R. (51.); folglich steht CD senkrecht auf MN (212, 1. Zus.).

217. Aufg. Von einem Punkt, A, außer-

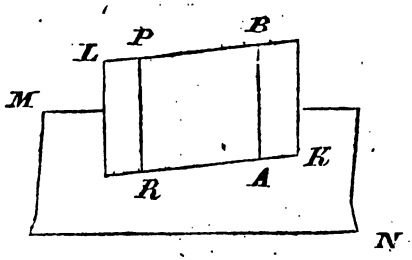
halb der Ebene, MN, ein Perpendikel auf die Ebene zu fällen.



Auflös. Man ziehe in der Ebene MN eine beliebige Linie, CD; durch ACD denke man sich eine andere Ebene gelegt, und in derselben sey AE senkrecht auf CD gezogen; ferner sey EF in der Ebene MN senkrecht auf CD; endlich werde durch AEF eine Ebene gelegt und in dieser AB senkrecht auf EF gezogen, so ist diese das verlangte Perpendikel.

Bew. Da CD auf AE und EF senkrecht ist, so ist sie auf der Ebene durch AEF senkrecht; folglich ist auch MN auf der Ebene durch AEF senkrecht (212.). Da nun AB auf EF, als der Durchschnittslinie beyder Ebenen, senkrecht ist, so steht sie auf der ganzen Ebene MN senkrecht (212, 1. Zus.).

218. Aufg. Aus einem Punkt, A, in der Ebene, MN, ein Perpendikel auf die Ebene zu errichten.

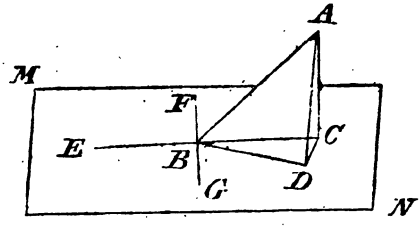


Auflöſ. Man nehme einen beliebigen Punkt, P, außerhalb der Ebene, MN, fälle von dieſem ein Perpendikel, PR, auf MN (217.), lege durch PRA eine Ebene, KL, und ziehe in dieſer AB ‖ PR, ſo iſt AB das verlangte Perpendikel.

Der Beweis erhellet aus 216.

Zuſ. Um auf einer Ebene, MN, eine andere, KL, in einer gegebenen Linie, KR, ſenkrecht zu errichten, errichte man aus einem beliebigen Punkt, A, der Linie, KR, ein Perpendikel, AB, auf MN, und lege durch dieſes und die Linie KR die Ebene KL (212.).

219. Aufg. Den Neigungswinkel, ABC, der Linie AB gegen die Ebene MN zu finden.



Auflöſ. Man fälle von irgend einem Punkt, A, der Linie AB ein Perpendikel, AC, auf MN (217.), und ziehe BC, ſo iſt ABC der geſuchte Neigungswinkel.

Bew. Soll ABC der Neigungswinkel der Linie AB ſeyn, ſo muß er unter allen Winkeln, welche AB mit Linien, die in der Ebene MN durch B gezogen werden können, macht, der kleinſte ſeyn (210.). Man ziehe alſo irgend eine andere Linie BD, mache BD = BC, und ziehe CD und AD, ſo iſt ACD ein rechtwinkliges Dreyeck (209.) und AD die Hypotenuſe; folglich

$$AD > AC$$

Da nun BD = BC

und AB = AB iſt,

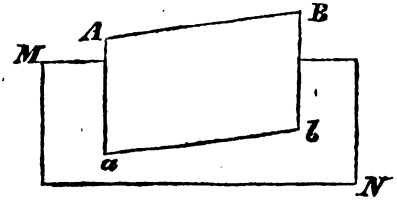
ſo iſt Winkel ABD > ABC (66.).

Ein jeder Winkel also, wie ABD ist > ABC; folglich ist dieser der kleinste unter allen, und daher der Neigungswinkel.

1. Zus. Ist ABC der kleinste unter allen Winkeln, die AB mit den Linien in der Ebene MN macht, so ist der Winkel ABE, den sie mit der verlängerten BC macht, der größte unter allen; denn er ist der Nebenwinkel des kleinsten.

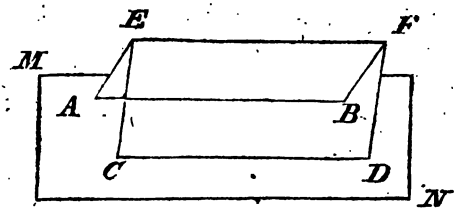
2. Zus. Wenn man in der Ebene MN durch B ein Perpendikel FG auf EC zieht, so ist ABF = ABG = 1 R. Und alle Linien, die in der Ebene MN durch B gehen und mit BC einen Winkel machen, der < 1 R. ist, machen auch mit AB einen Winkel, der < 1 R. ist. Hingegen machen die Linien, die mit BC einen stumpfen Winkel machen, auch mit AB einen solchen.

220. Lehrs. **Eine Linie ist einer Ebene parallel, wenn sie nur mit einer einzigen Linie in derselben parallel läuft.**



Bew. In der Ebene MN sey ab der Linie AB außerhalb derselben parallel. Man lege durch beyde Linien eine Ebene, Ab, so schneiden Ab und MN einander in ab, und haben außer dieser Linie keinen Punkt mit einander gemein (207, Zus.); folglich kann die Linie AB nirgends mit MN zusammentreffen; folglich ist AB || MN.

221. Lehrs. **Wenn zwey Linien AB und CD in der Ebene MN einer dritten, EF, außerhalb MN parallel sind, so sind sie einander *selbst parallel*.**



Bew. Man lege durch AB und EF eine Ebene AF, und durch CD und EF eine andere Ebene CF, so schneiden diese beyden Ebenen einander in EF, und haben außer dieser Linie keinen Punkt mit einander gemein (207, Zus.); folglich kann die Linie AB in keinem Punkt mit der Linie CD zusammen treffen; sie sind also, da sie überdieß in derselben Ebene, MN, liegen, einander parallel (19.).

Anm. Man vergleiche mit diesem Satz den obigen in 52.

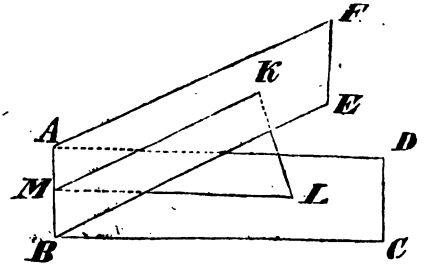
1. Zus. Wenn zwey gerade Linien, AB und CD, einer dritten EF parallel laufen, so liegen jene beyden in einerley Ebene. Denn eine Ebene durch AB und den Punkt C gelegt, hat mit der Ebene AF, außer der Durchschnittslinie AB, keinen Punkt weiter gemein. Fiele nun CD nicht in diese Ebene, so sey eine andere Linie CD', welche CD in C durchschnitte, die Durchschnittslinie zwischen ihr und der Ebene CF. Diese Linie könnte, da CD ‖ EF ist, nicht auch parallel EF seyn, und müßte diese in irgend einem Punkt treffen. Alsdann hätte die durch ABC gelegte Ebene, außer AB, noch einen Punkt mit der Ebene AF gemein, welches unmöglich ist. Folglich kann auch CD' nicht von CD verschieden seyn.

2. Zus. Folglich sind überhaupt zwey gerade Linien, welche irgend einer dritten parallel laufen, unter einander selbst parallel.

3. Zus. In der Ebene AF könnten unzählige gerade Linien unzähligen andern in der Ebene CF parallel laufen, ohne daß die Ebenen selbst einander parallel wären.

222. Lehrs. Wenn zwey Ebenen einander

chneiden, so kann eine gerade Linie nicht uf beyden zugleich senkrecht stehen.



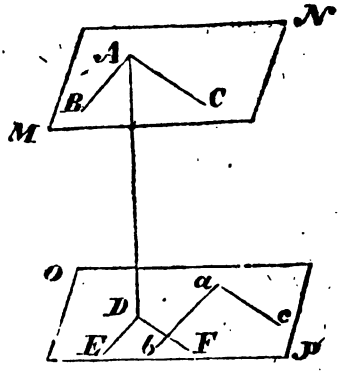
Bew. Es sey KL eine Linie zwischen den Ebenen C und AE, die einander in AB schneiden. Man ziehe ch irgend einem Punkt, M, der Durchschnittslinie die nien KM und LM, so bilden diese mit KL ein Dreyeck. tände nun KL auf beyden Ebenen senkrecht, so müß- 1 die Winkel bey K und L jeder = 1 R. seyn, wel- s unmöglich ist (52, 5. Zus.); folglich kann auch KL ht auf beyden Ebenen senkrecht seyn.

1. Zus. Wenn eine gerade Linie auf zwey Ebenen gleich senkrecht steht, so sind die Ebenen parallel.

2. Zus. Wenn eine gerade Linie zwischen zwey rallelen Ebenen auf einer derselben senkrecht steht, so ht sie auch auf der andern senkrecht.

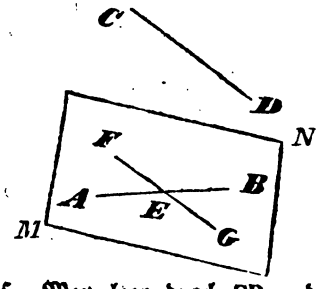
3. Zus. Wenn eine Ebene zwischen zwey paralle- 1 Ebenen auf einer derselben senkrecht steht, so steht auch auf der andern senkrecht; denn man kann sich rstellen, als wäre sie durch ein Perpendikel zwischen yden Ebenen gelegt (212.).

223. Lehrs. Wenn in der Ebene MN zwey :rade Linien, AB, AC, die einander schnei- :n, zweyen Linien, ab, ac, in einer andern bene, OP, parallel laufen — nämlich AB ab, AC ‖ ac — so sind die ganzen Ebenen, N und OP, einander parallel.



Bew. Man errichte aus A ein Perpendikel auf die Ebene MN, welches die andere Ebene in D treffe; durch D ziehe man in der Ebene OP die Linie DE ‖ ab, und DF ‖ ac; so ist auch DE ‖ AB, und DF ‖ AC (221, 2. Zuſ.); folglich iſt AD auch auf DE und DF ſenkrecht (48.), folglich ſenkrecht auf OP (211.); folglich iſt MN ‖ OP (222, 1. Zuſ.).

224. Aufg. Durch eine gerade Linie AB eine Ebene MN ſo zu legen, daß ſie einer andern geraden Linie CD, außerhalb der Ebene, parallel werde.



Auflöſ. Man lege durch CD und irgend einen Punkt E der Linie AB eine Ebene, und in dieſer ziehe man durch den Punkt E eine Linie FG ‖ CD; alsdann

eben die ſich ſchneidenden Linien, AB und FG, die age der geſuchten Ebene MN (205, 3. Zuſ.).

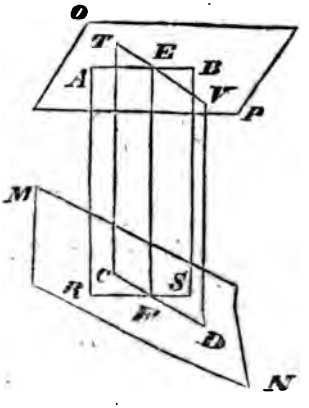
Bew. Da die Linie CD der Linie FG in der Ebene N parallel läuft (per constr.), ſo iſt ſie der ganzen bene parallel (220.).

1. Zuſ. Durch jede zwey gerade Linien, AB und D, die nicht in einerley Ebene fallen, laſſen ſich zwey benen legen, welche einander parallel laufen.

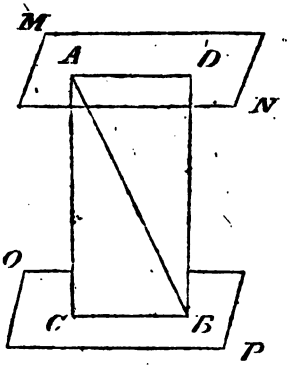
Denn ſo wie MN ‖ CD iſt, ſo lege man durch CD ne Ebene parallel AB; dann laufen zwey Linien, die nander ſchneiden, in der einen Ebene, zweyen Linien der andern parallel, folglich ſind die ganzen Ebe- n einander parallel (223.).

2. Zuſ. Für zwey gerade Linien, wie AB und CD, e nicht in einerley Ebene fallen, gibt es nur eine ein- ge Lage, in welcher die durch dieſelben gelegten Ebe- n einander parallel laufen. Denn die Lage einer jeden durch zwey einander ſchneidende Linien beſtimmt.

225. Aufg. Zwiſchen zwey geraden Linien, B und CD, die nicht in einerley Ebene liegen, nd von unbeſtimmter Länge ſind, die Lage rjenigen geraden Linie, EF, zu beſtimmen, elche auf beyden zugleich ſenkrecht ſteht.



228. Lehrſ. Jede gerade Linie, AB, zwiſchen zwey parallelen Ebenen, MN und OP, macht mit beyden gleiche Neigungswinkel.



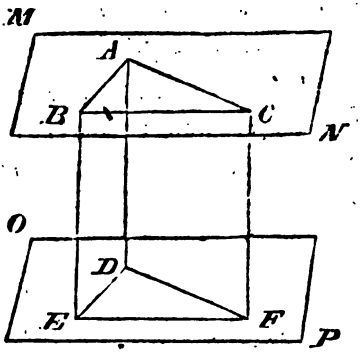
Bew. Man fälle von A ein Perpendikel, AC, auf OP, und lege durch ACB eine Ebene, ſo iſt ABC der Neigungswinkel von AB gegen OP (219.).

Ferner ziehe man in der Ebene durch ACB eine Linie BD || AC, ſo iſt auch BD ſenkrecht auf OP (216.), folglich auch ſenkrecht auf MN (222, 2. Zuſ.) und daher BAD der Neigungswinkel von AB gegen MN.

Endlich iſt CB || AD (227.) und daher Winkel ABC = BAD.

Zuſ. Die Neigungswinkel einer geraden Linie gegen zwey parallele Ebenen liegen in einerley Ebene.

229. Lehrſ. Wenn in den parallelen Ebenen MN und OP die Winkel BAC und EDF ſo beſchaffen ſind, daß AB || DE und AC || DF iſt, ſo ſind die Winkel einander gleich.



Bew. Man mache AB = DE, AC = DF, und he BC, und EF, ſo läßt ſich zeigen, daß das Dr. BC = DEF ſey.

Denn man ziehe die Linien BE, AD und CF, ſo iſt wohl ABED, als ACFD ein Parallelogramm (83.), lglich BE ∥ AD, ingleichen CF ∥ AD; folglich BE ∥ (39, 8. und 221.), und daher BC = EF. Da nun ch AB = DE, AC = DF (per constr.) iſt, ſo iſt Dr. BC = DEF (57.), und daher Winkel BAC = EDF.

Zuſ. Hieraus folgt, daß es gleichgültig iſt, an elcher Stelle der Durchſchnittslinie zweyer Ebenen die erpendikel zur Beſtimmung des Neigungswinkels gezo= n werden, da alle Perpendikel in einer Ebene auf eine rade Linie einander parallel laufen. (Vergl. oben 208.).

230. Erklär. Wenn mehr als zwey gerade Li= en, von denen nicht mehr als je zwey in derſelben bene liegen, in einen Punkt zuſammentreffen, ſo bil= n ſie einen körperlichen Winkel oder eine Ecke ngulus solidus).

So viele Linien ſich zur Bildung eines körperlichen inkels vereinigen, ſo viele ebene Winkel entſtehen, die ſammen den körperlichen einſchließen.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Nun ist } OAF + OAB > FAB\\ \text{ingleichen } OBA + OBC > ABC\end{array}\right\} (231.)$$

u. s. w. in jedem der übrigen körperlichen Winkel C, D, E, F ist die Summe der beyden Winkel an den Grundlinien der Dreyecke, deren Spitzen in O liegen, größer, als der daran stoßende Winkel der Dreyecke im Sechseck.

Folglich ist die Summe aller Winkel an den Grundlinien der Dreyecke, deren Spitzen in O liegen, größer, als die Summe der daran stoßenden Winkel von den Dreyecken im Sechseck.

Also muß dafür die Summe der Winkel um O kleiner als die Summe der Winkel um S seyn; weil im Ganzen die Summe der Winkel in den Dreyecken, die nach O hingehen, und in denen, die im Sechsecke liegen, gleich ist.

Nun sind aber die Winkel um $S = 4$ R. (42, 5. Zus.); folglich sind die Winkel um $O < 4$ R.

233. Erklär. Regelmäßige oder reguläre Körper heißen solche, die von lauter gleichen und regelmäßigen Vielecken eingeschlossen sind. Es gibt fünf Arten derselben: das Tetraedrum, das Hexaedrum oder der Würfel, das Octaedrum, das Dodekaedrum und das Ikosaedrum.

1. Anmerk. Aus der in 232 erwiesenen Eigenschaft des körperlichen Winkels läßt sich darthun, warum nicht mehrere Arten solcher Körper möglich sind. Betrachtet man nehmlich 1) das regelmäßige Dreyeck, so ist der Polygon-Winkel desselben = 60°. Wird also der körperliche Winkel

a) von drey solchen ebenen Winkeln gebildet, so machen diese zusammen 180°. Dieß geschieht beym Tetraedrum.

b) Vier solche Winkel machen 240°. Dergleichen enthält das Octaedrum.

c) Fünf solche Winkel machen 300°. Diese finden sich im Ikosaedrum.

Sechs solche Winkel aber würden 360° = 4 R. ausma-

chen, und ein solcher körperlicher Winkel ist unmöglich. Daher auch kein regelmäßiger Körper möglich ist, in welchem die Winkel von 6 regelmäßigen Dreyecken zusammenstießen.

2) Der Polygon-Winkel des regelmäßigen Vierecks ist = 90°.

Drey solche Winkel machen den körperlichen Winkel des Heraedrums.

Vier dergleichen betragen 4 R. und können also keinen körperlichen Winkel bilden.

3) Der Polygon-Winkel des regelmäßigen Fünfecks ist = 108°.

Drey solche machen zusammen 324°. Dieß ist der Winkel des Dodekaedrums.

Vier solche Winkel würden mehr als 4 R. betragen; können also unmöglich einen körperlichen Winkel bilden.

4) Der Polygon-Winkel des regelmäßigen Sechseckes ist = 120°; folglich machen drey derselben schon 360°, welches mehr ist, als ein körperlicher Winkel enthalten kann. Folglich kann kein regelmäßiger Körper durch das Sechseck gebildet werden, also noch weniger durch Polygone von mehr als 6 Seiten.

2. Anmerk. Die Seitenflächen der regelmäßigen Körper lassen sich in einer Ebene zusammenhängend verzeichnen, und man nennt die dadurch entstehenden Figuren die Netze dieser Körper.

3. Anmerk. Da von den regelmäßigen Körpern heutzutage eben kein besonderer Gebrauch in der Mathematik gemacht wird, so kann die weitere Betrachtung derselben hier übergangen werden. Nur der Würfel macht eine Ausnahme, von dem auch weiter unten noch ein mehreres.

234. Erklär. Prismatische Körper oder Prismen heißen Körper, die von zwey gleichen und parallelen Vielecken als Grundflächen, und von lauter Parallelogrammen als Seitenflächen eingeschlossen werden. Der Abstand ihrer Grundflächen von einander, der durch ein Perpendikel zwischen beyden gemessen wird, heißt ihre Höhe.

1. Zus. Man kann sich vorstellen, ein Prisma

entstehe, wenn ein Vieleck sich in gerader Linie, sich selbst parallel, fortbewegt.

2. Zus. Ein Prisma ist ein Körper von durchgehends gleicher Dicke.

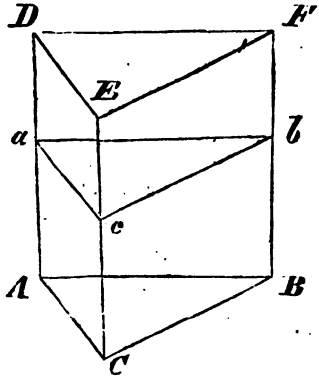
3. Zus. Die Prismen lassen sich in gerade und schiefe eintheilen, je nachdem die Seitenflächen auf den Grundflächen senkrecht oder schief stehen.

4. Zus. Die Prismen werden nach der Anzahl ihrer Seitenflächen in dreyseitige, vierseitige u. s. w. unterschieden.

5. Zus. Sind die Grundflächen eines Prisma's Parallelogrammen, so sind die gegenüberstehenden Seitenflächen einander parallel, und das Prisma heißt ein Parallelepipedum d. i. parallelseitiger Körper.

6. Zus. Der Würfel (cubus) ist ein Parallelepipedum, dessen Seiten und Grundflächen lauter gleiche Quadrate sind.

235. Lehrs. Wenn ein Prisma parallel mit der Grundfläche durchschnitten wird, so ist der Durchschnitt der Grundfläche gleich.



Bew. Es sey das Prisma ABE in abc parallel mit der Grundfläche durchschnitten, so ist ab || AB (227.),

folglich auch ab = AB (77, 1. Zuſ.). Eben ſo zeigt ſich, daß auch die übrigen Seiten des Durchſchnittes den übrigen Seiten der Grundfläche gleich ſind.

Ferner iſt auch der Winkel bac = BAC (229.) u. ſ. f. auch die übrigen Winkel des Durchſchnittes = den übrigen Winkeln der Grundfläche.

Folglich iſt der Durchſchnitt abc = ABC.

236. Lehrſ. In einem jeden Prisma iſt die Summe der Neigungswinkel der Seitenflächen gegen einander der Summe der Winkel der Grundfläche gleich.

Bew. I. Iſt das Prisma ein gerades, ſo kann jeder Winkel der Grundfläche ſelbſt als der Neigungswinkel der in ihm zuſammenſtoßenden Seitenflächen angeſehen werden. Denn da die Seitenflächen auf der Grundfläche ſenkrecht ſtehen, ſo ſteht die Durchſchnittslinie je zweyer Seitenflächen auf der Ebene der Grundfläche ſenkrecht, folglich auch auf den beyden Schenkeln des Winkels; alſo bilden dieſe den Neigungswinkel der beyden Seitenflächen. Folglich iſt die Summe der Neigungswinkel der Seitenflächen der Summe der Winkel der Grundfläche gleich.

II. Iſt das Prisma ein ſchiefes, ſo kann es durch eine Ebene ſo durchſchnitten werden, daß die Seitenflächen auf der Durchſchnittsebene ſenkrecht ſtehen, ohne daß ihre Neigungswinkel gegen einander ſich ändern; und dann ſind dieſe, wie bey dem geraden Prisma, den Winkeln der Figur des Durchſchnittes gleich. Die Figur des Durchſchnittes aber hat eben ſo viele Seitenlinien, als die Figur der Grundfläche; folglich iſt auch die Summe ihrer Winkel der Summe der Winkel der Grundfläche gleich (85, 1. Zuſ.); alſo iſt auch die Summe der Neigungswinkel der Seitenflächen der Summe der Winkel der Grundfläche gleich.

Zuſ. In einem Prisma von n Seiten iſt die Summe der Neigungswinkel der Seitenflächen = (2n — 4) rechten Winkeln.

237. Lehrſ. In einem jeden Prisma iſt die Summe der Neigungswinkel, welche beyde Grundflächen mit den Seitenflächen bilden, noch einmal ſo viel rechten Winkeln gleich, als das Prisma Seitenflächen hat.

Bew. Eine jede Seitenfläche kann, nebſt den beyden Grundflächen durch eine vierte Ebene ſo durchſchnitten werden, daß dieſe auf jenen drey Flächen ſenkrecht ſteht. Alsdann geben die Durchſchnittslinien dieſer Ebene mit den drey erſtern nicht nur die Neigungswinkel der beyden Grundflächen gegen dieſe Seitenfläche, ſondern dieſe Neigungswinkel erſcheinen auch als die innern Winkel zweyer parallelen Linien, die von einer dritten Linie geſchnitten werden, und ſind folglich gleich 2 R. Die Neigungswinkel einer jeden Seitenfläche mit den beyden Grundflächen ſind alſo = 2 R. Folglich beträgt die Summe der Neigungswinkel aller Seitenflächen gegen die Grundflächen noch einmal ſo viel rechte Winkel, als das Prisma Seitenflächen hat.

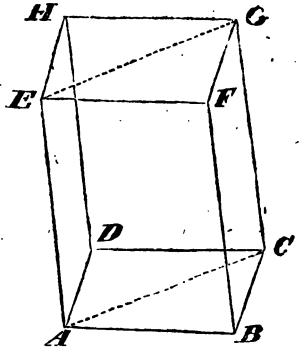
Um eine Seitenfläche nebſt den beyden Grundflächen mit einer Ebene ſenkrecht zu durchſchneiden, braucht man nur die Ebene gegen die Seitenlinie der Grundfläche ſenkrecht zu richten.

238. Grundſatz: Körper von gleichen Grundflächen und gleicher Höhe ſind gleich, wenn ihre den Grundflächen parallelen Durchſchnitte, in gleicher Höhe genommen, durchgehends einander gleich ſind.

239. Lehrſatz. Prismen von gleichen Grundflächen und gleicher Höhe ſind einander gleich.

Bew. Jeder Durchschnitt eines Prisma's, der parallel mit der Grundfläche geht, ist der Grundfläche gleich; sind also die Grundflächen zweyer oder mehrerer Prismen einander gleich, so sind es auch alle ihre Durchschnitte; folglich sind die Prismen selbst, bey gleicher Höhe, einander gleich (238.).

1. Zus. Ein Parallelepipedum, ACEG, wird durch eine Ebene, welche man durch die parallelen Diagonalen, AC und EG, beyder Grundflächen legt, in zwey gleiche Theile getheilt.



2. Zus. Zieht man in beyden Diagonal-Ebenen die Diagonallinien, so ist die Summe der Quadrate der letztern der Summe der Quadrate der 12 Linien gleich, welche die Seitenflächen und Grundflächen des Parallelepipedums einschließen (135.).

240. Lehrs. Prismen von gleicher Höhe verhalten sich wie ihre Grundflächen.

Bew. Man setze ein Prisma = P, seine Grundfläche = G, und seine Höhe = H. Ein anderes Prisma sey = p, seine Grundfläche = g, und seine Höhe ebenfalls = H.

Ferner werde sowohl G als g durch einerley Maaß,

das man so klein annehmen kann, als man will, gemessen. Man nenne dieses Maaß (das etwa ein Quadrat oder Dreyeck seyn kann) a, und setze

$$G = m\,a$$
$$g = n\,a$$
$$\text{so ist } G : g = m\,a : n\,a \quad (\text{Ar. } 341.)$$
$$= m : n \quad (\text{Ar. } 342, 3.).$$

Zwischen je zwey solchen Theilchen = a, von welchen das eine in der obern, das andere in der untern Grundfläche dieser Prismen liegt, fällt ein Theil des Prisma's selbst. Denkt man sich also die einander correspondirenden Theilchen in beyden Grundflächen mit ihren gleichen Seiten einander parallel, so kann man durch die parallelen Seiten Ebenen legen, und dadurch jedes Prisma in so viel kleinere Prismen zertheilen, als jede seiner Grundflächen Theilchen = a enthält.

Diese kleinern Prismen müssen alle einander gleich seyn, da sie gleiche Grundflächen (= a) und gleiche Höhe (= H) haben. Nennt man also ein solches kleineres Prisma α, so ist

$$P = m\,\alpha$$
$$\text{und } p = n\,\alpha$$
$$\text{folglich } P : p = m\,\alpha : n\,\alpha$$
$$= m : n$$
$$\text{Es war aber auch } G : g = m : n$$
$$\text{daher ist } P : p = G : g$$

Anmerk. Dadurch, daß man a so klein annehmen kann, als man will, zeigt sich die Gültigkeit des Satzes auch für den Fall, wo das Verhältniß von G : g irrational ist. Man vergl. oben 116. und 88.

241. Lehrs. Prismen von gleichen Grundflächen verhalten sich wie ihre Höhen.

Bew. Durch ähnliche Schlüsse, wie im vorhergehenden Satze, läßt sich zeigen, daß, wenn die Höhen

zweyer solcher Prismen H und h sind, und mit einerley Maaß gemessen werden,

$$H : h = m : n$$

sey; daß sich ferner die Prismen, das eine in m, das andere in n gleiche Prismen zertheilen lassen, und daher auch

$$P : p = m : n$$

folglich $P : p = H : h$

sey.

242. Lehrs. Prismen von ungleichen Grundflächen und ungleichen Höhen sind in zusammengesetztem Verhältniß ihrer Grundflächen und Höhen, oder, verhalten sich wie die Grundflächen multiplizirt mit den Höhen.

Bew. Man setze auf ähnliche Art wie oben in 118.

1) ein Pr. $= P$, seine Grundfl. $= G$, seine Höhe $= H$
2) ein 2. Pr. $= \pi$, — — — $= g$, — — $= H$
3) ein 3. Pr. $= p$, — — — $= g$, — — $= h$

so ist

$$P : \pi = G : g \quad (240.)$$

und $\pi : p = H : h$ (241.)

folglich $P : p = GH : gh$ (Ar. 349.).

Anmerk. Auch hier findet eine ähnliche Bemerkung wie oben (118.) statt, nehmlich, daß eine Grundfläche und Höhe an und für sich nicht zusammen multiplizirt werden können, zumal da sie ganz verschiedenartige Größen sind. Man muß sich also hier, wo es nur auf das gegenseitige Verhältniß der Größen ankommt, 1) ein Paar unbenannte Zahlen denken, durch welche das Verhältniß der Grundflächen, $G : g$, ausgedrückt wird; 2) ein Paar andere, welche das Verhältniß der Höhen, $H : h$, bezeichnen. Diese Zahlen so zusammen multiplizirt, wie es die obige Proportion darstellt, drücken das Verhältniß der Prismen, $P : p$, aus. Es sey z. B.

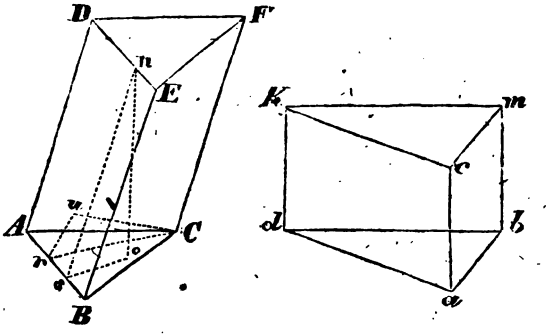
$G = 24$ □Zll, $g = 15$ □Zll, so ist $G : g = 24 : 15$
ferner $H = 20$ Zll, $h = 8$ Zll, so ist $H : h = 20 : 8$

und hiernach P : p = 24 . 20 : 15 . 8 = 480 : 120; folglich P = $\frac{480}{120}$. p = 4p.

Zuſ. Prismen ſind gleich, wenn die Produkte ihrer Grundflächen und Höhen gleich ſind, d. i. wenn ihre Grundflächen ſich umgekehrt wie ihre Höhen verhalten.

Dieß gibt ein Mittel, unzählige Prismen von gleichem Inhalt, bey ungleichen Grundflächen und ungleichen Höhen zu verfertigen.

243. Ein dreyſeitiges Prisma, ABCE, iſt einem andern dreyſeitigen Prisma, welches durch P bezeichnet werde, gleich, deſſen Grundfläche = ABD, der Hälfte der Seitenfläche ABED des erſtern, und deſſen Höhe dem ſenkrechten Abſtand der Seitenlinie FC von der gegenüberliegenden Seitenfläche ABED iſt.



Bew. Man betrachte AB = a als Grundlinie der Grundfläche ABC, und ſetze die Höhe derſelben oder das Perpendikel von C auf AB = p; ferner ſey no = h der Höhe des Prisma's gleich, ſo drückt $\frac{ap}{2}$. h das Produkt der Grundfläche und Höhe des Prisma's ABCE aus.

Alsdann denke man ſich durch no eine Ebene ſo ge-

legt, daß ihre Durchschnittslinie os mit der Grundfläche, ABC, auf AB senkrecht steht, so ist auch ihre Durchschnittslinie ns mit der Seitenfläche, ABED, auf AB senkrecht (212. u. 212, 1. Zus.); folglich ist nso der Neigungswinkel der Seitenfläche ABED gegen die Grundfläche ABC, und zugleich ns die Höhe des Parallelogramms ABED. Es ist also das Dreyeck ABD $= \frac{AB \cdot ns}{2} = \frac{a \cdot ns}{2}$.

Fällt man darauf aus C ein Perpendikel Cu auf ABED, so ist dieses der Höhe des Prisma's P gleich. Durch Cu kann wiederum eine Ebene so gelegt werden, daß ihre Durchschnittslinie ur mit ABED auf AB senkrecht steht; dann ist auch die Durchschnittslinie Cr, aus demselben Grunde wie vorhin ns, auf AB senkrecht, und daher Cr = p und Cru = dem Neigungswinkel der Seitenfläche ABED gegen die Grundfläche ABC oder Cru = nso. Folglich ist das Dr. nos $\sim$ Cur; und ns : no = Cr : Cu d. i. ns : h = p : Cu; also Cu $= \frac{h \cdot p}{ns}$.

Das Produkt der Grundfläche und Höhe des Prisma's P ist hiernach = ABD . Cu $= \frac{a \cdot ns}{2} \cdot \frac{p \cdot h}{ns} = \frac{ap}{2} h$. Dieses letztre aber war auch das Produkt der Grundfläche und Höhe des Prisma's ABCE; folglich ist ABCE = P (242, Zus.).

Anmerk. Das Prisma P ist in der Figur abdc noch besonders dargestellt.

244. Erklär. Auf den obigen Satz (242.) gründet sich die Ausmessung der Prismen, und mit ihr die Ausmessung der Körper überhaupt. Zum Maaße der Körper hat man den Würfel gewählt, und man nennt ihn einen Cubikfuß, einen Cubikzoll, eine Cubikmeile ꝛc., je nachdem die Seite desselben ein Fuß, ein *Zoll, eine Meile* ꝛc. ist.

245. Aufg. Ein Prisma auszumessen.

Auflös. Man suche den Inhalt der Grundfläche in einem Quadratmaaße (124.); mit der Seite des Quadrats messe man die Höhe des Prisma's, und multiplizire die gefundene Anzahl beyder Maaße zusammen, so gibt das Produkt den Inhalt des Prisma's in Cubikmaaßen.

Bew. Um ein Prisma auszumessen, muß man seine Größe mit der Größe eines Würfels, der zum Maaße angenommen wird, vergleichen (244.). Es sey das Prisma = P, seine Grundfl. = G, seine Höhe = H u. d. Würf. = C, — — — = g, — — = h so ist P : C = GH : gh (242.). Allein um das Verhältniß der Grundflächen, G : g, zu finden, muß man beyde mit einerley Maaß messen. Die Grundfläche des Würfels ist ein Quadrat. Nimmt man dieses zur Einheit und mißt damit die Grundfläche des Prisma's — welche m solche Quadrate enthalten mag — so ist G : g = m : 1.

Ferner ist die Seite des Quadrats der Höhe des Würfels gleich. Nimmt man also diese zum Maaße für die Höhen beyder Körper an, und ist die Höhe des Prisma's n mal so groß als die des Würfels, so ist

H : h = n : 1.

Also GH : gh = mn : 1;

folglich P : C = mn : 1, und daher P = mnC.

Anmerk. Von dieser Art der Messung gilt zum Theil dasselbe, was oben (120, Anmerk.) von der Ausmessung der Parallelogramme gesagt ist. Es ist so wenig als jene eine unmittelbare, sondern eine mittelbare Messung; nehmlich: das Verhältniß des auszumessenden Körpers zu dem, welcher als Maaßstab dienen soll, wird nicht unmittelbar durch Vergleichung beyder, sondern durch Rechnung gefunden; und nur die Data zur Rechnung werden unmittelbar durch Messung bestimmt.

Man braucht daher auch zu einer solchen Messung nicht den Würfel selbst, der als Maaß angenommen wird, sondern nur die Seite desselben, da diese auch zur Auffindung des Quadrat-Inhalts der Grundfläche hinreichend ist. Zur Seite des Würfels aber wird das gewöhnliche Längenmaaß genommen.

Derselbe Maaßstab kann also zur Ausmessung der Linien, Flächen und Körper dienen; für jeden dieser Fälle aber wird das gesuchte Resultat durch ihn auf eine andere Art gefunden.

1. Zus. Ist das auszumessende Prisma selbst wieder ein Würfel (K), so verhält sich seine Grundfläche (G) zu der Grundfläche des Würfels (C), der als Maaß angenommen wird, wie die Quadrate der Seiten. Bezeichnet man also diese Seiten durch S und s, so ist $G : g = S^2 : s^2$. Und die Höhen verhalten sich auch wie diese Seiten. Also ist $K : C = S^3 : s^3$.

Ueberhaupt verhalten sich zwey Würfel zu einander, wie die arithmetischen Würfel der Zahlen, welche das Verhältniß ihrer Seiten ausdrücken.

Man braucht daher, um einen Würfel auszumessen, nur eine Seite desselben mit einem Längenmaaß zu messen, und von der Zahl der Maaße den arithmetischen Würfel zu machen.

1. Hieraus ergibt sich der Grund von der Benennung eines Würfels in der Arithmetik.

2. Auch erhellet hieraus, daß man bey der Verwandlung irgend einer Anzahl Cubikmaaße einer Art in Cubikmaaße einer andern Art nicht vergessen darf, das Verhältniß dieser Maaße durch die arithmetischen Würfel der Zahlen auszudrücken, welche das Verhältniß ihrer Seiten bestimmen. Verhält sich z. B. der Pariser Fuß zum Rheinländ. $= m : n$, so sind x Pariser Cubikfuße $= \frac{m^3}{n^3} x$ Rheinländ. Cubikfußen.

2. Zus. Hieraus erklärt sich ferner die Eintheilung der Cubikmaaße. Enthält die Seite eines Würfels

m Maaße der kleinern Art, so enthält der Würfel m^3 Cubikmaaße der kleinern Art.

Hat z. B. ein Fuß 12 Zolle, so hat der Cubikfuß 12^3, d. i. 1728 Cubikzolle.

246. Erklär. Aehnliche Prismen sind Prismen, deren Grundflächen ähnliche Figuren sind, deren Seitenflächen gegen die Grundflächen einerley Neigung haben, und deren Höhen sich wie gleichnamige Seiten der Grundflächen verhalten.

247. Lehrs. Aehnliche Prismen verhalten sich wie die Würfel gleichnamiger Seiten ihrer Grundflächen.

Bew. Man bezeichne zwey ähnliche Prismen durch P und p, ihre Grundflächen durch G und g, ein Paar gleichnamige Seiten derselben durch A und a, und ihre Höhen durch H und h, so ist

1) $P : p = GH : gh$ (242.)
2) $G : g = A^2 : a^2$ (137.)
3) $H : h = A : a$ (246.)

Aus 2 und 3 ist 4) $GH : gh = A^3 : a^3$ (Ar. 346.)
u. aus 1 u. 4 5) $P : p = A^3 : a^3$ (Ar. 345.).

1. Zus. Aehnliche Prismen verhalten sich auch zu einander, wie die Würfel ihrer Höhen.

2. Zus. Gleichnamige Seiten sowohl, als die Höhen ähnlicher Prismen verhalten sich wie die Cubikwurzeln aus den Zahlen, welche das Verhältniß der Prismen selbst ausdrücken.

Anmerk. Wollte man ein Prisma construiren, das einem gegebenen ähnlich und noch einmal so groß als dasselbe wäre, so müßten sich ihre gleichnamigen Seiten $= 1 : \sqrt[3]{2}$ verhalten. Mit dieser Aufgabe haben sich die alten Mathematiker, bey denen sie unter dem Namen der Aufgabe von der Verdoppelung des Würfels berühmt war, viel beschäftigt. Man nannte sie auch das Delische Problem (problema deliacum), und machte das Orakel des Apolls zu

Delos zum Urheber derselben. Sie hängt mit einer andern Aufgabe sehr genau zusammen, nehmlich mit der Aufgabe: zu zwey gegebenen geraden Linien zwey stetig proportionirte mittlere zu finden. Beyde aber lassen sich vermittelst der geraden Linie und des Kreises allein so wenig auflösen, als die Aufgabe von der Theilung eines Winkels oder Bogens in 3 gleiche Theile. Eine Geschichte dieses Problems, worin vornehmlich die Bemühungen der Alten darüber mit vieler Einsicht dargestellt sind, hat Reimer unter dem Titel: Historia Problematis de Cubi Duplicatione sive de inveniendis duabus mediis continue proportionalibus inter duas datas. Gotting. 1798. 8. geliefert.

248. Erklär. Ein Cylinder oder eine Walze ist ein Körper, der von zwey gleichen und parallelen Kreisen als Grundflächen, und einer einzigen krummen Seitenfläche eingeschlossen ist. Die letztre ist so beschaffen, daß man von allen Punkten der Peripherie der einen Grundfläche nach der Peripherie der andern gerade Linien ziehen kann, die ganz in die Oberfläche fallen.

Der Abstand beyder Grundflächen von einander bestimmt die Höhe des Cylinders.

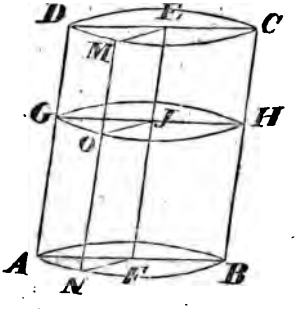
Die gerade Linie von dem Mittelpunkt der einen Grundfläche nach dem Mittelpunkt der andern heißt die Achse des Cylinders.

1. Zus. Steht die Achse senkrecht auf den Grundflächen, so heißt der Cylinder ein gerader, ist sie geneigt gegen dieselben, so heißt er ein schiefer Cylinder.

2. Zus. Man kann die Entstehung eines Cylinders auf ähnliche Art wie die eines Prisma's annehmen: indem sich ein Kreis in gerader Linie sich selbst parallel fortbewegt. — Die Entstehung des geraden Cylinders kann man auch durch Umdrehung eines rechtwinkligen Parallelogramms um seine eine Seite erklären.

3. Zus. Der Cylinder ist, wie das Prisma, ein Körper von durchgehends gleicher Dicke, und gehört mit *diesem nur zu einer* und ebenderselben Klasse von Körpern.

249. Lehrs. Wenn ein Cylinder parallel mit der Grundfläche durchschnitten wird, so ist der Durchschnitt der Grundfläche gleich.



Bew. Es sey ABCD ein Cylinder, EF die Achse desselben, und GH ein der Grundfläche paralleler Durchschnitt; man denke sich eine Ebene durch die Achse gelegt, welche die Seitenfläche in AD und BC durchschneidet, so ist AD ∥ EF; und BC ∥ EF (83.). Ferner ist die Linie AB ∥ der Linie GH (227.), folglich ist AF = GJ, BF = HJ (77, 1. Zus.). Da nun AF = BF ist, so ist auch GJ = HJ.

Bringt man darauf die durch die Achse gelegte Ebene in irgend eine andere Richtung, so daß sie die Seitenfläche, z. B. in MN, schneidet, so zeigt sich auf ähnliche Art, wie vorhin, daß FN = JO ist. Es ist aber FN = AF = GJ; folglich ist auch JO = GJ.

Da die Lage von JO willkührlich ist, so sind alle Linien, die von J nach der Peripherie des Durchschnitts GH gehen, unter einander sowohl, als der Linie AF gleich, folglich ist der Durchschnitt nicht nur ein Kreis, sondern auch der Grundfläche gleich.

Anmerk. Wird ein Cylinder schief gegen die Grundfläche durchschnitten, so ist der Durchschnitt eine Ellipse. Doch gibt es bey dem schiefen Cylinder auch einen schiefen Durchschnitt, der ein Kreis ist (sectio subcontraria).

250. Lehrs. Ein Cylinder ist einem Prisma von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe gleich.

Bew. Die Durchschnitte eines Prisma's, die der Grundfläche parallel gemacht werden, sind der Grundfläche gleich; dasselbe gilt vom Cylinder. Sind also die Grundflächen beyder Körper einander gleich, so sind es auch ihre Durchschnitte in gleicher Höhe; folglich sind die ganzen Körper einander gleich (238.).

Hierdurch zeigt sich eigentlich, daß Cylinder und Prisma einerley Klasse von Körpern gehören.

1. Zus. Der Inhalt eines Cylinders wird daher allenfalls in Cubikmaaß gefunden, wenn man seine Grundfläche mit der Höhe multiplizirt (245.). — Setzt man den Halbmesser der Grundfläche = r, die Höhe des Cyl. = h, so ist der Inhalt des Cylind. = $r^2 \pi h$.

2. Zus. Cylinder von gleichen Grundflächen und gleicher Höhe haben gleichen Inhalt.

3. Zus. Cylinder von gleichen Grundflächen und ungleichen Höhen verhalten sich wie ihre Höhen. Man bezeichne ein Paar Cyl. durch C und c, ihre Höhen durch H und h, den Halbmesser ihrer Grundfläche durch r, so ist

$$C = r^2 \pi H$$
$$c = r^2 \pi h$$
$$\text{folglich } C : c = r^2 \pi H : r^2 \pi h$$
$$= H : h.$$

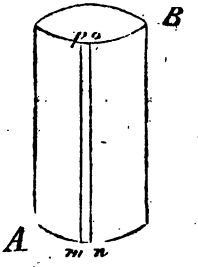
4. Zus. Cylinder von gleicher Höhe und ungleichen Grundflächen verhalten sich wie die Grundflächen, oder wie die Quadrate der Halb- oder Durchmesser derselben (181, 3. Zus.).

5. Zus. Cylinder von ungleichen Grundflächen und ungleichen Höhen verhalten sich wie die Grundflächen multiplizirt mit den Höhen, oder wie die Quadrate der

Halb- oder Durchmesser der Grundflächen multiplizirt mit den Höhen.

6. Zus. Cylinder sind einander gleich, wenn die Produkte ihrer Grundflächen und Höhen gleich sind, d. i. wenn ihre Höhen sich umgekehrt wie die Grundflächen, oder wie die Quadrate der Halbmesser oder Durchmesser derselben, verhalten.

251. Lehrs. Die krumme Oberfläche eines geraden Cylinders ist einem Rechtecke gleich, dessen Grundlinie der Peripherie der Grundfläche, und dessen Höhe der Höhe des Cylinders gleich ist.



Bew. Man kann sich die Oberfläche eines Cylinders, AB, in lauter schmale Streifen, wie mnop, getheilt vorstellen. Breitet man einen solchen Streifen in eine Ebene aus, so bildet er ein Rechteck, dessen Grundlinien = mn und Höhe = mp ist. Alle diese Streifen aber haben gleiche Höhe, die ihren Seitenlinien gleich ist, und die Summe ihrer Grundlinien ist der Peripherie der Grundfläche gleich. Setzt man sie also mit ihren Seitenlinien an einander, so bilden sie zusammen ein einziges Rechteck, dessen Grundlinie der Peripherie der Grundfläche, und dessen Höhe der Linie mp, d. i. der Höhe des Cylinders, gleich ist.

1. Zus. Setzt man wieder den Halbmesser der

Grundfläche = r und die Höhe des Cylinders = h, so ist die krumme Oberfläche = $2r\pi h$.

2. Zus. Multiplizirt man die krumme Oberfläche des geraden Cylinders mit der Hälfte des Halbmessers seiner Grundfläche, so erhält man den Inhalt des ganzen Cylinders. Denn es ist $2r\pi h \cdot \frac{1}{2}r = r^2\pi h$ (250, 1. Zus.).

3. Zus. Wenn man eine mittlere Proportionallinie, t, zwischen 2r und h nimmt, also: $2r : t = t : h$ — so ist $2r\pi h = t^2\pi$. Folglich ist die krumme Oberfläche des geraden Cylinders einem Kreise gleich, dessen Halbmesser die mittlere Proportionallinie zwischen dem Durchmesser der Grundfläche und der Höhe des Cylinders ist.

4. Zus. Die beyden Grundflächen eines geraden Cylinders verhalten sich zur krummen Oberfläche desselben wie $2r^2\pi : 2r\pi h = r : h$, d. i. wie der Halbmesser der Grundfläche zur Höhe des Cylinders.

Anmerk. Die Oberfläche eines schiefen Cylinders zu bestimmen, hat ohne Vergleich größre Schwierigkeiten und erfordert die Hülfe der Analysis des Unendlichen. Denn sie ist einem Rechtecke gleich, dessen Höhe der Achse des Cylinders, und dessen Grundlinie dem Umfange derjenigen Ellipse gleich ist, welche man durch einen senkrechten Schnitt auf die Achse des Cylinders erhält. Es wird also zur Ausmessung desselben die Rectification einer Ellipse erfordert. Doch ist zu merken, daß ein solches Rechteck nicht durch Abwickelung der schiefen Oberfläche entsteht.

5. Zus. Wenn drey gerade Cylinder gleiche Höhe haben, und der Halbmesser der Grundfläche des einen so groß ist als die Halbmesser der Grundflächen der beyden andern zusammengenommen, so ist zwar die krumme Oberfläche des erstern den krummen Oberflächen der bey

den andern gleich, aber der körperliche Inhalt desselben ist größer, als der körperliche Inhalt von diesen.

Der Grund erhellet aus 183, 3. Zus. und 184, 3. Zus.

252. Erklär. Aehnliche Cylinder sind solche, deren Achsen gegen die Grundflächen einerley Neigung haben, und deren Höhen sich wie die Halb- oder Durchmesser der Grundflächen verhalten.

253. Lehrs. Aehnliche Cylinder verhalten sich wie die Würfel der Halb- oder Durchmesser ihrer Grundflächen.

Bew. Man bezeichne zwey solche Cylinder durch C und c, ihre Halbmesser durch R und r, und Höhen durch H und h, so ist

1) $C : c = R^2 H : r^2 h$ (250, 5. Zus.)

2) $H : h = R : r$ (252.)

folglich $C : c = R^3 : r^3$ (Ax. 355.).

1. Zus. Aehnliche Cylinder verhalten sich wie die Würfel ihrer Höhen.

2. Zus. Die Halb- oder Durchmesser der Grundflächen ähnlicher Cylinder, ingleichen die Höhen derselben, verhalten sich wie die Cubikwurzeln der Zahlen, welche das Verhältniß der Cylinder ausdrücken.

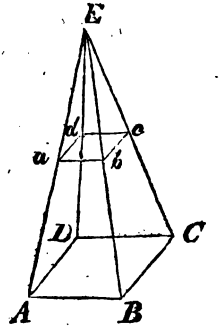
254. Erklär. Eine Pyramide ist ein Körper, der zwischen einer beliebigen geradlinigen Figur, als Grundfläche, und lauter Dreyecken, als Seitenflächen, eingeschlossen ist.

Der Punkt, in welchem die Spitzen aller Dreyecke sich vereinigen, heißt die Spitze der Pyramide; und der Abstand derselben von der Grundfläche die Höhe derselben.

Man unterscheidet die Pyramiden nach der Anzahl ihrer Seitenflächen in dreyseitige, vierseitige u. s. w.

255. Lehrs. Wenn eine Pyramide paral-

lel mit der Grundfläche durchschnitten wird, so ist der Durchschnitt eine der Grundfläche ähnliche Figur.



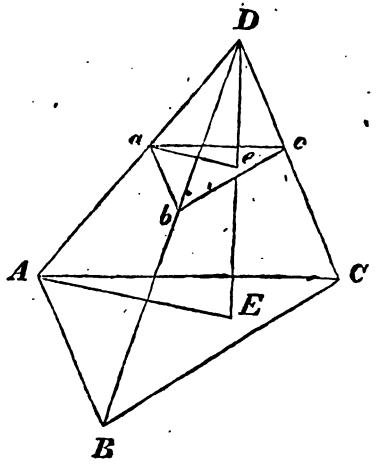
Bew. Es sey die Pyramide ACE in ac parallel mit der Grundfläche durchschnitten, so sind 1) die Seiten des Durchschnittes den Seiten der Grundfläche parallel, nehmlich ab || AB, bc || BC etc. (227.); 2) ist der Winkel a = A, b = B u. s. w. (229.); 3) Ea : ab = EA : AB und Ea : ad = EA : AD; woraus dann folgt: ab : ad = AB : AD. Und auf ähnliche Art läßt sich zeigen, daß auch die übrigen Seiten, welche die gleichen Winkel einschließen, einerley Verhältniß haben. Folglich ist der Durchschnitt ac ∼ der Grundfläche AC.

1. Zus. Alle Durchschnitte einer Pyramide, die der Grundfläche parallel gehen, sind einander ähnlich.

2. Zus. Man kann die Grundfläche als einen Durchschnitt einer noch weiter fortgehenden Pyramide, und jeden Durchschnitt als Grundfläche der darüber liegenden Pyramide betrachten.

256. Lehrs. Die Seite der Grundfläche einer Pyramide verhält sich zur gleichnamigen *eines parallelen* Durchschnitts, wie die

Höhe der Pyramide zum Abstand des Durchschnittes von der Spitze.



Bew. Es sey abc || ABC, und DE ein Perpendikel von der Spitze auf die Grundfläche, so schneidet eine Ebene durch DEA gelegt die Grundfläche in AE und den parallelen Durchschnitt in ae. Es ist also AE || ae (227.) und daher

$$DA : DE = Da : De$$

Nun ist auch $DA : AC = Da : ac$

folglich $DE : AC = De : ac$

oder $DE : De = AC : ac.$

Da sich nun AC : ac wie jede andre Seite der Grundfläche zur gleichnamigen des Durchschnittes verhält, so verhalten sich überhaupt gleichnamige Seiten der Grundfläche und des Durchschnitts, wie DE : De.

1. Zus. Gleichnamige Seiten solcher Durchschnitte einer Pyramide, die der Grundfläche parallel gehen, verhalten sich, wie die Abstände der Durchschnitte von der Spitze.

2. Zuſ. Die Durchſchnitte ſelbſt verhalten ſich daher wie die Quadrate ihrer Abſtände von der Spitze.

257. Lehrſ. Pyramiden von gleichen Grundflächen und gleicher Höhe ſind einander gleich.

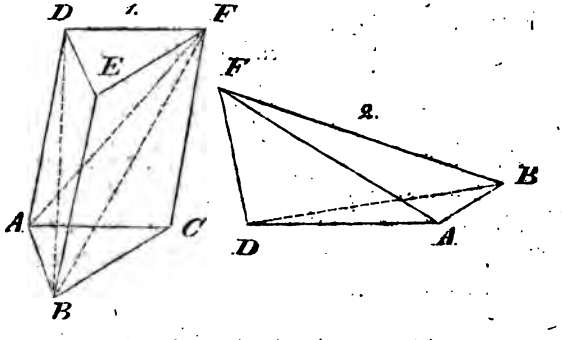
Bew. Man bezeichne zwey Pyramiden durch P und p, ihre Grundflächen durch G und ihre Höhe durch H. Ferner nehme man an, die Pyramiden werden in einem Abſtand von der Spitze = h durchſchnitten, und bezeichne die Durchſchnitte durch D und d, ſo iſt

$$\left.\begin{array}{l} G : D = H^2 : h^2 \\ \text{ingleichen } G : d = H^2 : h^2 \end{array}\right\} \text{(256, 2. Zuſ.)}$$

$$\text{folglich } G : D = G : d$$

und daher D = d (Ar. 339.). Folglich iſt auch P = p (238.).

258. Lehrſ. Eine dreyſeitige Pyramide iſt der dritte Theil eines dreyſeitigen Prisma's von gleicher Grundfläche und Höhe.



Bew. Es ſey ABCE ein dreyſeitiges Prisma; von dieſem läßt ſich zuerſt die dreyſeitige Pyramide ABCF abſchneiden, die mit dem Prisma ſelbſt einerley Grundfläche und Höhe hat.

2) kann die Pyramide DFEB abgeschnitten werden, die ebenfalls mit dem Prisma einerley Grundfläche und Höhe hat, und daher der vorigen gleich ist (257.).

3) bleibt noch der Körper ABDF übrig, der ebenfalls eine Pyramide ist, deren Grundfläche ABD ist, und deren Spitze in F liegt. *)

Diese ist aber der Pyramide DFEB gleich, wie man leicht einsieht, wenn man DEB = ABD als die Grundfläche, und F als die Spitze derselben betrachtet.

Folglich sind alle drey Pyramiden einander gleich, und da zwey derselben mit dem Prisma gleiche Grundfläche und Höhe haben, so ist jede von diesen dem dritten Theil des Prisma's von gleicher Grundfläche und Höhe gleich.

Die dritte Pyramide ABDF hat zwar nicht mit dem Prisma ABCE gleiche Grundfläche und Höhe, da aber dieses einem Prisma gleich ist, dessen Grundfläche = ABD, und dessen Höhe dem senkrechten Abstande der Spitze F von ABD gleich ist (243.), so ist auch die Pyramide ABDF dem dritten Theil eines Prisma's von gleicher Grundfläche und Höhe mit ihr gleich.

Die Zertheilung des dreyseitigen Prisma's in drey gleiche Pyramiden muß Anfängern an einem Modelle gezeigt werden. Im Fall der Noth kann man aus einer Rübe, Kartoffel oder dergleichen ein Prisma machen, und es dann auf die gehörige Art vor den Augen des Lehrlings durchschneiden.

1. Zus. Da jede vielseitige Pyramide einer dreyseitigen von gleicher Grundfläche und Höhe, und jedes vielseitige Prisma einem dreyseitigen von gleicher Grundfläche und Höhe gleich ist (257. und 239.), so ist überhaupt jede Pyramide dem dritten Theil eines Prisma's von gleicher Grundfläche und Höhe gleich.

*) Um diese Pyramide besser zu erkennen, ist sie unter Nr. 2. besonders dargestellt.

2. Zuſ. Der Inhalt einer Pyramide in Cubikaß wird gefunden, wenn man das Produkt ihrer undfläche und Höhe durch 3 dividirt.

Es ſey eine Pyramide = P, ihre Grundfläche = und Höhe = H, ſo iſt $P = \frac{1}{3} GH$.

3. Zuſ. Pyramiden von gleichen Grundflächen verlten ſich wie ihre Höhen, und Pyramiden von gleicher öhe verhalten ſich wie ihre Grundflächen.

4. Zuſ. Pyramiden von ungleichen Grundflächen d ungleicher Höhe ſind in zuſammengeſetztem Verhältß ihrer Grundflächen und Höhen.

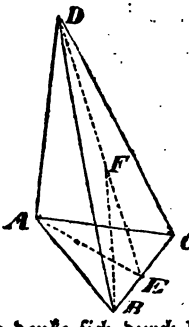
5. Zuſ. Pyramiden ſind einander gleich, enn die Produkte ihrer Grundflächen und öhen gleich ſind, d. i. wenn ihre Grundflächen h umgekehrt wie ihre Höhen verhalten.

259. Lehrſ. Wenn zwey Pyramiden gleie Grundflächen, aber ungleiche Höhen haen — alſo ſelbſt ungleich ſind — ſo iſt ein der, parallel mit der Grundfläche gehenr, Durchſchnitt der einen einem ſolchen urchſchnitte der andern gleich, wenn die bſtände der Durchſchnitte von den Spitzen ch wie die Höhen der Pyramiden verhalten.

Bew. Die Grundfläche beyder Pyramiden ſey = ; die Höhe der einen = H, die der andern = h; an mache in jener einen mit der Grundfläche paralln Durchſchnitt, D, in einem Abſtande von der Spitze = a; und in dieſer einen Durchſchnitt, d, in einem bſtande von der Spitze = b, ſo iſt $D = \frac{a^2}{H^2} G$; und $= \frac{b^2}{h^2} G$. Iſt nun a : b = H : h, ſo iſt auch $\frac{a^2}{H^2} = \frac{b^2}{h^2}$, und daher D = d.

Anmerk. Man kann also in einer kleinen Pyramide dieselben Durchschnitte erhalten, die man in einer großen von gleicher Grundfläche haben kann. Daher Gleichheit der Grundflächen, und Gleichheit der Durchschnitte allein, noch nicht zur Gleichheit der Körper hinreichend sind. (Vergl. den ähnlichen Satz von den Durchschnitten der Dreyecke (101.).)

260. Lehrs. In einer dreyseitigen Pyramide, in welcher eine Seitenlinie, AD, senkrecht auf der Grundfläche, ABC, steht, ist der Winkel, BAC, der Grundfläche größer, als der Winkel BDC, in der Spitze der Pyramide; vorausgesetzt, daß das Perpendikel AE, von A auf BC, nicht außerhalb des Dreyecks ABC falle.



Bew. Man denke sich durch DAE eine Ebene gelegt, welche die Seitenfläche BDC in DE schneidet, so ist DE auf BC senkrecht (212, 1. Zus.), und da DE als Hypotenuse des Dr. DAE größer als AE ist, so mache man EF = AE, und ziehe BF. Alsdann ist Dr. BEF = ABE, und daher Winkel BFE = BAE. Es ist aber W. BFE > BDE (53, 2. Zus.); folglich ist auch W. BAE > BDE.

Zieht man darauf von C nach F eine gerade Linie, so ist Dr. CFE = AEC; Winkel EFC > EDC; folglich W. EAC > EDC.

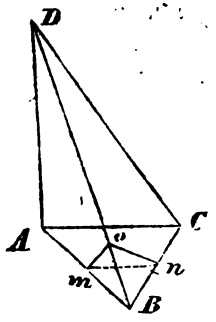
Es ist also W. BAE + EAC > BDE + EDC d. i. W. BAC > BDC.

1. Zuſ. Fällt das Perpendikel AE in die Seite AB ſelbſt, ſo bleibt ebenfalls W. BAC > BDC.

2. Zuſ. Der Winkel BAC iſt dem Neigungswinkel der Seitenflächen DAB und DAC gleich (208.).

3. Zuſ. Errichtet man aus irgend einem Punkt der Linie BD in der Ebene DAB ein Perpendikel auf BD, ſo muß dieſes, wegen des ſpitzen Winkels bey B, gegen AB convergiren; und eben ſo muß ein ſolches Perpendikel in der Ebene DBC gegen BC convergiren. Auf gleiche Art muß ein Perpendikel aus einem Punkt der Linie CD in der Ebene DAC gegen AC, und in der Ebene DBC gegen BC convergiren.

261. Lehrſ. In einer dreyſeitigen Pyramide, ABCD, wie ſie bey dem vorigen Satze angenommen wurde, iſt der Neigungswinkel der Seitenflächen DAB und DBC größer als der Winkel ABC der Grundfläche.



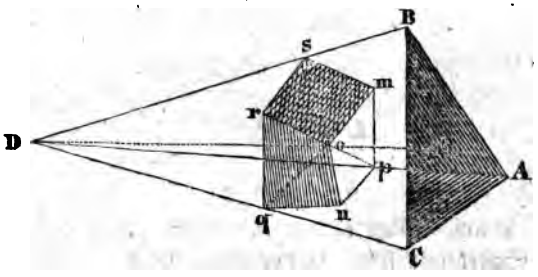
Bew. Man errichte aus irgend einem Punkt, o, der Seitenlinie BD, in der Ebene DAB ein Perpendikel, om, auf BD, welches die Linie AB oder ihre Verlängerung treffen muß (260, 3. Zuſ.); ingleichen in der Ebene DBC das Perpendikel on; alsdann iſt Wink. mon der Neigungswinkel der beyden Ebenen. Legt man darauf durch mon eine Ebene, ſo kann monB als eine

Pyramide angesehen werden, deren Grundfläche mon ist, und deren Seitenflächen, Bom und Bon, senkrecht auf der Grundfläche stehen. Da nun die Ebene DAB sowohl auf ABC als auf mon senkrecht steht, so steht die Durchschnittslinie, mn, der beyden letztern Ebenen auf der ganzen Ebene DAB senkrecht; folglich ist om das Perpendikel von o auf mn; folglich ist der Winkel mon > mBn oder ABC (260, 1. Zus.).

1. Zus. Auf ähnliche Art ergibt sich auch, daß der Neigungswinkel der Seitenflächen DAC und DBC größer als der Winkel ACB ist.

2. Zus. Die Summe der Neigungswinkel der drey Seitenflächen einer Pyramide, wie ABCD, ist größer, als die Summe der Winkel der Grundfläche derselben, und folglich größer als zwey rechte Winkel.

262. Lehrs. Wenn man in einer dreyseitigen Pyramide die Neigungswinkel der Seitenflächen gegen einander halbirt, so schneiden die drey halbirenden Ebenen einander in einer und eben derselben geraden Linie.



Bew. In der Pyramide ABCD sey ABC die Grundfläche, und Dt die Durchschnittslinie der beyden Ebenen, durch welche die Neigungswinkel der in AD und in CD zusammenstoßenden Seitenflächen halbirt

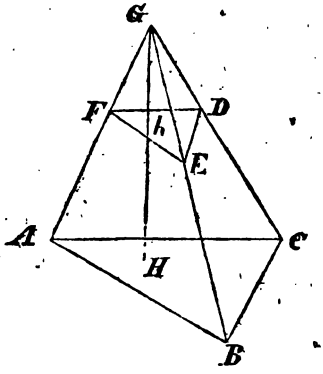
werden. Fällt man aus einem beliebigen Punkt, o, dieſer Durchſchnittslinie Perpendikel, om und on, auf die Seitenflächen ABD und ACD, und denkt ſich durch omn eine Ebene gelegt, ſo ſteht dieſe auf beyden Seitenflächen, ABD und ACD, ſenkrecht; folglich ſteht die Durchſchnittslinie, AD, der beyden Seitenflächen auf der Ebene durch omn ſenkrecht; folglich auch auf den Durchſchnittslinien pm und pn, welche dieſe Ebene mit den beyden Seitenflächen macht. Daher iſt der Winkel mpn der Neigungswinkel dieſer Flächen, und die Linie op — als die Durchſchnittslinie der den Neigungswinkel halbirenden Ebene mit der durch mon gelegten Ebene — halbirt den Winkel mpn. Folglich ſind die Dreyecke mpo und npo einander gleich (56.); alſo auch om = on.

Darauf denke man ſich aus o ein Perpendikel, or, auf die dritte Seitenfläche, BCD, gefällt, und durch nor eine Ebene gelegt; ſo wird dieſe auf den Seitenflächen ACD und BCD ſenkrecht ſtehen, und daher die Seitenlinie CD ſenkrecht auf ihr. Sind alſo qn und qr die Durchſchnittslinien dieſer Ebene mit den beyden Seitenflächen, ſo iſt nqr der Neigungswinkel derſelben, der durch qo halbirt wird. Daher iſt Dr. qor = qon; und or = on; folglich auch = om.

Alle drey Perpendikel von o auf die drey Seitenflächen ſind alſo einander gleich. Legt man daher eine dritte Ebene durch orm, ſo geben ihre Durchſchnitte rs und ms mit den Seitenflächen BCD und ABD den Neigungswinkel dieſer Flächen, und zieht man darauf os, ſo iſt Dr. ors = oms (64, 1. Zuſ.) folglich auch Winkel osr = osm. Folglich halbirt eine durch osD gelegte Ebene den Neigungswinkel der beyden Flächen ABD und BCD. Alſo muß auch, umgekehrt, die dieſen Neigungswinkel halbirende Ebene mit Do zuſammenfallen. Folglich *ſchneiden alle* drey, die Neigungswinkel der Sei-

aber zusammen die Neigungswinkel der Seitenflächen der Pyramide ABCD aus; also ist die Summe dieser Neigungswinkel größer als 2 R.

264. Aufg. Den körperlichen Inhalt einer abgestumpften Pyramide ABCDEF zu finden, wenn die Grundfläche ABC = a, die obere Fläche DEF = b, und der Abstand beyder Flächen von einander Hh = c gegeben ist.



Auflös. und Bew. Man setze, es sey die ganze Pyramide, ABCG, vollendet, GH ein Perpendikel von der Spitze auf die Grundfläche, und Gh = x; also GH = c + x, so ist

die ganze Pyr. ABCG = $\frac{1}{3}$ a (c + x)
die obere Pyr. DEFG = $\frac{1}{3}$ b x } (258, 2. Zus.)

folglich die abgestumpfte Pyr. = $\frac{1}{3}$ a (c + x) − $\frac{1}{3}$ bx = $\frac{1}{3}$ [ac + (a − b) x].

Es kommt also nur darauf an, x zu finden.

Nun ist a : b = $(c+x)^2 : x^2$ (256, 2. Zus.), und daher $\sqrt{a} : \sqrt{b} = (c+x) : x$ (Ar. 348.); woraus sich $x = c \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$ findet. Folglich ist die abgest.

$$\text{Pyr.} = \tfrac{1}{3}\left[ac + (a-b) \cdot c \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right] = \tfrac{1}{3} c\,[a + (\sqrt{a}+\sqrt{b}) \cdot \sqrt{b}]^{*}) = \tfrac{1}{3} c\,[a + \sqrt{(ab)} + b].$$

1. Zus. Aus dem gefundenen Ausdruck erhellet, daß die abgestumpfte Pyramide so groß als drey Pyramiden ist, die alle gleiche Höhe mit dem abgestumpften Stück haben, und von welchen der einen Grundfläche = a, die der andern = b, und die der dritten = $\sqrt{(ab)}$ d. i. eine mittlere geometrische Proportionalgröße zwischen a und b ist.

Anmerk. Wenn man den Inhalt einer solchen abgestumpften Pyramide durch $\frac{1}{2}$ (a + b) c ausdrücken wollte, so wäre das zu groß.

2. Zus. Setzt man in dem obigen Ausdrucke b = Null, so erhält man den Inhalt der ganzen Pyramide; und setzt man b = a, so ist es der Inhalt eines Prisma's.

265. Erklär. Aehnliche Pyramiden sind solche, deren Grundflächen und Seitenflächen ähnliche Figuren sind, deren Seitenflächen mit den Grundflächen gleiche Neigungswinkel machen, und deren Höhen sich wie gleichnamige Seiten der Grundflächen oder der Seitenflächen verhalten.

Zus. Wenn eine Pyramide parallel mit der Grundfläche durchschnitten wird, so ist die über dem Durchschnitt liegende Pyramide der ganzen ähnlich.

266. Lehrs. Aehnliche Pyramiden verhalten sich wie die Würfel gleichnamiger Seiten ihrer Grundflächen.

Bew. Man bezeichne zwey ähnliche Pyramiden durch P und p, ihre Grundflächen durch G und g, ein Paar gleichnamige Seiten derselben durch A und a und ihre Höhen durch H und h, so ist

*) Es ist nehmlich $a - b = (\sqrt{a}+\sqrt{b}) \cdot (\sqrt{a}-\sqrt{b})$. *Vergl. Ar. S. 83. Anmerk.*

$$G : g = A^2 : a^2 \quad (137.)$$
$$\text{und } H : h = A : a \quad (265.)$$
$$\text{folglich } GH : gh = A^3 : a^3$$
$$\text{Nun ist } P : p = GH : gh \quad (258, 4.\ \text{Zus.})$$
$$\text{folglich } P : p = A^3 : a^3.$$

1. Zus. Aehnliche Pyramiden verhalten sich wie die Würfel ihrer Höhen, oder wie die Würfel gleichnamiger Seitenlinien.

2. Zus. Gleichnamige Seiten der Grundflächen oder Seitenflächen, ingleichen die Höhen ähnlicher Pyramiden verhalten sich wie die Cubikwurzeln der Zahlen, welche das Verhältniß der Pyramiden selbst ausdrücken.

Anmerk. Man vergl. mit diesen Sätzen die obigen, ganz ähnlichen, vom Verhältniß ähnlicher Prismen (247.).

3. Zus. Wenn man eine Pyramide parallel mit der Grundfläche durchschneidet, so ist der obere Theil der ganzen Pyramide ähnlich.

4. Zus. In ähnlichen Pyramiden liegen Durchschnitte von gleicher Größe in gleichem Abstande von der Spitze.

267. Erklär. Ein Kegel (conus) ist ein Körper, der von einem Kreise, als Grundfläche, und einer krummen Seitenfläche eingeschlossen ist, die in einen einzigen Punkt ausläuft, der die Spitze des Kegels heißt, und von welchem sich nach jedem Punkt der Peripherie der Grundfläche gerade Linien ziehen lassen, die ganz in die Oberfläche fallen.

Der Abstand der Spitze von der Grundfläche heißt die Höhe des Kegels, und eine gerade Linie von der Spitze nach dem Mittelpunkt der Grundfläche die Achse.

1. Zus. Steht die Achse senkrecht auf der Grundfläche, so heißt der Kegel ein gerader, ist sie geneigt gegen dieselbe, so heißt er ein schiefer Kegel.

2. Zus. Durchschneidet man den Kegel mit einer

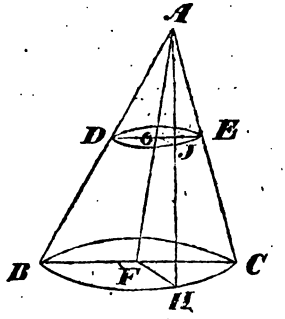
durch die Achse gelegten Ebene, so ist der Durchschnitt ein Dreyeck. Die Seitenlinien dieses Dreyecks heißen Seiten des Kegels. Beym geraden Kegel sind diese gleich, beym schiefen ungleich. Daher heißt jener auch der gleichseitige, dieser der ungleichseitige Kegel.

Auch bey dem schiefen Kegel gibt es eine gewisse Lage der durch die Achse gelegten Ebene, wobey das Dreyeck gleichschenklig wird.

3. Zus. Die Kegel werden auch eingetheilt in rechtwinklige, stumpfwinklige und spitzwinklige, je nachdem die Seiten desselben einen rechten, stumpfen oder spitzen Winkel einschließen.

4. Zus. Die Entstehung des geraden Kegels kann man durch Umdrehung eines rechtwinkligen Dreyecks um seinen einen Katheten erklären.

268. Lehrs. Wenn ein Kegel parallel mit der Grundfläche durchschnitten wird, so ist der Durchschnitt ein Kreis.



Bew. Es sey der Kegel ABC in DE parallel mit der Grundfläche durchschnitten; man denke sich durch die Achse eine Ebene gelegt, welche die Grundfläche und den Durchschnitt in BC und DE durchschneidet, so ist $DE \parallel BC$ (227.), und daher

1) AF : FC = AG : GE
ingleichen 2) AF : FB = AG : GD
folglich FC : FB = GE : GD

Da nun FC = FB ist, so ist auch GE = GD (Nr. 339.).

Alsdann schneide die durch die Achse gelegte Ebene die Grundfläche und den Durchschnitt noch irgend wo anders, z. B. in FH und GJ, so ist auch GJ ‖ FH, und daher AF : FH = AG : GJ.

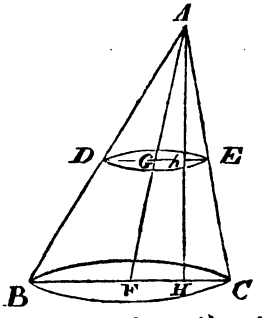
Diese Proportion mit der obigen in Nr. 1 verglichen, gibt

FC : FH = GE : GJ.

Und da FC = FH ist, so ist auch GE = GJ. — Also sind alle Linien, die von G nach der Peripherie des Durchschnittes gehen, einander gleich; folglich ist der Durchschnitt ein Kreis.

Anmerk. Von den krummen Linien, die bey andern Arten von Durchschnitten des Kegels entstehen, handelt die vierte Abtheilung.

269. Lehrs. Der Halbmesser der Grundfläche eines Kegels verhält sich zum Halbmesser des parallelen Durchschnitts, wie die Höhe des Kegels zum Abstand des Durchschnitts von der Spitze.



Bew. Es sey, wie vorhin, der Kegel ABC in

DE parallel mit der Grundfläche durchschnitten, aus A in Perpendikel AH auf die Grundfläche gefällt, und urch AHF eine Ebene gelegt, welche die Grundfläche ind den Durchschnitt in BC und DE schneidet, so ist

AF : FB = AG : GD
ingleichen AF : AH = AG : Ah
und daher FB : AH = GD : Ah
oder FB : GD = AH : Ah

1. Zus. Es verhalten sich überhaupt die Halbmesser der mit der Grundfläche parallelen Durchschnitte, wie die Abstände der Durchschnitte von der Spitze.

2. Zus. Die Durchschnitte selbst verhalten sich daher wie die Quadrate ihrer Abstände von der Spitze (181, 3. Zus.).

270. Lehrs. Ein Kegel ist einer Pyramide von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe gleich.

Bew. Man setze die Grundfläche einer Pyramide = G, ihre Höhe = H, einen mit der Grundfläche parallelen Durchschnitt = D, und dessen Abstand von der Spitze = h; dieselben Buchstaben mögen auch bey dem Kegel die ähnlichen Dinge bezeichnen, nur der Durchschnitt sey = D'. Alsdann ist

in der Pyr. G : D = H^2 : h^2 (256, 2. Zus.)
in dem Kegel G : D' = H^2 : h^2 (269, 2. Zus.)
folglich G : D = G : D'.

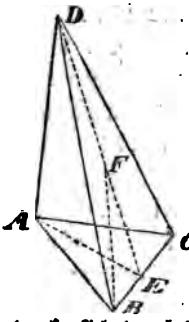
Da nun G = G ist, so ist auch D = D', folglich die Pyramide dem Kegel gleich (238.).

Anmerk. So wie Prisma und Cylinder nur eine Klasse von Körpern ausmachen, so auch die Pyramide und der Kegel.

1. Zus. Ein Kegel ist dem dritten Theil eines Cylinders von gleicher Grundfläche und Höhe gleich (258, 1. Zus. und 250.). Setzt man da-

Anmerk. Man kann also in einer kleinen Pyramide dieselben Durchschnitte erhalten, die man in einer großen von gleicher Grundfläche haben kann. Daher Gleichheit der Grundflächen, und Gleichheit der Durchschnitte allein, noch nicht zur Gleichheit der Körper hinreichend sind. (Vergl. den ähnlichen Satz von den Durchschnitten der Dreyecke (101.).)

260. Lehrs. In einer dreyseitigen Pyramide, in welcher eine Seitenlinie, AD, senkrecht auf der Grundfläche, ABC, steht, ist der Winkel, BAC, der Grundfläche größer, als der Winkel BDC, in der Spitze der Pyramide; vorausgesetzt, daß das Perpendikel AE, von A auf BC, nicht außerhalb des Dreyecks ABC falle.



Bew. Man denke sich durch DAE eine Ebene gelegt, welche die Seitenfläche BDC in DE schneidet, so ist DE auf BC senkrecht (212, 1. Zus.), und da DE als Hypotenuse des Dr. DAE größer als AE ist, so mache man EF = AE, und ziehe BF. Alsdann ist Dr. BEF = ABE, und daher Winkel BFE = BAE. Es ist aber W. BFE > BDE (53, 2. Zus.); folglich ist auch W. BAE > BDE.

Zieht man darauf von C nach F eine gerade Linie, so ist Dr. CFE = AEC; Winkel EFC > EDC; folglich W. EAC > EDC.

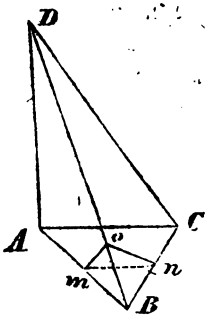
Es ist also W. BAE + EAC > BDE + EDC d. i. W. BAC > BDC.

1. Zus. Fällt das Perpendikel AE in die Seite AB selbst, so bleibt ebenfalls W. BAC > BDC.

2. Zus. Der Winkel BAC ist dem Neigungswinkel der Seitenflächen DAB und DAC gleich (268.).

3. Zus. Errichtet man aus irgend einem Punkt der Linie BD in der Ebene DAB ein Perpendikel auf BD, so muß dieses, wegen des spitzen Winkels bey B, gegen AB convergiren; und eben so muß ein solches Perpendikel in der Ebene DBC gegen BC convergiren. Auf gleiche Art muß ein Perpendikel aus einem Punkt der Linie CD in der Ebene DAC gegen AC, und in der Ebene DBC gegen BC convergiren.

261. Lehrs. In einer dreyseitigen Pyramide, ABCD, wie sie bey dem vorigen Satze angenommen wurde, ist der Neigungswinkel der Seitenflächen DAB und DBC größer als der Winkel ABC der Grundfläche.



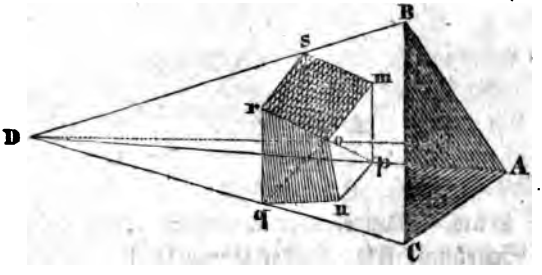
Bew. Man errichte aus irgend einem Punkt, o, der Seitenlinie BD, in der Ebene DAB ein Perpendikel, om, auf BD, welches die Linie AB oder ihre Verlängerung treffen muß (260, 3. Zus.); ingleichen in der Ebene DBC das Perpendikel on; alsdann ist Wink. mon der Neigungswinkel der beyden Ebenen. Legt man darauf durch mon eine Ebene, so kann monB als eine

Pyramide angesehen werden, deren Grundfläche mon ist, und deren Seitenflächen, Bom und Bon, senkrecht auf der Grundfläche stehen. Da nun die Ebene DAB sowohl auf ABC als auf mon senkrecht steht, so steht die Durchschnittslinie, mn, der beyden letztern Ebenen auf der ganzen Ebene DAB senkrecht; folglich ist om das Perpendikel von o auf mn; folglich ist der Winkel mon $>$ mBn oder ABC (260, 1. Zus.).

1. Zus. Auf ähnliche Art ergibt sich auch, daß der Neigungswinkel der Seitenflächen DAC und DBC größer als der Winkel ACB ist.

2. Zus. Die Summe der Neigungswinkel der drey Seitenflächen einer Pyramide, wie ABCD, ist größer, als die Summe der Winkel der Grundfläche derselben, und folglich größer als zwey rechte Winkel.

262. Lehrs. Wenn man in einer dreyseitigen Pyramide die Neigungswinkel der Seitenflächen gegen einander halbirt, so schneiden die drey halbirenden Ebenen einander in einer und eben derselben geraden Linie.



Bew. In der Pyramide ABCD sey ABC die Grundfläche, und Dt die Durchschnittslinie der beyden Ebenen, durch welche die Neigungswinkel der in AD und in CD zusammenstoßenden Seitenflächen halbirt

werden. Fällt man aus einem beliebigen Punkt, o, dieſer Durchſchnittslinie Perpendikel, om und on, auf die Seitenflächen ABD und ACD, und denkt ſich durch omn eine Ebene gelegt, ſo ſteht dieſe auf beyden Seitenflächen, ABD und ACD, ſenkrecht; folglich ſteht die Durchſchnittslinie, AD, der beyden Seitenflächen auf der Ebene durch omn ſenkrecht; folglich auch auf den Durchſchnittslinien pm und pn, welche dieſe Ebene mit den beyden Seitenflächen macht. Daher iſt der Winkel mpn der Neigungswinkel dieſer Flächen, und die Linie op — als die Durchſchnittslinie der den Neigungswinkel halbirenden Ebene mit der durch mon gelegten Ebene — halbirt den Winkel mpn. Folglich ſind die Dreyecke mpo und npo einander gleich (56.); alſo auch om = on.

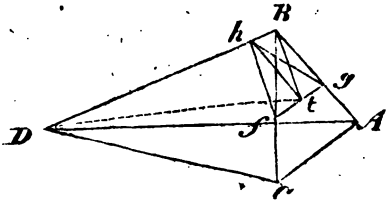
Darauf denke man ſich aus o ein Perpendikel, or, auf die dritte Seitenfläche, BCD, gefällt, und durch nor eine Ebene gelegt; ſo wird dieſe auf den Seitenflächen ACD und BCD ſenkrecht ſtehen, und daher die Seitenlinie CD ſenkrecht auf ihr. Sind alſo qn und qr die Durchſchnittslinien dieſer Ebene mit den beyden Seitenflächen, ſo iſt nqr der Neigungswinkel derſelben, der durch qo halbirt wird. Daher iſt Dr. qor = qon; und or = on; folglich auch = om.

Alle drey Perpendikel von o auf die drey Seitenflächen ſind alſo einander gleich. Legt man daher eine dritte Ebene durch orm, ſo geben ihre Durchſchnitte rs und ms mit den Seitenflächen BCD und ABD den Neigungswinkel dieſer Flächen, und zieht man darauf os, ſo iſt Dr. ors = oms (64, 1. Zuſ.) folglich auch Winkel osr = osm. Folglich halbirt eine durch osD gelegte Ebene den Neigungswinkel der beyden Flächen ABD und BCD. Alſo muß auch, umgekehrt, die dieſen Neigungswinkel halbirende Ebene mit Do zuſammenfallen. Folglich *ſchneiden alle* drey, die Neigungswinkel der Sei-

tenflächen halbirenden, Ebenen einander in einer und eben derselben Linie, Do oder Dt.

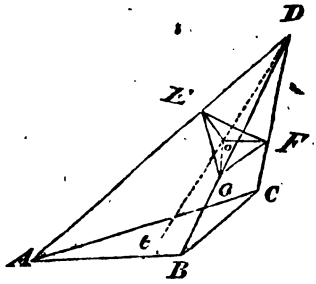
1. Zus. Daß die Ebenen mon, nor und rom, weder alle drey, noch zwey derselben, wiederum in eine Ebene fallen können, ergibt sich daraus, daß jede der drey Seitenlinien AD, BD und CD auf einer derselben senkrecht steht; sie müßten also unter einander parallel seyn, wenn sie auf einer und eben derselben Ebene stünden (215.).

2. Zus. Wenn die Durchschnittslinie Dt auf der Grundfläche ABC senkrecht steht, so werden die Winkel der Grundfläche durch die Durchschnittslinien der halbirenden Ebenen mit der Grundfläche, ebenfalls halbirt.



Es sey z. B. Bt die Durchschnittslinie der halbirenden Ebene BDt mit der Grundfläche ABC; man ziehe fg senkrecht auf Bt, und lege durch fg eine Ebene, fgh, senkrecht auf BD; so ist fhg der Neigungswinkel der Flächen ABD und BCD, und th, als die Durchschnittslinie der Ebenen fgh und BDt, halbirt denselben. Folglich ist Dr. htf = htg; — denn fg steht auf der ganzen Ebene BDt senkrecht (212, 1. Zus.) — also auch tf = tg; folglich Dr. Btf = Btg: und daher Winkel tBf = tBg. Es ist also der Winkel fBg durch Bt halbirt.

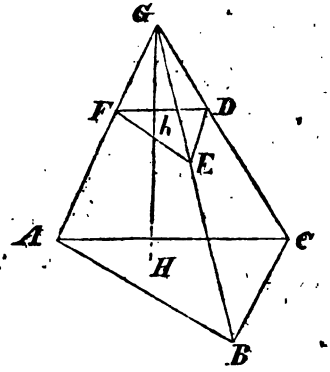
263. Lehrs. In einer jeden dreyseitigen Pyramide ist die Summe der Neigungswinkel der drey Seitenflächen gegen einander größer als zwey rechte Winkel.



Bew. Es sey ABCD irgend eine dreyseitige Pyramide; man denke sich den Neigungswinkel je zweyer Seitenflächen durch eine Ebene halbirt, und Dt sey die gemeinschaftliche Durchschnittslinie der drey halbirenden Ebenen. Alsdann durchschneide man die ganze Pyramide irgendwo mit einer auf Dt senkrechten Ebene, EFG — wodurch die Neigungswinkel der Seitenflächen im geringsten nicht geändert werden — so entstehen drey neue Pyramiden, deren Grundflächen EFo, EGo, und FGo sind, und deren Spitzen in D liegen. Alle drey sind von der Beschaffenheit, daß die Seitenflächen, welche durch die halbirenden Ebenen gebildet werden, senkrecht auf der Grundfläche stehen; und da die Durchschnittslinien der halbirenden Ebenen mit der Ebene EFG die Winkel in E, F und G halbiren, (262, 2. Zus.) so fallen auch die Perpendikel aus o auf die gegenüberstehenden Seiten, EF, EG und FG nicht außerhalb der Dreyecke; folglich ist die Summe der Neigungswinkel der Seitenflächen einer jeden dieser Pyramiden größer als 2 R. (261, 2. Zus.) und von allen dreyen zusammen größer als 6 R. Diejenigen dieser Neigungswinkel aber, welche um die Durchschnittslinie Do liegen, sind den Winkeln EoF, EoG, FoG, der Grundflächen gleich, (260, 2. Zus.) und daher zusammen gleich 4 R. Folglich ist die Summe der übrigen Neigungswinkel größer als 2 R. Diese machen

aber zusammen die Neigungswinkel der Seitenflächen der Pyramide ABCD aus; also ist die Summe dieser Neigungswinkel größer als 2 R.

264. Aufg. Den körperlichen Inhalt einer abgestumpften Pyramide ABCDEF zu finden, wenn die Grundfläche ABC = a, die obere Fläche DEF = b, und der Abstand beyder Flächen von einander Hh = c gegeben ist.



Auflös. und Bew. Man setze, es sey die ganze Pyramide, ABCG, vollendet, GH ein Perpendikel von der Spitze auf die Grundfläche, und Gh = x; also GH = c + x, so ist

die ganze Pyr. ABCG = $\frac{1}{3}$ a (c + x)
die obere Pyr. DEFG = $\frac{1}{3}$ b x } (258, 2. Zus.)

folglich die abgestumpfte Pyr. = $\frac{1}{3}$ a (c + x) − $\frac{1}{3}$ bx = $\frac{1}{3}$ [ac + (a − b) x].

Es kommt also nur darauf an, x zu finden.

Nun ist a : b = $(c+x)^2 : x^2$ (256, 2. Zus.), und daher $\sqrt{a} : \sqrt{b} = (c+x) : x$ (Ar. 348.); woraus

$x = c \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$ findet. Folglich ist die abgest.

Pyr. $= \frac{1}{3}[ac + (a-b) \cdot c \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}] = \frac{1}{3}c[a + (\sqrt{a}+\sqrt{b}) \cdot \sqrt{b}]$ *) $= \frac{1}{3}c[a + \sqrt{(ab)} + b]$.

1. Zuf. Aus dem gefundenen Ausdruck erhellet, daß die abgeſtumpfte Pyramide ſo groß als drey Pyramiden iſt, die alle gleiche Höhe mit dem abgeſtumpften Stück haben, und von welchen der einen Grundfläche $= a$, die der andern $= b$, und die der dritten $= \sqrt{(ab)}$ d. i. eine mittlere geometriſche Proportionalgröße zwiſchen a und b iſt.

Anmerk. Wenn man den Inhalt einer ſolchen abgeſtumpften Pyramide durch $\frac{1}{3}(a+b)c$ ausdrücken wollte, ſo wäre das zu groß.

2. Zuf. Setzt man in dem obigen Ausdrucke $b =$ Null, ſo erhält man den Inhalt der ganzen Pyramide; und ſetzt man $b = a$, ſo iſt es der Inhalt eines Prisma's.

265. Erklär. Aehnliche Pyramiden ſind ſolche, deren Grundflächen und Seitenflächen ähnliche Figuren ſind, deren Seitenflächen mit den Grundflächen gleiche Neigungswinkel machen, und deren Höhen ſich wie gleichnamige Seiten der Grundflächen oder der Seitenflächen verhalten.

Zuf. Wenn eine Pyramide parallel mit der Grundfläche durchſchnitten wird, ſo iſt die über dem Durchſchnitt liegende Pyramide der ganzen ähnlich.

266. Lehrſ. Aehnliche Pyramiden verhalten ſich wie die Würfel gleichnamiger Seiten ihrer Grundflächen.

Bew. Man bezeichne zwey ähnliche Pyramiden durch P und p, ihre Grundflächen durch G und g, ein Paar gleichnamige Seiten derſelben durch A und a und ihre Höhen durch H und h, ſo iſt

*) Es iſt nehmlich $a - b = (\sqrt{a}+\sqrt{b}) \cdot (\sqrt{a}-\sqrt{b})$. Vergl. Ar. S. 83. Anmerk.

$$G : g = A^2 : a^2 \quad (137.)$$
$$\text{und } H : h = A : a \quad (265.)$$
$$\text{folglich } GH : gh = A^3 : a^3$$
$$\text{Nun ist } P : p = GH : gh \quad (258, 4.\ \text{Zus.})$$
$$\text{folglich } P : p = A^3 : a^3.$$

1. Zus. Aehnliche Pyramiden verhalten sich wie die Würfel ihrer Höhen, oder wie die Würfel gleichnamiger Seitenlinien.

2. Zus. Gleichnamige Seiten der Grundflächen oder Seitenflächen, ingleichen die Höhen ähnlicher Pyramiden verhalten sich wie die Cubikwurzeln der Zahlen, welche das Verhältniß der Pyramiden selbst ausdrücken.

Anmerk. Man vergl. mit diesen Sätzen die obigen, ganz ähnlichen, vom Verhältniß ähnlicher Prismen (247.).

3. Zus. Wenn man eine Pyramide parallel mit der Grundfläche durchschneidet, so ist der obere Theil der ganzen Pyramide ähnlich.

4. Zus. In ähnlichen Pyramiden liegen Durchschnitte von gleicher Größe in gleichem Abstande von der Spitze.

267. Erklär. Ein Kegel (conus) ist ein Körper, der von einem Kreise, als Grundfläche, und einer krummen Seitenfläche eingeschlossen ist, die in einen einzigen Punkt ausläuft, der die Spitze des Kegels heißt, und von welchem sich nach jedem Punkt der Peripherie der Grundfläche gerade Linien ziehen lassen, die ganz in die Oberfläche fallen.

Der Abstand der Spitze von der Grundfläche heißt die Höhe des Kegels, und eine gerade Linie von der Spitze nach dem Mittelpunkt der Grundfläche die Achse.

1. Zus. Steht die Achse senkrecht auf der Grundfläche, so heißt der Kegel ein gerader, ist sie geneigt gegen dieselbe, so heißt er ein schiefer Kegel.

2. Zus. Durchschneidet man den Kegel mit einer

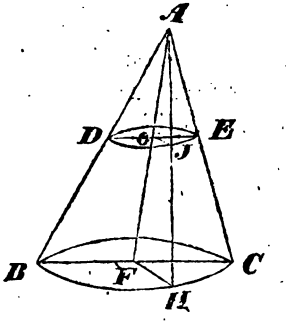
urch die Achse gelegten Ebene, so ist der Durchschnitt in Dreyeck. Die Seitenlinien dieses Dreyecks heißen Seiten des Kegels. Beym geraden Kegel sind diese leich, beym schiefen ungleich. Daher heißt jener auch er gleichseitige, dieser der ungleichseitige Kegel.

Auch bey dem schiefen Kegel gibt es eine gewisse Lage er durch die Achse gelegten Ebene, wobey das Dreyeck leichschenklig wird.

3. Zus. Die Kegel werden auch eingetheilt in echtwinklige, stumpfwinklige und spitzwinkige, je nachdem die Seiten desselben einen rechten, stumpfen oder spitzen Winkel einschließen.

4. Zus. Die Entstehung des geraden Kegels kann man durch Umdrehung eines rechtwinkligen Dreyecks um einen einen Katheten erklären.

268. Lehrs. Wenn ein Kegel parallel mit der Grundfläche durchschnitten wird, so ist der Durchschnitt ein Kreis.



Bew. Es sey der Kegel ABC in DE parallel mit der Grundfläche durchschnitten; man denke sich durch die Achse eine Ebene gelegt, welche die Grundfläche und den Durchschnitt in BC und DE durchschneidet, so ist *DE // BC (227.)*, und daher

1) AF : FC = AG : GE
ingleichen 2) AF : FB = AG : GD
folglich FC : FB = GE : GD

Da nun FC = FB ist, so ist auch GE = GD (Nr. 339.).

Alsdann schneide die durch die Achse gelegte Ebene die Grundfläche und den Durchschnitt noch irgend wo anders, z. B. in FH und GJ, so ist auch GJ ∥ FH, und daher AF : FH = AG : GJ.

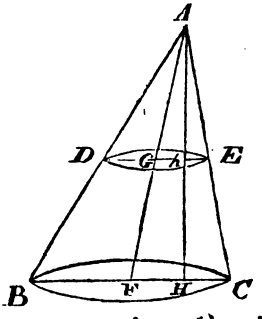
Diese Proportion mit der obigen in Nr. 1 verglichen, gibt

FC : FH = GE : GJ.

Und da FC = FH ist, so ist auch GE = GJ. — Also sind alle Linien, die von G nach der Peripherie des Durchschnittes gehen, einander gleich; folglich ist der Durchschnitt ein Kreis.

Anmerk. Von den krummen Linien, die bey andern Arten von Durchschnitten des Kegels entstehen, handelt die vierte Abtheilung.

269. Lehrs. Der Halbmesser der Grundfläche eines Kegels verhält sich zum Halbmesser des parallelen Durchschnitts, wie die Höhe des Kegels zum Abstand des Durchschnitts von der Spitze.



Bew. Es sey, wie vorhin, der Kegel ABC in

DE parallel mit der Grundfläche durchschnitten, aus A ein Perpendikel AH auf die Grundfläche gefällt, und durch AHF eine Ebene gelegt, welche die Grundfläche und den Durchschnitt in BC und DE schneidet, so ist

AF : FB = AG : GD

ingleichen AF : AH = AG : Ah

und daher FB : AH = GD : Ah

oder FB : GD = AH : Ah

1. Zus. Es verhalten sich überhaupt die Halbmesser der mit der Grundfläche parallelen Durchschnitte, wie die Abstände der Durchschnitte von der Spitze.

2. Zus. Die Durchschnitte selbst verhalten sich daher wie die Quadrate ihrer Abstände von der Spitze (181, 3. Zus.).

270. Lehrs. Ein Kegel ist einer Pyramide von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe gleich.

Bew. Man setze die Grundfläche einer Pyramide = G, ihre Höhe = H, einen mit der Grundfläche parallelen Durchschnitt = D, und dessen Abstand von der Spitze = h; dieselben Buchstaben mögen auch bey dem Kegel die ähnlichen Dinge bezeichnen, nur der Durchschnitt sey = D'. Alsdann ist

in der Pyr. $G : D = H^2 : h^2$ (256, 2. Zus.)

in dem Kegel $G : D' = H^2 : h^2$ (269, 2. Zus.)

folglich G : D = G : D'.

Da nun G = G ist, so ist auch D = D', folglich die Pyramide dem Kegel gleich (238.).

Anmerk. So wie Prisma und Cylinder nur eine Klasse von Körpern ausmachen, so auch die Pyramide und der Kegel.

1. Zus. Ein Kegel ist dem dritten Theil eines Cylinders von gleicher Grundfläche und Höhe gleich (258, 1. Zus. und 250.). Setzt man da-

her den Halbmesser der Grundfläche $= r$, und die Höhe des Kegels $= h$, so ist der ganze Kegel $= \frac{1}{3} r^2 \pi h$.

2. Zus. Kegel von gleichen Grundflächen und Höhen sind einander gleich.

3. Zus. Kegel von gleichen Grundflächen verhalten sich wie ihre Höhen; und Kegel von gleicher Höhe verhalten sich wie ihre Grundflächen.

4. Zus. Kegel von ungleichen Grundflächen und Höhen sind in zusammengesetztem Verhältniß der Grundflächen und Höhen.

5. Zus. Kegel sind einander gleich, wenn die Produkte ihrer Grundflächen und Höhen gleich sind.

271. Aufg. Den Inhalt eines abgestumpften Kegels BCED (s. die vorherg. Fig.) zu finden, wenn der Halbmesser der Grundfläche $= R$, der Halbmesser der obern Fläche $= r$, und der Abstand beyder Flächen $Hh = c$ gegeben ist.

Auflös. und Bew. Man denke sich den ganzen Kegel ABC vollendet, AH sey ein Perpendikel von der Spitze auf die Grundfläche, und $Ah = x$; also $AH = c + x$, so ist

der Kegel $ABC = \frac{1}{3} R^2 \pi (c + x)$
der Kegel $ADE = \frac{1}{3} r^2 \pi x$ } (270, 1. Zus.)

folglich der abgest. Kegel $BCED = \frac{1}{3} R^2 \pi (c + x) - \frac{1}{3} r^2 \pi x = \frac{1}{3} \pi [R^2 c + (R^2 - r^2) x]$.

Um x zu finden, setze man

$$R : r = c + x : x \quad (269.)$$

woraus $x = c \frac{r}{R - r}$ folgt. Also ist der abgest. Kegel

$$BCED = \frac{1}{3} \pi \left[R^2 c + (R^2 - r^2) c \frac{r}{R - r}\right]$$
$$= \frac{1}{3} \pi c [R^2 + (R + r) r]$$
$$= \frac{1}{3} c (R^2 + Rr + r^2).$$

Man vergleiche hiermit den Ausdruck für die abgestumpfte Pyramide (264.).

1. Zus. Der abgestumpfte Kegel ist so groß als drey Kegel zusammengenommen, die alle gleiche Höhe mit dem abgestumpften Stück haben, und bey welchen der Halbmesser der Grundfläche des einen $= R$, des andern $= r$, und des dritten $= \sqrt{(Rr)}$ d. i. die mittlere Proportionallinie zwischen R und r ist.

2. Zus. Es ist aber auch

$$\left(\frac{R+r}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}R^2 + \frac{1}{2}Rr + \frac{1}{4}r^2$$

und $\frac{1}{3}\left(\frac{R-r}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}R^2 - \frac{1}{6}Rr + \frac{1}{12}r^2$

beydes zusammen $= \frac{1}{3}R^2 + \frac{1}{3}Rr + \frac{1}{3}r^2$

folglich $\pi c\left(\frac{R+r}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\pi c\left(\frac{R-r}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}\pi c\,(R^2 + Rr + r^2)$

d. h. der abgestumpfte Kegel BCED ist einem Cylinder und einem Kegel zusammengenommen gleich, die beyde gleiche Höhe, c, mit dem abgestumpften Kegel haben, und von welchen der erstere eine Grundfläche hat, deren Halbmesser $= \frac{1}{2}(R+r)$, und der letztre eine Grundfläche, deren Halbmesser $= \frac{1}{2}(R-r)$ ist.

Anmerk. Berechnet man den abgest. Kegel wie einen Cylinder, dessen Grundfläche der halben Summe beyder Flächen des Kegels gleich ist, so bekommt man den Inhalt zu groß. Nimmt man aber die halbe Summe der Durchmesser beyder Flächen des Kegels zum Durchmesser der Grundfläche des Cylinders, so wird der Inhalt zu klein; doch beträgt der Fehler hier nur halb so viel als im erstern Fall.

3. Zus. Setzt man in dem obigen Ausdruck für den abgestumpften Kegel $r = o$, so erhält man den ganzen Kegel; und setzt man $r = R$, so wird es der Ausdruck für den Cylinder.

272. Erklär. Aehnliche Kegel sind solche, deren Achsen gegen die Grundflächen einerley Neigung haben, und deren Höhen sich, wie die Halbmesser oder Durchmesser ihrer Grundflächen verhalten.

Zus. Durchschneidet man einen Kegel parallel mit der Grundfläche, so ist der obere Theil dem ganzen Kegel ähnlich.

273. Lehrs. Aehnliche Kegel verhalten sich wie die Würfel der Halbmesser oder Durchmesser ihrer Grundflächen.

Bew. Man bezeichne zwey ähnliche Kegel durch C und c, die Halbmesser ihrer Grundflächen durch R und r, und ihre Höhen durch H und h, so ist

$$C : c = R^2 \pi H : r^2 \pi h = R^2 H : r^2 h$$ (270, 4. Zus.)

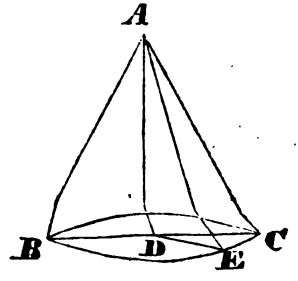
Da nun $H : h = R : r$ ist, so ist

auch $C : c = R^3 : r^3$ (Ar. 355.).

1. Zus. Aehnliche Kegel verhalten sich auch wie die Würfel ihrer Höhen, ingleichen wie die Würfel ihrer Achsen.

2. Zus. Die Höhen, die Achsen, und die Halbmesser oder Durchmesser der Grundflächen ähnlicher Kegel verhalten sich wie die Cubikwurzeln der Zahlen, welche das Verhältniß der Kegel ausdrücken.

274. Aufg. Die krumme Oberfläche eines geraden Kegels zu finden.



Auflöſ. und Bew. Es ſey ABC ein gerader Kegel, ſo iſt klar, daß jeder Punkt der Peripherie der Grundfläche von der Spitze A gleich weit abſteht; denn alle Dreyecke, wie ADB, ADE, ſind einander gleich, da AD ſich ſelber gleich, BD = DE (37, 1.) und der eingeſchloſſene Winkel = 1 R. (209.) iſt.

Denkt man ſich alſo, die krumme Fläche werde in eine Ebene ausgebreitet, nachdem man ſie längs einer Seite des Kegels durchſchnitten hat, ſo erhält man eine Figur, die von zwey geraden Linien = der Seite AB, und einer krummen, die von dem Punkt A überall gleichweit abſteht, begrenzt wird. Eine ſolche Figur aber iſt nichts anders als ein Ausſchnitt eines Kreiſes, deſſen Halbmeſſer = AB und deſſen Bogen der Peripherie der Grundfläche gleich iſt.

Man findet daher den Inhalt der krummen Oberfläche in Quadratmaaß, wenn man die Peripherie der Grundfläche mit der halben Seite des Kegels multiplizirt (185, 2. Zuſ.).

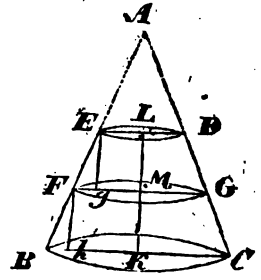
1. Zuſ. Es ſey der Halbmeſſer der Grundfläche = r und die Höhe des Kegels = h, ſo iſt die Seite deſſelben = $\sqrt{(h^2 + r^2)}$, und daher die krumme Oberfläche = $2r\pi \frac{\sqrt{(h^2+r^2)}}{2} = \pi r \sqrt{(h^2+r^2)}$.

2. Zuſ. Es ſey p die mittlere Proportionallinie zwiſchen r und $\sqrt{(h^2+r^2)}$, ſo iſt $\pi r \sqrt{(h^2+r^2)} = p^2\pi$, d. h. die krumme Oberfläche des geraden Kegels iſt der Fläche eines Kreiſes gleich, deſſen Halbmeſſer die mittlere Proportionallinie zwiſchen dem Halbmeſſer der Grundfläche und der Seite des Kegels iſt.

3. Zuſ. Die krumme Oberfläche des geraden Kegels verhält ſich zu ſeiner Grundfläche, wie $\pi r \sqrt{(h^2+r^2)} : r^2\pi = \sqrt{(h^2+r^2)} : r$, d. i. wie die Seite zum Halbmeſſer der Grundfläche.

Anmerk. Die krumme Oberfläche des schiefen Kegels zu bestimmen, hat selbst für die höhere Analysis große Schwierigkeit.

275. Lehrs. Die krumme Oberfläche des abgestumpften geraden Kegels BCDE ist einem Rechtecke gleich, dessen Grundlinie der Peripherie des in der Mitte zwischen beyden Flächen liegenden Kreises FG, und dessen Höhe der Seitenlinie BE gleich ist.



Bew. Man denke sich den Kegel bis nach A vollendet, so ist die Oberfläche des abgestumpften Kegels unstreitig der Oberfläche des ganzen Kegels ABC weniger der Oberfläche des Kegels AED gleich.

Setzt man also den Halbmesser der Grundfläche $= R$, den Halbmesser der obern Fläche $= r$, die Seite $AB = S$ und $AE = s$, so ist die Oberfläche des abgest. Kegels $\varphi = \frac{2R\pi S}{2} - \frac{2r\pi s}{2}$ (274.) $= \pi(RS - rs)$.

Es ist aber

$$S : s = R : r \quad (88, 2. \text{ Zus.})$$

folglich auch $(S - s) : (R - r) = S : R$ (Art. 342, 5.)

und daher $R(S - s) = RS - rS$

folglich $RS = R(S - s) + rS$

Setzt man diesen Ausdruck für RS in die obige Gleichung für φ, so ist

$$\varphi = \pi [R (S - s) + rS - rs]$$
$$= \pi [R (S - s) + r(S - s)]$$
$$= \pi (R + r) . (S - s)$$ wofür man auch

setzen kann $= 2\pi \frac{R + r}{2} . (S - s)$.

Nun ist aber $2\pi \frac{R + r}{2}$ der Peripherie des mittlern Kreises FG gleich *), und $S - s = BE$, folglich ist φ = der Peripherie des mittlern Kreises, multiplizirt mit der Seitenlinie BE.

Zus. Auch die krumme Oberfläche des abgestumpften geraden Kegels ist der Fläche eines Kreises gleich, dessen Halbmesser die mittlere Proportionallinie zwischen der Seite des abgestumpften Kegels, $(S - s)$, und der Summe der Halbmesser seiner untern und obern Fläche $(R + r)$, ist.

Anmerk. Setzt man in der für die Oberfläche des abgestumpften Kegels gefundenen Formel r und $s = o$, so erhält man wieder den Ausdruck für die Oberfläche des ganzen Kegels.

276. Erklär. Eine Kugel (sphaera s. globus) ist ein Körper, der von einer krummen Fläche begrenzt wird, die von einem bestimmten, innerhalb des Körpers liegenden, Punkte überall gleich weit absteht.

Dieser Punkt heißt der Mittelpunkt (centrum);

*) Wenn FG mitten zwischen BC und ED liegt, so sind die Perpendikel Eg und Fh einander gleich, folglich ist auch $Bh = Fg$.

Nun ist $Bh = BK - hK = R - MF$
und $Fg = MF - Mg = MF - r$
folglich ist $R - MF = MF - r$

und daher $2MF = R + r$, und $MF = \frac{R + r}{2}$.

Also die Peripherie des Kreises, dessen Halbmesser MF ist, $= 2\pi MF = 2\pi \frac{R + r}{2}$.

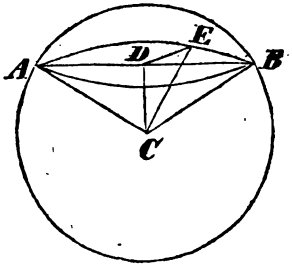
und eine gerade Linie von demselben nach irgend einem Punkt der Oberfläche der Halbmesser (radius), so wie diejenige gerade Linie, die von irgend einem Punkt der Oberfläche durch den Mittelpunkt bis an die entgegengesetzte Seite der Oberfläche geht, ein Durchmesser (diameter).

1. Zus. Man kann sich vorstellen, eine Kugel entstehe, indem sich ein Halbkreis um seinen Durchmesser herumbewegt.

2. Zus. Alle Halbmesser, so wie alle Durchmesser einer Kugel sind einander gleich.

3. Zus. Durch den Halbmesser oder Durchmesser ist die Kugel bestimmt.

277. Lehrs. Wenn eine Kugel irgendwo mit einer Ebene durchschnitten wird, so ist der Durchschnitt ein Kreis.



Bew. Es sey AB ein ebener Durchschnitt der Kugel; man fälle aus dem Mittelpunkt, C, ein Perpendikel, CD, auf die Ebene des Durchschnittes, aus D ziehe man nach beliebigen Punkten des Umfangs die Linien DA, DE, DB, und aus C die Halbmesser CA, CE, CB, so sind alle diese Dreyecke CDA, CDE, CDB, einander gleich (64, 1. Zus.), folglich auch DA = DE = DB, und daher D der Mittelpunkt eines Kreises.

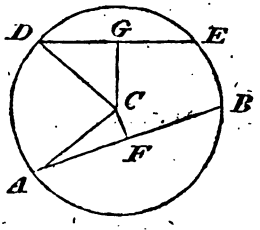
1. Zus. Das Perpendikel aus dem Mittelpunkt

der Kugel auf die Ebene eines Durchschnittes trifft in den Mittelpunkt desselben.

2. Zus. Eine gerade Linie aus dem Mittelpunkt der Kugel nach dem Mittelpunkt eines Durchschnittes gezogen, steht senkrecht auf diesem.

3. Zus. Ein Perpendikel, aus dem Mittelpunkt eines Durchschnittes auf der Ebene desselben errichtet, geht durch den Mittelpunkt der Kugel.

278. Lehrs. Die ebenen Durchschnitte einer Kugel sind näher bey dem Mittelpunkte größer, als weiter von demselben.



Bew. Es bezeichne AB und DE zwey Durchschnitte, von welchen AB näher beym Mittelpunkt liege, als DE; alsdann ist $CF < CG$. Nun ist

$$CA^2 = CF^2 + AF^2$$
$$CD^2 = CG^2 + GD^2$$
und $CA^2 = CD^2$

folglich $CF^2 + AF^2 = CG^2 + GD^2$

hiervon abgezog. $CF^2 < CG^2$

bleibt $AF^2 > GD^2$

folglich ist auch $AF > GD$, d. i. der Halbmesser des Durchschnittes AB ist > der Halbmesser des Durchschnittes DE.

1. Zus. Durchschnitte einer Kugel, die gleich weit vom Mittelpunkt derselben liegen, sind einander gleich; und umgekehrt, liegen gleiche Durchschnitte einer Kugel *gleich weit vom* Mittelpunkt.

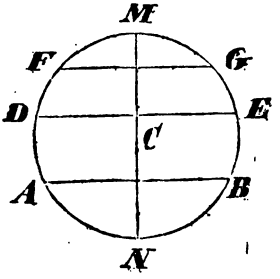
2. Zus. Geht der Durchschnitt durch den Mittelpunkt der Kugel selbst, so ist er am größten. Daher heißen Kreise auf einer Kugel, deren Mittelpunkte im Mittelpunkt der Kugel liegen, **größte Kreise** derselben.

3. Zus. Die Ebene eines jeden größten Kreises halbirt die Kugel.

4. Zus. Jede zwey größten Kreise einer Kugel halbiren einander.

5. Zus. Die Größe der Kreise, welche die verschiedenen Durchschnitte einer Kugel geben, nimmt von dem größten durch unendlich kleine Abstufungen bis auf Null ab; und von jeder Art derselben gibt es unzählige.

279. Lehrs. **Durch die Mittelpunkte der parallelen Durchschnitte einer Kugel, wie AB, DE, FG, geht derselbe Durchmesser der Kugel, MN.**



Bew. Man fälle aus dem Mittelpunkt C ein Perpendikel auf den Durchschnitt AB, so trifft dieses den Mittelpunkt desselben (277, 1. Zus.); verlängert man es durch die ganze Kugel hindurch, so steht es auch auf den übrigen parallelen Durchschnitten senkrecht (222, 2. Zus.), und trifft daher gleichfalls in die Mittelpunkte derselben (277, 1. Zus.).

Zus. Der Durchmesser, welcher durch die Mittel-

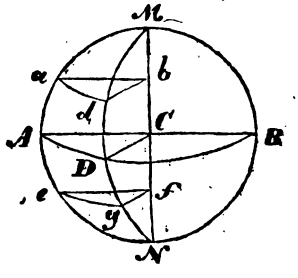
punkte paralleler Durchschnitte geht, steht senkrecht auf denselben.

280. Erklär. Die Umkreise paralleler Durchschnitte nennt man Parallelkreise; den Durchmesser, MN, der durch ihre Mittelpunkte geht, ihre Achse, und die Endpunkte desselben, M und N, ihre Pole. Ueberhaupt heißen Pole eines größten Kreises die Endpunkte desjenigen Kugel-Durchmessers, der senkrecht auf der Ebene des Kreises steht.

281. Erklär. Ein Kreis steht auf einem andern senkrecht, wenn die Ebenen beyder Kreise senkrecht auf einander stehen. Der Winkel, den zwey Kreise einer Kugel mit einander machen, ist der Neigungswinkel ihrer Ebenen. Er heißt vorzugsweise ein sphärischer, wenn die Bogen, die ihn einschließen, größten Kreisen zugehören.

282. Lehrs. Ein größter Kreis, der durch die Pole eines andern geht, steht senkrecht auf demselben, so wie auf allen Parallelkreisen desselben.

Bew. Es sey AB der Durchmesser eines größten Kreises, dessen Pole M und N sind, so ist MN senkrecht auf der Ebene des Kreises AB und aller Parallelen desselben (280.); legt man also durch MN einen größten Kreis MANB, so ist auch dessen Ebene auf der Ebene von AB und dessen Parallelkreisen senkrecht (212.), folglich steht er auf allen diesen Kreisen senkrecht (281.).

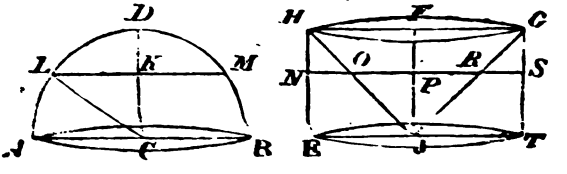


1. Zuſ. Umgekehrt, ein größter Kreis, der ſenkrecht auf einem andern ſteht, geht durch die Pole deſſelben. Denn ein Perpendikel aus dem Mittelpunkt der Kugel in der Ebene des erſten Kreiſes ſenkrecht auf die Durchſchnittslinie beyder errichtet, ſteht auf der Ebene des letztern ſenkrecht (212, 1. Zuſ.); folglich geht es durch die Pole deſſelben (280.); alſo geht auch der erſtere Kreis durch dieſe.

2. Zuſ. Legt man durch MN noch einen andern größten Kreis MDN, ſo ſchneiden die Ebenen beyder ſich unter dem Winkel ACD (208.), deſſen Maaß der Bogen AD iſt. Daher iſt AD auch das Maaß der ſphäriſchen Winkel bey M und bey N (281.). **Ein ſphäriſcher Winkel wird alſo durch den Bogen eines größten Kreiſes gemeſſen, auf welchem beyde Schenkel deſſelben ſenkrecht ſtehen.**

3. Zuſ. Der Neigungswinkel der Ebenen MAN und MDN findet ſich überall gleich groß, an welcher Stelle der Durchſchnittslinie MN man ihn auch meſſe (229, Zuſ.). Die Maaße dieſer Winkel, wie abd, efg, ſind die Bogen ad, eg, welche den Parallelkreiſen von ADB zugehören. **Daher ſind die Bogen paralleler Kreiſe, welche zwiſchen zwey größten Kreiſen, die durch ihre Pole gehen, enthalten ſind, alle einander ähnlich.**

283. Lehrſ. **Die Halbkugel ADBC iſt ⅔ ſo groß als der Cylinder ETGH, der mit ihr gleiche Grundfläche und gleiche Höhe hat.**



Bew.: Man denke sich aus dem Cylinder den geraden Kegel HJG herausgeschnitten, so macht der übrige Theil $\frac{2}{3}$ des Cylinders aus (270, 1. Zus.); und dieser ist der Halbkugel gleich, wenn er überall in gleichen Höhen gleiche Durchschnitte mit ihr hat (238.).

Man durchschneide also die Halbkugel in einer beliebigen Höhe, CK, parallel mit der Grundfläche. Der Durchschnitt LM ist $= KL^2\pi$ (277.). Es ist aber $KL^2 = CL^2 - CK^2$ (132, 4. Zus.), $= r^2 - h^2$, wenn r den Halbmesser der Kugel und h die Höhe des Durchschnittes bedeutet. Folglich ist

$$LM = (r^2 - h^2)\pi.$$

Durchschneidet man darauf den Cylinder in der Höhe $JP = h$, so ist der Durchschnitt, der hier in Betrachtung kommt, die ringförmige Fläche, die zwischen den concentrischen Kreisen mit den Halbmessern PN und PO enthalten ist, und diese ist $= (PN^2 - PO^2)\pi$ (187.). Nun ist $PN = JE = r$, und $PO = h$ (denn es ist $JP : PO = JF : FH$ und da $JF = FH = r$ ist, so ist auch $JP = PO = h$); folglich ist der Ring

$$NORS = (r^2 - h^2)\pi.$$

Denselben Werth hatte auch LM; also ist NORS = LM; folglich die Halbkugel ADBC = $\frac{2}{3}$ des Cylinders ETGH.

1. Zus. Ist der Halbmesser der Kugel $= r$, so ist der Inhalt des Cylinders, von welchem die Halbkugel $\frac{2}{3}$ ausmacht, $= r^2\pi r$ (250, 1. Zus.) $= r^3\pi$; und daher ist die Halbkugel $= \frac{2}{3} r^3\pi$; folglich die ganze Kugel $= 2 \cdot \frac{2}{3} r^3\pi = \frac{4}{3} r^3\pi$.

2. Zus. So wie die halbe Kugel $\frac{2}{3}$ eines Cylinders von gleicher Grundfläche und Höhe ist, so ist die ganze Kugel $\frac{2}{3}$ eines noch einmal so großen Cylinders, d. i. eines Cylinders, dessen Grundfläche dem größten Kreise der Kugel

und deſſen Höhe dem Durchmeſſer der Kugel gleich iſt. Der Inhalt eines ſolchen Cylinders iſt $= r^2\pi \cdot 2r = 2r^3\pi$; und hiervon $\frac{2}{3}$ ſind $= \frac{2}{3} \cdot 2r^3\pi = \frac{4}{3} r^3\pi$, wie im 1. Zuſ.

Anmerk. Bekanntlich rührt die Erfindung des in dieſem Zuſatz angegebenen Verhältniſſes vom Archimedes her, der eine eigene Schrift in zwey Büchern (περι σφαιρας και κυλινδρου), darüber hinterlaſſen hat. Dieſe iſt nebſt Archimed's Schrift über Kreismeſſung, von K. F. Hauber überſetzt und mit Anmerkk. begleitet, Tübingen. 1798. 8. erſchienen. Archimedes legte ſelbſt mit Recht einen großen Werth auf dieſe Erfindung, und wünſchte daher, daß ſie auf ſeinem Grabmale bezeichnet würde. Vergl. Cicer. Quaest. Tuscul. V. 23.

3. Zuſ. Will man in die Formel für den Inhalt der Kugel ſtatt des Halbmeſſers den Durchmeſſer ſetzen, ſo ſey $2r = d$, folglich $r = \frac{d}{2}$, und daher $r^3 = \frac{d^3}{8}$; alſo der Inhalt der Kugel $\frac{4}{3} r^3\pi = \frac{4}{3} \cdot \frac{d^3}{8} \pi = \frac{1}{6} d^3\pi$.

4. Zuſ. Bezeichnet man zwey verſchiedene Kugeln durch G und g, ihre Halbmeſſer durch R und r, ſo iſt

$$G = \tfrac{4}{3} R^3\pi$$
$$\text{und } g = \tfrac{4}{3} r^3\pi$$
$$\text{folglich } G : g = \tfrac{4}{3} R^3\pi : \tfrac{4}{3} r^3\pi$$
$$= R^3 : r^3,$$

d. i. Kugeln verhalten ſich wie die Würfel ihrer Halbmeſſer. Und daß man ſtatt Halbmeſſer auch Durchmeſſer ſetzen könne, bedarf kaum erinnert zu werden.

5. Zuſ. Aus $G : g = R^3 : r^3$ folgt $R : r = \sqrt[3]{G} : \sqrt[3]{g}$ (Ar. 348.), d. i. die Halb- (oder Durch-) meſſer der Kugeln verhalten ſich wie die Cubikwurzeln aus dem Inhalt der Kugeln.

Anmerk. Zwiſchen einem Kegel, einer Kugel und ei-

nem Cylinder zeigt sich ein merkwürdiges Verhältniß, wenn die Grundfläche des Kegels und des Cylinders dem größten Kreise der Kugel, und ihre Höhe dem Durchmesser derselben gleich ist; alsdann ist der Kegel $\frac{1}{3}$ und die Kugel $\frac{2}{3}$ des Cylinders, folglich verhalten sich diese drey Körper wie 1, 2 und 3.

284. Lehrs. **Die Oberfläche einer Kugel ist viermal so groß als der Flächeninhalt eines größten Kreises der Kugel.**

Bew. Man kann eine Kugel als einen Inbegriff einer unendlichen Menge von Kegeln betrachten, deren unendlich kleine Grundflächen in der Oberfläche der Kugel, und deren Spitzen im Mittelpunkte liegen. Die Höhe dieser Kegel ist von ihrer Seite nicht merklich verschieden, und daher dem Halbmesser der Kugel gleich. Der Inhalt aller ist der Summe ihrer Grundflächen multiplizirt mit dem dritten Theil ihrer Höhe gleich (270, 1. Zus.). Die Summe der Grundflächen aber macht die Oberfläche der Kugel aus. Man setze sie $= s$ und die Höhe $= r$, so ist der Inhalt der ganzen Kugel $= \frac{sr}{3}$. Dieser Ausdruck muß dem vorhin gefundenen (283, 2. Zus.) gleich seyn. Es ist daher $\frac{sr}{3} = \frac{4}{3} r^3\pi$, folglich $s = 4 r^2\pi$.

1. Zus. Wird der Durchmesser der Kugel $= d$ gesetzt, so ist $4 r^2\pi = d^2\pi$, folglich, **die Oberfläche der Kugel einem Kreise gleich, dessen Halbmesser dem Durchmesser der Kugel gleich ist.**

2. Zus. Bezeichnet man die Oberflächen zweyer verschiedenen Kugeln durch S und s, ihre Durchmesser durch D und d, oder ihre Halbmesser durch R und r, so findet sich durch eine ähnliche Rechnung wie 283, 4. Zus. daß

$$S : s = D^2 : d^2 = R^2 : r^2$$

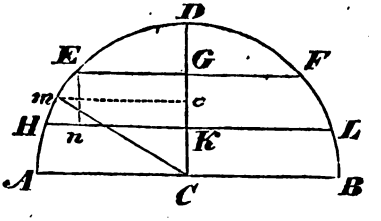
ist, d. i. daß sich die Oberflächen der Kugeln wie die Quadrate ihrer Durchmesser oder Halbmesser verhalten.

3. Zus. Die krumme Oberfläche des geraden Cylinders, von welchem die Kugel $\frac{2}{3}$ ausmacht, ist $= 2r\pi$. $2r$ (251, Zus.) $= 4r^2\pi$, folglich der Oberfläche der Kugel gleich.

4. Zus. Die ganze Oberfläche eines solchen Cylinders ist $= 6r^2\pi$, und daher die Oberfläche der Kugel ebenfalls $\frac{2}{3}$ von der ganzen Oberfläche des Cylinders.

5. Zus. Der Theil der Kugelfläche, der zwischen zwey größten Halbkreisen enthalten ist, wie MANDM (s. d. Fig. zu 282.), verhält sich zur ganzen Oberfläche, wie der sphärische Winkel bey M oder N zu 4 R. Ist also der sphärische Winkel $= n^0$, so ist der Inhalt dieses Theils der Oberfläche $= \frac{n}{360} 4r^2\pi = \frac{n}{90} r^2\pi$.

285. Aufg. Den Flächeninhalt einer Kugel-Zone, HEFL, d. i. eines zwischen zwey Parallelkreisen eingeschlossenen Streifens der Oberfläche der Kugel, zu finden.



Auflös. und Bew. Man nehme zuerst an, die Kugel-Zone sey von unendlich kleiner Breite, oder die Parallelkreise HL und EF seyen einander unendlich nahe; alsdann können die Bogen HE und FL ohne merklichen Fehler als gerade Linien angesehen, und folglich

die ganze Zone als Oberfläche eines abgestumpften geraden Kegels betrachtet werden. Der Inhalt dieser unendlich schmalen Zone, die wir z nennen wollen, ist gleich der Peripherie des zwischen HL und EF in der Mitte liegenden Parallelkreises multiplizirt mit der Seitenlinie HE (275.). Ist also om der Halbmesser des mittlern Parallelkreises, so ist $z = 2\,om\pi \cdot HE$.

Man ziehe darauf den Kugel-Halbmesser Cm und fälle aus E das Perpendikel En auf HL, so ist Dr. Cmo $\sim$ HEn. Denn es ist 1) der Winkel $Com = EnH = 1$ R.; 2) steht Cm auf dem unendlich kleinen Bogen HE senkrecht (158, 3. Zus.), und daher ist der Winkel $Emo + omC = EHn + HEn$. Nun ist $Emo = EHn$ (als corresp. Winkel); folglich ist $omC = HEn$. Also Dr. Cmo $\sim$ HEn (94.).

Hieraus folgt: $HE : En = Cm : om$: und daher $HE \cdot om = En \cdot Cm$. Also ist $z = 2\pi \cdot Cm \cdot En$, oder setzt man Cm als Kugelhalbmesser $= r$, so ist

$$z = 2\pi r\,En.$$

In diesem Ausdruck bedeutet En die Höhe einer unendlich schmalen Zone, und drückt also etwas unendlich Kleines aus.

Eine jede Zone aber, von welcher Höhe sie auch sey, läßt sich in eine unendliche Menge unendlich schmaler Zonen zertheilen, davon jede $= 2\pi r$ multiplizirt mit ihrer Höhe ist. Alle zusammen also, oder der Inhalt der ganzen Zone von endlicher Breite, ist $= 2\pi r$ multiplizirt mit der Summe ihrer Höhen.

Stellt also HEFL nunmehr eine Zone von endlicher Breite vor, deren Höhe $GK = h$ ist, so ist

$$HEFL = 2\pi rh.$$

1. Zus. Diese Formel für den Inhalt einer Kugel-Zone läßt sich auch auf die Kugel-Mütze (calotte), dergleichen EDF ist, anwenden, da nicht die Größe

der Parallelkreise, sondern nur der Abstand ihrer Ebenen von einander dabey in Betrachtung kommt. Es ist also die Kugel-Mütze EDF $= 2\pi r \cdot DG$.

2. Zus. Da $DG^2 = (r - CG)^2 = r^2 - 2rCG + CG^2$ ist

und $EG^2 = r^2 - CG^2$

so ist $DG^2 + EG^2 = 2r^2 - 2rCG = 2r(r - CG) = 2rDG$. Also $DG^2\pi + EG^2\pi = 2\pi r\, DG$ d. h. die Kugelmütze ist = der Grundfläche des Kugel-Abschnittes + der Kreisfläche, deren Halbmesser = DG ist.

3. Zus. Setzt man $h = r$, so gibt die Formel die Oberfläche der Halbkugel $= 2\pi rr = 2r^2\pi$. Also die Oberfläche der ganzen Kugel $= 4r^2\pi$, wie oben (284.).

4. Zus. Wenn die Ebenen der Parallelkreise, welche verschiedene Zonen einer Kugel begrenzen, gleichen Abstand von einander haben, so sind die Zonen einander gleich.

5. Zus. Da $HEFL = 2\pi rh$ und $s = 4r^2\pi$ (284.) ist, so ist

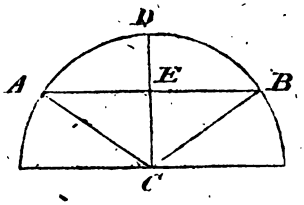
$$HEFL : s = 2\pi rh : 4r^2\pi = h : 2r$$

d. h. die Zone verhält sich zur Oberfläche der ganzen Kugel, wie die Höhe der Zone zum Durchmesser der Kugel.

6. Zus. Um die Oberfläche einer Kugel in irgend eine Anzahl gleicher Theile zu theilen, theile man den Durchmesser derselben in eben so viel gleiche Theile, und lege durch die Theilungspunkte Ebenen, auf welchen der getheilte Durchmesser senkrecht steht.

7. Zus. Es sey $2r : \varrho = \varrho : h$, so ist $2rh = \varrho^2$; folglich $2rh\pi = \varrho^2\pi$ d. h. die Zone ist der Fläche eines Kreises gleich, dessen Halbmesser die mittlere Proportionallinie zwischen dem Durchmesser der Kugel und der Höhe der Zone ist.

286. Aufg. Den Inhalt eines Kugel-Ausschnittes, ADBC, zu finden.



Auflöſ. und Bew. So wie die ganze Kugel als ein Inbegriff von Kegeln von unendlich kleiner Grundfläche und einer Höhe = dem Kugel-Halbmeſſer betrachtet werden kann (284.), ſo kann auch der Ausſchnitt als ein Inbegriff ſolcher Kegel angeſehen werden. Es findet ſich daher der Inhalt deſſelben, wenn man die Oberfläche des Kugel-Abſchnitts, ADB, mit dem dritten Theil des Kugel-Halbmeſſers, r, multiplizirt. Setzt man alſo die Höhe des Abſchnitts nehmlich DE = h, ſo iſt der Kugel-Ausſchnitt ADBC $= 2\pi rh \cdot \frac{r}{3} = \frac{2}{3}\pi r^2 h$.

1. Zuſ. Es iſt $\frac{2}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot 2h$, folglich der Kugel-Ausſchnitt ADBC einem Kegel gleich, deſſen Grundfläche dem größten Kreiſe der Kugel, und deſſen Höhe der doppelten Höhe des Abſchnittes ADBE gleich iſt.

2. Zuſ. Wird h = r, ſo wird der Ausſchnitt, der Halbkugel gleich, und die Formel gibt den Inhalt derſelben $= \frac{2}{3}\pi r^2 r = \frac{2}{3} r^3 \pi$, wie oben (283.).

3. Zuſ. Der Inhalt des Kugel-Abſchnitts, ADBE, findet ſich, wenn man von dem Kugel-Ausſchnitt ADBC den Kegel ABC abzieht. Er iſt alſo $= \frac{2}{3}\pi r^2 h - \frac{1}{3}\pi AE^2 \cdot EC$; wofür man durch eine nicht ſchwere, aber etwas weitläuftige, Rechnung den bequemern Ausdruck

$$\pi h^2 (r - \tfrac{1}{3} h)$$

finden kann. Hiernach alſo iſt der Kugel-Abſchnitt, deſſen Höhe = h iſt, einem Cylinder gleich, deſſen Grund-

fläche einen Halbmesser = h hat, und dessen Höhe = r — ⅓ h ist.

4. Zus. Der Inhalt des Kegels ABC ist = ⅓ πh (2r — h) . (r — h).

5. Zus. Der Inhalt eines Kegels von gleicher Grundfläche und Höhe mit dem Kugel-Abschnitt ADBE ist = ⅓ πh² (2r — h). Er verhält sich daher zu dem Kugel-Abschnitt = (2r — h) : (3r — h).

287. Einige stereometrische Aufgaben zur Uebung.

1) Den Inhalt der Seitenflächen einer Pyramide zu finden, deren Grundfläche ein Quadrat ist und deren Seitenflächen alle einander gleich sind — die Seite des Quadrats = a, und die Höhe der Pyramide = h gesetzt.

2) Das Verhältniß der Seitenflächen einer solchen Pyramide zur krummen Oberfläche eines geraden Kegels zu finden, dessen Grundfläche und Höhe der Grundfläche und Höhe der Pyramide gleich ist.

3) Den Inhalt eines Tetraedrums zu finden, dessen Seitenlinie = a ist; ingleichen das Verhältniß des Quadrats der Seitenlinie zum Quadrat des Durchmessers der umschriebenen Kugel. (Vergl. Euclid. XIII. 13.)

4) Den Durchmesser der Grundfläche und die Höhe eines Cylinders zu finden, dessen Inhalt m Cubikfuße beträgt, wenn die Höhe noch einmal so groß, als der Durchmesser der Grundfläche seyn soll.

5) Den Halbmesser einer Kugel zu finden, deren Inhalt einem Würfel gleich sey, dessen Seite = a ist.

6) Den Durchmesser der Grundfläche und die Höhe eines Cylinders zu finden, dessen Oberfläche, die beyden Grundflächen mit eingerechnet, der Oberfläche einer Kugel gleich ist, deren Halbmesser = r ist, wenn Höhe und Durchmesser des Cylinders einander gleich seyn sollen.

7) Wenn eine Halbkugel und ein Kegel gleiche Grundflächen haben, die Höhe des Kegels aber noch ein-

mal so groß, als die der Halbkugel ist, diejenige Stelle in der Halbkugel zu finden, an welcher ein der Grundfläche paralleler Durchschnitt, irgend einem gegebenen, mit der Grundfläche parallelen, Durchschnitt des Kegels gleich ist.

8) Die Höhe eines Kegels von gleichem Inhalt mit einem Kugel-Abschnitt zu finden, wenn beyde gleiche Grundflächen haben sollen. Der Halbmesser der Kugel sey = r; die Höhe des Kugel-Abschnittes = h.

9) Die Höhe eines Kegels von gleicher Oberfläche mit dem Kugel-Abschnitt, unter der Bedingung und Voraussetzung wie bey der vorhergehenden Aufgabe, zu finden.

10) Einen abgestumpften geraden Kegel durch einen mit der Grundfläche parallelen Durchschnitt zu halbiren.

11) Den Inhalt eines Kugelstücks zu finden, das zwischen zwey parallelen Kreisflächen enthalten ist, und zwar

a) wenn die eine Kreisfläche durch den Mittelpunkt der Kugel geht.

b) wenn beyde Kreisflächen bestimmte Abstände vom Mittelpunkt haben.

12) Den Unterschied zwischen einem solchen Kugelstück und einem Cylinder zu finden, dessen Grundfläche dem in der Mitte des Kugelstücks liegenden Kreise, und dessen Höhe der Höhe des Kugelstücks gleich ist.

Dritte Abtheilung.

Trigonometrie.

288. Der Gegenstand der Trigonometrie überhaupt genommen sind Dreyecke, und ihr vornehmster Zweck ist, aus gewissen gegebenen Theilen eines Dreyecks — unter den Theilen eines Dreyecks aber werden seine Seiten und Winkel verstanden — einen oder den andern der übrigen Theile zu finden. Die gegebenen Theile müssen bestimmende Stücke des Dreyecks, d. h. solche seyn, von welchen die Gestalt und Größe desselben abhängig ist (54.). Die Trigonometrie geht aber anders zu Werke als die eigentliche Geometrie bey ähnlichen Aufgaben. Diese findet die gesuchten Theile unmittelbar durch Construction der ganzen Dreyecke, die Trigonometrie hingegen jeden Theil einzeln durch Rechnung. Dieß macht den unterscheidenden Charakter der Trigonometrie aus. Sie kann als eine Verbindung der Geometrie und Arithmetik angesehen werden. Daher müssen auch die in einer trigonometrischen Aufgabe gegebenen Größen so beschaffen seyn, daß sie in einer Rechnung gebraucht werden können, d. h. die Linien müssen nach irgend einem Längenmaaß, und die Winkel nach ihrer Größe, in Graden, Minuten, Secunden, bestimmt seyn.

289. Zur Auflösung ihrer Aufgaben wendet die Trigonometrie Hülfsmittel an, die ihr eigenthümlich sind, und die unter dem Namen der trigonometrischen Li[illegible]ien werden. Dieß sind gerade Linien, von

deren Lage und Verhältniß gegen einander die Größe gewisser Winkel abhängig ist, und die also dazu dienen können, diese Größe zu bestimmen. Von der Erklärung dieser Linien muß daher der Unterricht in der Trigonometrie anfangen.

290. Man unterscheidet aber zweyerley Arten von Dreyecken, ebene und sphärische oder Kugeldreyecke. Die erstern werden von drey geraden Linien eingeschlossen, und sind dieselben, welche die Planimetrie betrachtet; die letztern werden von drey Bogen größter Kreise einer Kugel eingeschlossen, und gehören daher in das Gebiet der Stereometrie.

291. Hiernach wird die Trigonometrie selbst in die ebene und sphärische eingetheilt; jene handelt von der Ausmessung ebener, diese von der Ausmessung sphärischer Dreyecke.

Anmerk. Die Trigonometrie hat fast auf die ganze übrige Mathematik einen Einfluß, und es ist kaum glaublich, wie weit ihre Anwendbarkeit sich erstreckt. Das Studium derselben ist daher von der größten Wichtigkeit.

Erster Abschnitt.

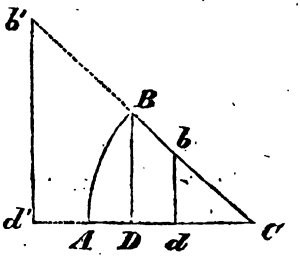
Von den trigonometrischen Linien.

292. Es sey ACB ein ebener Winkel und kleiner als 1 R.; man fälle von dem Ende des einen Schenkels, B, ein Perpendikel, BD, auf den andern Schenkel, so ist klar, daß dieses größer oder kleiner werden müßte, wenn der Winkel C größer oder kleiner würde.

Fällte man aus b ein Perpendikel, bd, so würde zwar $bd < BD$ seyn, aber das Verhältniß

bd : Cb würde dem Verhältniß von BD : CB gleich seyn (88, 2. Zus.).

Aus demselben Grunde würde auch das Verhältniß von b'd' : Cb' = BD : CB seyn.



293. Also bleibt das Verhältniß zwischen dem Schenkel eines Winkels und dem Perpendikel, das von seinem Endpunkt auf den andern Schenkel gefällt wird, bey einem Winkel von bestimmter Größe, immer dasselbe, der Schenkel mag so groß seyn, als er will. Sobald aber die Größe des Winkels sich ändert, ändert sich auch das Verhältniß zwischen dem Schenkel und dem Perpendikel.

294. Folglich dient die Größe des Winkels dazu, das Verhältniß zwischen seinem Schenkel und dem von ihm gefällten Perpendikel zu bestimmen; und umgekehrt wird durch dieses Verhältniß hinwiederum die Größe des Winkels bestimmt.

Z. B. Es soll ein Winkel construirt werden, bey welchem der Schenkel zum Perpendikel wie 3 : 2 oder 5 : 3 ist, so wird man immer einen Winkel von derselben Größe erhalten, man mag die Theile groß oder klein nehmen.

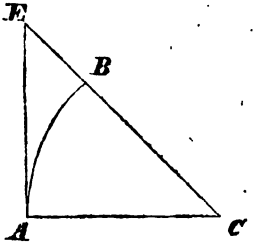
295. Das Perpendikel BD heißt in Rücksicht seines Verhältnisses zum Schenkel CB der Sinus des Winkels ACB.

296. BD heißt auch der Sinus des Bogens AB, s Maaß des Winkels ACB ist. Denn so wie die

ie des Bogens mit der Größe des Winkels zu- oder
nmt, so hängt auch die Größe des Perpendikels von
größe des Bogens ab. CB ist dann als Halbmes-
u betrachten, und auf diesen das Verhältniß des
s zu beziehen.

297. Ein anderes Hülfsmittel zur Bestimmung der
e eines Winkels erhält man, wenn man auf das
des einen Schenkels, CA, (s. die folgende Fig.)
erpendikel AE errichtet, und dieses so weit verlän-
bis es von dem andern, gleichfalls verlängerten,
nkel CB in E geschnitten wird. Es ist nehmlich klar,
auch dieses Perpendikel größer oder kleiner werden
so wie der Winkel ACB oder dessen Bogen AB
der abnimmt. Also ist das Verhältniß des-
en zu dem Schenkel oder Halbmesser, CA,
h die Größe des Winkels ACB oder Bo-
AB bestimmt, und dient folglich hin-
erum, die Größe des Winkels oder Bo-
zu bestimmen.

Ein größerer oder kleinerer Schenkel oder Halbmes-
ürde, wie bey dem Sinus, wohl die absolute Größe
Perpendikels, aber nicht sein Verhältniß
Halbmesser ändern. Dieses bleibt für einen
mten Winkel oder Bogen dasselbe, wie groß auch
Schenkel oder Halbmesser angenommen werde.



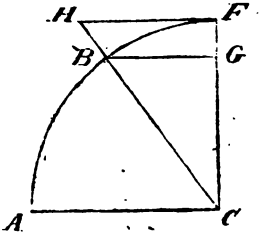
298. Es heißt aber das Perpendikel AE, in Rücksicht seines Verhältnisses zum Schenkel oder Halbmesser CA, die Tangente des Winkels ACB oder des Bogens AB.

Wie unterscheidet sich die trigonometrische Tangente von der geometrischen?

299. So wie die Größe des Perpendikels AE von der Größe des Winkels ACB abhängig ist, so auch die Größe der Linie CE. Denn je größer AE ist, desto größer muß auch CE seyn, um den Punkt E zu erreichen. Folglich wird auch das Verhältniß von CE : CA durch die Größe des Winkels ACB oder des Bogens AB bestimmt, und dient daher hinwiederum zur Bestimmung der Größe des Winkels oder Bogens.

300. Die Linie CE aber heißt, in Rücksicht ihres Verhältnisses zu CA, die Secante des Winkels ACB oder des Bogens AB.

301. Wenn der Winkel ACB < 1 R. ist, wie bisher angenommen, so läßt sich mit ihm ein anderer, BCF, verbinden, der mit ihm zusammen $= 1$ R. ist. Der Winkel BCF heißt alsdann der Ergänzungswinkel (ang. complementi) von ACB.



302. Die Größe des Ergänzungswinkels hängt von der Größe des Hauptwinkels ACB ab, und umge-

kehrt, die Größe des Hauptwinkels von der Größe des Ergänzungswinkels. Folglich hängt auch der Sinus, die Tangente und die Secante des Winkels BCF von dem Winkel ACB ab, d. h. sie werden durch die Größe des Winkels ACB bestimmt. Also können sie auch hinwiederum gebraucht werden, die Größe des Winkels ACB zu bestimmen.

303. Man nennt aber den Sinus, die Tangente und die Secante des Ergänzungswinkels BCF, in Beziehung auf den Hauptwinkel ACB oder auf den Bogen AB, dessen Cosinus, Cotangente und Cosecante.

In vorstehender Figur ist BG der Cosinus, FH die Cotangente, und CH die Cosecante des Winkels ACB.

304. Cosinus, Cotangente und Cosecante sind also nicht eine besondere Art von Linien, sondern sie sind einerley mit den Sinussen, Tangenten und Secanten selbst, nur in Beziehung auf einen andern Winkel genommen. Dieselbe Linie, welche z. B. den Sinus, oder die Tangente, oder die Secante eines Winkels oder Bogens von 30 Graden ausmacht, ist auch der Cosinus, oder die Cotangente, oder die Cosecante eines Winkels oder Bogens von 60 Graden.

305. Die genannten Linien, deren Verhältniß zum Halbmesser durch die Größe eines Bogens oder Winkels bestimmt wird, nehmlich: der Sinus, die Tangente, die Secante, der Cosinus, die Cotangente und Cosecante sind es, die unter den Namen der trigonometrischen Linien begriffen werden.

Eigentlich gehört auch noch der Sinus versus und Cosinus versus dazu. Da man aber von diesen selten Gebrauch macht, so sind sie hier nicht in Betrachtung gezogen.

306. Denkt man sich, der Winkel ACB oder der Bogen AB habe bis auf Null abgenommen, so wird

Sinus des andern; die Tangente des einen der Tangente des andern u. s. w., daß aber in der gegenseitigen Lage oder Entstehungsart der meisten eine Verschiedenheit statt findet.

316. Man betrachtet daher die trigonometrischen Linien des spitzen Winkels durchgehends als positiv, hingegen die Tangente, die Secante, den Cosinus und die Cotangente des stumpfen Winkels als negativ.

Die Tangente, der Cosinus und die Cotangente des stumpfen Winkels sind ihrer Lage nach den gleichbenannten Linien des spitzen Winkels offenbar entgegengesetzt. Die Secante des stumpfen Winkels ist zwar nicht der Lage nach der Secante des spitzen entgegengesetzt, aber sie entsteht durch eine rückwärts gehende Verlängerung des Halbmessers, indeß die Secante des spitzen Winkels entsteht, wenn der Halbmesser vorwärts verlängert wird.

Ob eine dieser Linien in einem Fall als das Entgegengesetzte von dem, was sie in einem andern ist, zu betrachten sey, läßt sich aus der Art, wie sie aus dem einen Zustand in den andern übergeht, beurtheilen. Die Veränderungen nehmlich, die eine jede dieser Linien bey Veränderung des ihr zugehörigen Winkels in ihrer Größe erleidet, geschehen nicht sprungweise, sondern nach dem Gesetz der Stetigkeit durch unendlich kleine Abstufungen. Geschieht es nun, daß, während ein Winkel von einer Größe bis zu einer andern wächst, die ihm zugehörige Linie in einem dazwischen liegenden Punkte entweder unendlich groß oder = 0 wird, so sind ihre Größen auf beyden Seiten dieses Punktes als entgegengesetzt zu betrachten. Nimmt sie aber während dieser Veränderungen des ihr zugehörigen Winkels nur bis auf eine endliche Größe zu oder ab, so sind ihre Größen einander nicht entgegengesetzt.

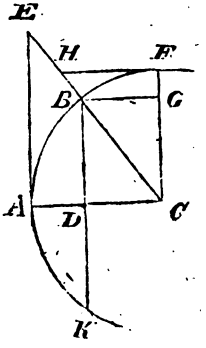
317. Man hat die trigonometrischen Linien auch für solche Winkel, die größer als 2 R. sind, und unterscheidet sie daher, je nachdem sie Winkeln zugehören, die innerhalb des ersten Quadranten des Kreises fallen, d. i. kleiner als 1 R. sind, oder Winkeln, die bis zum zweyten, oder bis zum dritten, oder bis zum vierten Quadranten gehen; doch liegt es außer dem Plane

es Lehrbuchs, sie in dieser Beziehung besonders zu achten.

Um indessen leicht zu übersehen, wie sie sich in Rücksicht + und — bey der verschiedenen Größe der Winkel ver- ten, kann folgende Tabelle dienen, in welcher die römi- n Zahlen die Quadranten, bis zu welchen die Win- gehen, anzeigen.

	+	—
Sinus	I. u. II.	III. u. IV.
Cosinus	I. u. IV.	II. u. III.
Tangente	I. u. III.	II. u. IV.
Cotangente	I. u. III.	II. u. IV.
Secante	I. u. IV.	II. u. III.
Cosecante	I. u. II.	III. u. IV.

318. Da der Sinus des rechten Winkels der größte er den Sinussen, und dem Halbmesser gleich ist, auf lchen das Verhältniß aller trigonometrischen Linien zu iehen ist, so wird er der Sinus totus genannt; o eben diese Benennung bekommt der Halbmesser in ziehung auf die trigonometrischen Linien. Setzt man i Sinus totus = 1, so muß die Größe aller übrigen nusse durch Brüche ausgedrückt werden.



319. Betrachtet man den Sinus als Linie im Kreiſe, ſo macht er die Hälfte einer Sehne aus. Denn wenn BD der Sinus des Bogens AB iſt, und man verlängert ihn bis K, ſo wird die Sehne BK durch CA halbirt (138.). Auch iſt der dem Sinus zugehörige Bogen AB die Hälfte des der Sehne zugehörigen Bogens BK (142.).

Dieß lehrt, wie man aus dem Verhältniß der Sehne eines Bogens zum Halbmeſſer den Sinus des halb ſo großen Bogens finden könne.

320. Der Coſinus BG des Winkels ACB iſt = CD (77, 2. Zuſ.). Nun iſt $CB^2 = BD^2 + CD^2$ (132.); ſieht man daher den Halbmeſſer dieſes Kreiſes überhaupt als Sinus totus an, und bezeichnet ihn durch r; ferner, ſetzt man den Winkel ACB, da ſeine Größe gleichgültig iſt, = x; ſo iſt BD = sin x; CD = cos x und daher

$$r^2 = (\sin x)^2 + (\cos x)^2;$$
$$\sin x = \sqrt{[r^2 - (\cos x)^2]}$$
$$\cos x = \sqrt{[r^2 - (\sin x)^2]}.$$

321. Ueberhaupt laſſen ſich die trigonometriſchen Linien gegenſeitig durch einander beſtimmen. Denn es iſt

1) CD : BD = CA : AE

d. i. $\cos x : \sin x = r : \text{tang } x$

folglich $\text{tang } x = r \cdot \frac{\sin x}{\cos x}$

ingleichen $\sin x = \frac{\cos x \cdot \text{tang } x}{r}$

und $\cos x = r \cdot \frac{\sin x}{\text{tang } x}$

2) CG : GB = CF : FH

d. i. $\sin x : \cos x = r : \cot x$

folglich $\cot x = r \cdot \frac{\cos x}{\sin x}$

Setzt man $r = 1$, so kann es in allen diesen Formeln wegbleiben.

322. Aus Vergleichung der Ausdrücke für die Tangente und Cotangente ergibt sich

$$\cot x = \frac{r^2}{\text{tang } x}$$

$$\text{tang } x = \frac{r^2}{\cot x}$$

$$r^2 = \text{tang } x \,.\, \cot x$$

oder, für $r = 1$, $\cot x = \frac{1}{\text{tang } x}$

$$\text{tang } x = \frac{1}{\cot x}$$

$$1 = \text{tang } x \,.\, \cot x$$

Anmerk. Eben so leicht können die allgemeinen Ausdrücke für die Secante und Cosecante angegeben werden; da sie aber weniger gebraucht werden, so sind sie hier übergangen.

323. Der große Vortheil, den die trigonometrischen Linien in der Mathematik gewähren, beruht darauf, daß man Mittel habe, für jeden gegebenen Winkel das Verhältniß jeder der ihm zugehörigen trigonometrischen Linien; und umgekehrt, für jedes gegebene Verhältniß irgend einer Art der trigonometrischen Linien den zugehörigen Winkel, mit Leichtigkeit zu finden. Und dieses Mittel gewähren die trigonometrischen Tafeln.

324. Diese enthalten die Verhältnisse der trigonometrischen Linien für alle Winkel oder Bogen des ersten Quadranten von Grad zu Grad, von Minute zu Minute, und zum Theil von Secunde zu Secunde — und wenigstens lassen sie sich auch für die Secunden ohne große Schwierigkeit aus ihnen herleiten.

325. Um ihre Einrichtung zu verstehen, muß man

erwägen, daß alle Verhältnisse der trigonometrischen Linien auf den Halbmesser oder Sinus totus zu beziehen sind. Setzt man also für diesen irgend eine Zahl fest, so werden die trigonometrischen Linien eines jeden Winkels durch Zahlen ausgedrückt, die sich zu der festgesetzten eben so verhalten, wie die Linien selbst zu dem Halbmesser. Es ist daher nur nöthig, die dem Halbmesser zugehörige Zahl ein für allemal anzumerken, und dann der trigonometrischen Linie eines jeden Winkels die Zahl beyzusetzen, welche ihr Verhältniß zum Halbmesser erfordert. Daß dieses lauter unbenannte Zahlen seyn müssen, versteht sich von selbst.

Gemeiniglich setzt man den Halbmesser = 1, und dann werden die für die trigonometrischen Linien nöthigen Brüche durch Decimalbrüche ausgedrückt, die in den Tafeln von mittlerer Größe bis auf 7 Stellen gehen. Dafür kann auch der Halbmesser = 10000000 gesetzt, und der Decimalbruch als eine ganze Zahl angesehen werden.

Ferner ist zu bemerken, daß, da der Cosinus eines Winkels nichts anders als der Sinus des Ergänzungswinkels ist, dieselben Zahlen, welche die Verhältnisse der Sinusse ausdrücken, auch zur Bezeichnung der Cosinusse gebraucht werden können. Wenn z. B. die Zahl m den Sinus von 35° 28′ 42″ bezeichnet, so drückt sie auch den Cosinus von 54° 31′ 18″ aus (304.).

Eben so verhält es sich mit den Zahlen für die Tangenten und Cotangenten, für die Secanten und Cosecanten.

Die trigonometrischen Tafeln sind daher so eingerichtet, daß jede Zahl eine doppelte Bedeutung hat, einen Sinus und Cosinus, oder eine Tangente und Cotangente ꝛc. bezeichnet.

Die Secanten und Cosecanten werden in vielen Tafeln nicht aufgeführt, weil ihr Gebrauch entbehrlich ist.

Da die Sinusse die Hälften der Sehnen noch einmal

so großer Bogen sind, so können die Sinus-Tafeln auch die Stelle der Chorden-Tafeln vertreten.

326. Endlich finden sich in den Tafeln, außer den trigonometrischen Linien selbst, auch noch die Logarithmen derselben, d. h. die Logarithmen derjenigen Zahlen, welche das Verhältniß der Linien ausdrücken. Denn die trigonometrischen Rechnungen führen, wie sich weiter unten zeigen wird, häufig auf eine Regel de tri, wobey man zu multipliziren und zu dividiren hat; und da diese Operationen durch die Logarithmen so sehr erleichtert werden, so gewährt es eine große Bequemlichkeit, sich statt der trigonometrischen Linien ihrer Logarithmen bedienen zu können. In manchen Tafeln werden daher nicht einmal die trigonometrischen Linien selbst, sondern nur ihre Logarithmen aufgeführt. Man hat aber ebenfalls um der größern Bequemlichkeit in den Rechnungen willen, den Logarithmen des Sinus totus = 10 festgesetzt, folglich den Sinus totus selbst = 10 000 000 000 angenommen.

Was übrigens die specielle Einrichtung dieser oder jener Ausgabe logarithmisch-trigonometrischer Tafeln anbetrifft, so findet man gemeiniglich in einer ihnen vorgesetzten Einleitung die nöthige Auskunft darüber, und Anweisung zum Gebrauch derselben.

327. Zur Berechnung trigonometrischer Tafeln zeigt die höhere Geometrie mancherley Wege. Indessen ist es zu einem verständigen Gebrauch der Tafeln nicht nothwendig, diese Methoden zu kennen. Es ist schon hinreichend, einzusehen, daß die Verhältnisse der trigonometrischen Linien von der Größe der Winkel abhängig sind, wenn man auch die Mittel nicht kennt, die Größe dieser Verhältnisse selbst zu bestimmen. Aus Obigem erhellet, daß man aus den Sehnen die Sinusse und aus diesen die übrigen trigonometrischen Linien herleiten könne; und dieß kann zu einer leichten Berechnung derse-

den für einige Fälle führen. Auch kann man von den obigen Formeln (320. ff.) zur Entdeckung von Druckfehlern in den Tafeln Gebrauch machen.

Zweyter Abschnitt.

Von der Ausmessung ebener Dreyecke.

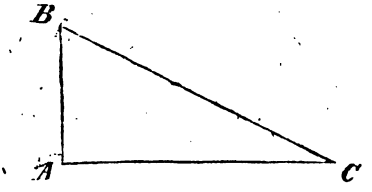
328. Es ist hier weniger die Rede von der Ausmessung des Flächeninhalts der Dreyecke, als von der Auffindung der Größe einzelner Seiten oder Winkel derselben — wenigstens kommt das letztre viel öfter vor, als das erstere.

329. Wenn von den Seiten und Winkeln eines Dreyecks je drey Stücke gegeben sind — worunter jedoch wenigstens eine Seite seyn muß — und zugleich ihre Lage gegen einander bestimmt ist, so lassen sich die übrigen Stücke daraus finden. Dieß erhellet aus dem, was oben (55. ff.) von der Gleichheit der Dreyecke gesagt ist.

330. Auf die Ausmessung rechtwinkliger Dreyecke lassen sich die trigonometrischen Linien unmittelbar anwenden. Zur Ausmessung schiefwinkliger werden noch einige andere Lehrsätze erfordert.

I. Von der Ausmessung rechtwinkliger ebener Dreyecke.

331. Hierbey brauchen außer dem rechten Winkel nur zwey Stücke gegeben zu seyn, worunter wenigstens eine Seite seyn muß.



332. Es sey also ABC ein rechtwinkliges Dreyeck, ıb es werde gegeben

1) eine Seite und ein Winkel, und zwar

a) die Hypotenuse BC und der Winkel C;

ıb gesucht — der Kathete AB; so ist BC : AB in :m Verhältniß eines Halbmessers oder des Sinus totus ım sin C. Man hat daher folgende Proportion:

$$r : \sin C = BC : AB$$

$$\text{folglich } AB = \frac{BC \cdot \sin C}{r}$$

$$\text{und } \log AB = \log BC + \log \sin C - \log r.$$

Anmerk. Durch den Winkel C ist zugleich der Win- l B bestimmt; es ist daher einerley, welcher von beyden :geben ist. Auch ist es einerley, welcher Kathete gesucht ird, denn es ist BC : AC in dem Verhältniß eines Halb- essers zum sin B. Will man aber gleichwohl den Winkel gebrauchen, so ist BC : AC = r : cos C.

b) der Kathete AC und der Winkel C;

nd gesucht — der andere Kathete AB; so ist AC: B in dem Verhältniß eines Halbmessers zur tang C nd daher

$$r : \operatorname{tg} C = AC : AB.$$

Anmerk. Wäre AB gegeben und AC gesucht, so kehrte ıan die Verhältnisse der Proportion um: tg C : r = AB : C, oder man bezöge alsdann das Verhältniß auf den Win- el B und setzte: r : tg B = AB : AC; oder — da C der Er- änzungswinkel von B ist, und die Tangente eines Winkels = der Cotang. des Ergänzungswinkels — r : cot C = AB : AC.

Soll die Hypotenuse BC gesucht werden, so BC : AC im Verhältniß eines Halbmessers zum cos C und daher

$$\cos C : r = AC : BC.$$

2) werden zwey Seiten gegeben, und zwar

a) die Hypotenuse BC und der Kathete AC; und gesucht — der Winkel C: so ist

$$BC : AC = r : \cos C.$$

Wird der Winkel B gesucht, so ist

$$BC : AC = r : \sin B.$$

Hiervon läßt sich leicht die Anwendung auf den Fall machen, daß AB anstatt AC gegeben ist.

b) beyde Katheten, so ist

$$AC : AB = r : \operatorname{tg} C$$

und $$AB : AC = r : \operatorname{tg} B,$$

wodurch man jeden der beyden Winkel finden kann.

Anmerk. Die Hypotenuse kann aus den beyden Katheten vermittelst des pythagoräischen Lehrsatzes gefunden werden. Will man sie trigonometrisch berechnen, so muß man erst einen der daran liegenden Winkel suchen.

333. Der Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreyecks wird durch das halbe Produkt seiner Katheten ausgedrückt; man kann ihn also trigonometrisch finden, wenn man die Katheten nach den vorhergehenden Proportionen aufsucht. Ist ein Kathete AC und der Winkel C oder B gegeben, so ist

$$\text{Dr. } ABC = AC^2 \cdot \frac{\operatorname{tg} C}{2r}$$

$$= AC^2 \cdot \frac{r}{2 \operatorname{tg} B} = AC^2 \cdot \frac{\cot B}{2r}$$

Ist die Hypotenuse BC und der Winkel C oder B gegeben, so ist

$$\text{Dr. } ABC = BC^2 \cdot \frac{\sin C \cdot \cos C}{2r^2}$$

$$= BC^2 \cdot \frac{\sin B \cdot \cos B}{2r^2}.$$

334. Beyspiele zur Auflösung ebener rechtwinkliger Dreyecke:

1. Die Höhe eines Thurms (x) zu finden, wenn der Thurm in einer Entfernung von 620 Fuß unter einem Winkel von 13° 36′ erscheint.

Es ist $x = \frac{620 \cdot \text{tg } 13^\circ\ 36'}{r}$.

2. Wenn eine Last von 12 Ctrn. und 72 ℔ auf einer schiefen Ebene liegt, deren Neigungswinkel 28° 34′ 40″ beträgt, die Kraft (x) zu finden, mit der sie an der schiefen Ebene herunter gleitet, wenn die Friction bey Seite gesetzt wird*).

Es ist x in Pfunden ausgedrückt $= \frac{1272 \cdot \sin 28^\circ\ 34'\ 40''}{r}$.

3. Die Entfernung des Mondes von der Erde (x) zu finden, wenn der Erdhalbmesser = 859,43 geogr. Meilen und die Horizontal-Parallaxe des Mondes (d. i. der Winkel, unter welchem der Erdhalbmesser, der nach dem Punkt der Erdoberfläche geht, in dessen Horizont der Mond sich befindet, vom Monde aus gesehen erscheint) = 57′ 45″ ist.

Es ist $x = \frac{859{,}43 \cdot r}{\sin 57'\ 45''}$.

4. Die Größe (x) eines Parallelkreises auf der Erdkugel in der Breite von 50° 57′ 4″ in geograph. Meilen zu finden, wenn der Aequator 5400 solcher Meilen beträgt.

Es ist $x = \frac{5400 \cdot \cos 50^\circ\ 57'\ 4''}{r}$.

5. Den Umfang (x) und den Inhalt (y) eines regelmäßigen Neunecks zu finden, wenn der Halbmesser des umschriebenen Kreises = 15 Fuß ist.

---

*) *Vergl. mein* Lehrb. d. Physik. §. 72.

Es ist $x = 18 \cdot \frac{15 \cdot \sin 20^\circ}{r}$

und $y = 9 \cdot \frac{15 \cdot \sin 20^\circ}{r} \cdot \frac{15 \cdot \cos 20^\circ}{r}$

$= 9 \cdot \frac{15^2 \cdot \sin 20^\circ \cdot \cos 20^\circ}{r^2}$.

6. Zu finden, wie weit man von einem Berge sehen kann, dessen Höhe über der Meeresfläche 3270 par. Fuß beträgt, wenn der Halbmesser der Erdkugel = 19,632100 par. Fuß ist. Die Weite, in Graden eines größten Kreises der Erdkugel ausgedrückt, deren jeder 15 geogr. Meilen beträgt, sey = x und der Erdhalbmesser = a, so ist

$$\cos x = \frac{a}{a + 3270} r.$$

7. Wie weit müßte man sich von der Erdkugel entfernen, um ein solches Stück von ihr zu übersehen, als die kalte Zone beträgt?

8. Wie weit muß man sich von einem Gegenstande entfernen, (die Größe desselben = 1 gesetzt), damit er unter einem Sehwinkel von einer Minute, oder einer Secunde erscheine? (Vergl. mein Lehrb. d. Phys. §. 237.)

9. Wie weit wird sich der Schatten einer 80 Fuß hohen Pyramide auf einer Ebene erstrecken, wenn die Sonne 25 Grad über dem Horizont steht?

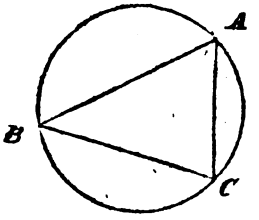
10. Unter welcher geographischen Breite beträgt der Umfang des Parallelkreises 1000 geographische Meilen?

11. Wie viel beträgt das Gesichtsfeld einer Röhre, die drey Fuß lang, und zwey Zoll weit ist?

12. Wenn die Seiten eines geraden Kegels einen Winkel von 26 Grad einschließen, und der Kegel wird in einem Abstande von 5 Fuß von der Spitze, parallel mit der Grundfläche, durchschnitten, wie groß ist der Halbmesser des Durchschnittes?

II. Von der Ausmessung schiefwinkliger ebener Dreyecke.

335. Lehrs. In einem Dreyeck verhalten sich die Seiten, wie die Sinusse der ihnen gegenüberliegenden Winkel.



Bew. Es sey ABC ein Dreyeck von beliebiger Gestalt; man beschreibe um dasselbe einen Kreis, so ist das Maaß des Winkels A der halbe Bogen BC (146, 2. Zus.), also

$$A = \tfrac{1}{2} \text{ arc } BC$$

Eben so ist $B = \frac{1}{2}$ arc AC.

Ferner ist die Hälfte der Sehne BC = dem Sinus des halben Bogens BC (319.), d. i.

$$\tfrac{1}{2} BC = \sin \tfrac{1}{2} \text{ arc } BC = \sin A$$

Eben so ist $\frac{1}{2} AC = \sin \frac{1}{2}$ arc $AC = \sin B$

folglich $\frac{1}{2} BC : \frac{1}{2} AC = \sin A : \sin B$

oder $BC : AC = \sin A : \sin B$

Auf gleiche Weise läßt sich der Beweis für jede zwey andern Seiten und die ihnen gegenüberstehenden Winkel geben — also gilt der Satz allgemein.

Anmerk. Der vorstehende Satz ist einer der wichtigsten in der ganzen Trigonometrie, auf dem, wie Klügel sagt, die Ausmessung des Himmels und der Erde beruht.

336. Lehrs. Die Summe zweyer Seiten eines Dreyecks verhält sich zur Differenz

derselben, wie die Tangente der halben Summe der gegenüberliegenden Winkel zur Tangente der halben Differenz derselben.

Bew. Es sey ABC ein Dreyeck von beliebiger Gestalt; C bezeichne den Winkel ACB, und AB und BC seyen die Seiten, von denen der Satz bewiesen werden soll. Man verlängere AB so, daß AD = AB + BC werde; ingleichen schneide man BE = BC ab; alsdann ist AE = AB — BC.

Darauf ziehe man CE und CD, so ist der Winkel CBD = C + A. Es ist aber auch Winkel CBD = o + u = 2u (weil o = u ist (55, 2. Zus.)); folglich ist C + A = 2u; und daher u = ½ (C + A).

Ferner ist u = A + x; folglich ist x = u — A = ½ (C + A) — A = ½ (C — A).

Endlich ziehe man EF senkrecht auf CE; und da auch CD senkrecht auf CE ist (146, 7. Zus.), so ist

CE : CD = r : tang u

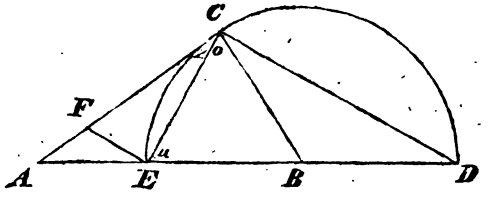
ingleichen CE : EF = r : tang x

folglich CD : EF = tg u : tg x

Es ist aber CD : EF = AD : AE (88, 2. Zus.)

folglich AD : AE = tg u : tg x .

d. i. AB + BC : AB — BC = tg ½ (C + A) : tg ½ (C — A).



337. Mit Hülfe dieser Sätze lassen sich die meisten Aufgaben in Betreff schiefwinkliger Dreyecke auflösen.

Denn in der Propottion (335.)

$$BC : AC = \sin A : \sin B$$

läßt sich jedes Glied aus den drey übrigen finden.

Es sey also in einem Dreyeck gegeben

1) eine Seite und zwey Winkel, so findet sich jede der beyden andern Seiten;

2) zwey Seiten und ein gegenüberstehender Winkel, so findet sich der andere gegenüberstehende Winkel.

Anmerk. Für die erste dieser beyden Aufgaben erfordert zwar die Proportion, daß der eine Winkel der gegebenen Seite gegenüber liege; da man aber aus zwey Winkeln eines Dreyecks jederzeit den dritten finden kann, so ist es gleichgültig, welche Winkel gegeben werden.

Bey der zweyten Aufgabe gibt die Proportion den Sinus des gesuchten Winkels; da aber Nebenwinkel einerley Sinus haben (314.), so bleibt es ungewiß, welcher von den beyden Nebenwinkeln dem gefundenen Sinus zugehöre. Hier müssen andere Umstände entscheiden. Vergl. oben 64, 2. Zus.

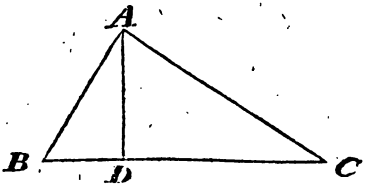
Wenn

3) zwey Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel gegeben sind, so kann die Summe der beyden andern Winkel als bekannt angesehen werden; folglich auch ihre Hälfte. Man findet daher vermittelst des vorgehenden Lehrsatzes (336.) die halbe Differenz derselben.

Addirt man aber die halbe Summe und halbe Differenz zusammen, so findet man den größern von beyden Winkeln; und zieht man diese von jener ab, so findet sich der kleinere Winkel. (Vergl. Ar. 180.)

Anmerk. Sind die Winkel gefunden, so läßt sich dann auch die dritte Seite finden.

338. Aus zwey Seiten und dem eingeschlossenen Winkel einen der beyden andern Winkel zu finden, hat man auch noch ein anderes Verfahren.



Es sey in dem Dreyeck ABC BC, AC und C gegeben; man setze BC = a und AC = b, und fälle das Perpendikel AD, so ist

$$b : AD = r : \sin C$$

$$\text{folglich } AD = \frac{b \cdot \sin C}{r}$$

$$\text{Ingleichen ist } CD = \frac{b \cdot \cos C}{r}$$

$$\text{Ferner ist } BD : AD = r : \operatorname{tg} B$$

$$\text{folglich } \operatorname{tg} B = r \frac{AD}{BD}.$$

Es ist aber BD = a — CD, und daher $\operatorname{tg} B = r \frac{AD}{a - CD}$. Hiernach kann man für AD und CD die eben gefundenen Werthe derselben gebrauchen, und dann wird

$$\operatorname{tg} B = r \frac{b \cdot \sin C}{r} : \left(a - \frac{b \cos C}{r}\right)$$

$$= b \cdot \sin C : \left(\frac{ar - b \cos C}{r}\right)$$

$$= \frac{rb \sin C}{ar - b \cos C}.$$

339. Aufg. Aus den drey Seiten eines Dreyecks die Winkel desselben zu finden.

Auflös. und Bew. Es sey in dem Dreyeck ABC (s. d. vorhergeh. Fig.) BC = a, AC = b, AB = c gegeben; man fälle das Perpendikel AD, so ist

in dem Dr. ADC, $AD^2 = b^2 - CD^2$
und — — ADB, $AD^2 = c^2 - BD^2$
folglich $b^2 - CD^2 = c^2 - BD^2$.

Nun ist $BD = a - CD$, und $BD^2 = a^2 - 2a\,CD + CD^2$; folglich

$$b^2 - CD^2 = c^2 - a^2 + 2a\,CD - CD^2$$
$$\text{und } b^2 = c^2 - a^2 + 2a\,CD$$
$$\text{mithin } a^2 + b^2 - c^2 = 2a\,CD$$
$$\text{und daher } CD = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}.$$

Endlich ist $b : CD = r : \cos C$; folglich $CD = \frac{b \cdot \cos C}{r}$. Setzt man diesen Werth für CD in die eben gefundene Gleichung, so ist

$$\frac{b \cdot \cos C}{r} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}$$

also

$$\cos C = r \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Hat man erst einen Winkel gefunden, so kann man nach einem der vorhergehenden Sätze auch leicht die übrigen finden.

Zus. Aus der letzten Gleichung folgt

$$c = \sqrt{(a^2 + b^2 - 2ab \frac{\cos C}{r})}$$

Dieß lehrt aus zwey Seiten und dem eingeschlossenen Winkel die dritte Seite finden.

340. Aufg. Aus den drey Seiten eines Dreyecks den Flächeninhalt desselben zu finden.

Auflös. und Bew. Es sey, wie vorhin, in dem Dreyeck ABC $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ gegeben; man fälle das Perpendikel AD, so ist

$$AD^2 = b^2 - CD^2$$

Es ist aber nach der Gleichung im vorigen Satze $CD = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}$, folglich

$$AD^2 = b^2 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}\right)^2$$

$$= \left(b + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}\right) \cdot \left(b - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}\right)$$

(s. S. 83. Anmerk.)

$$= \frac{a^2 + 2ab + b^2 - c^2}{2a} \cdot \frac{2ab - a^2 - b^2 + c^2}{2a}$$

$$= \frac{(a^2 + b)^2 - c^2}{2a} \cdot \frac{c^2 - (a - b)^2}{2a}$$

$$= \frac{(a+b+c) \cdot (a+b-c)}{2a} \cdot \frac{(c+a-b) \cdot (c-a+b)}{2a}$$

folglich AD

$$= \frac{\sqrt{(a+b+c) \cdot (a+b-c) \cdot (a+c-b) \cdot (b+c-a)}}{2a}$$

Nun ist Dr. $ABC = \frac{a \cdot AD}{2}$; also ist es $=$

$$\frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{(a+b+c) \cdot (a+b-c) \cdot (a+c-b) \cdot (b+c-a)}}{2a}$$

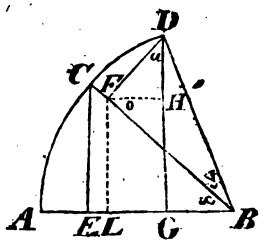
$$= \tfrac{1}{4} \sqrt{(a+b+c) \cdot (a+b-c) \cdot (a+c-b) \cdot (b+c-a)}.$$

Diese merkwürdige Formel gibt eine leicht in Worte abzufassende Regel zur Auflösung der Aufgabe.

Zus. Setzt man $\frac{1}{2}(a + b + c) = S$, so läßt sich diese Formel noch bequemer auf folgende Art ausdrücken

$$\text{Dr. } ABC = \sqrt{S \cdot (S-a) \cdot (S-b) \cdot (S-c)}.$$

341. Aufg. Aus den Sinussen und Cosinussen zweyer Winkel den Sinus der Summe der Winkel zu finden.



Auflöſ. und Bew. Es ſey der eine Winkel ABC, und der andere CBD, ſo kommt es darauf an, aus CE, BE, DF, BF und dem Halbmeſſer AB, den Sinus DG des Winkels ABD zu finden. Man ziehe deßhalb FL und FH ſenkrecht auf AB und DG. Alsdann iſt

1) BC : CE = BF : FL

folglich

$$FL = HG = \frac{CE \cdot BF}{BC}$$

Ferner iſt Dr. DFH ∽ BCE (weil, außer dem rechten Winkel, auch x = o, als Wechſelswinkel, und o = u (98.), folglich x = u iſt), und daher

2) BC : BE = DF : DH

folglich

$$DH = \frac{BE \cdot DF}{BC}$$

Nun iſt HG + DH = DG; folglich

$$DG = \frac{CE \cdot BF + BE \cdot DF}{BC}$$

1. Zuſ. Auf ähnliche Weiſe läßt ſich auch der Cosinus BG des Winkels ABD finden. Denn es iſt BC : BE = BF : BL

und daher

$$BL = \frac{BE \cdot BF}{BC}$$

Ferner ist $BC : CE = DF : FH$
folglich

$$FH = GL = \frac{CE \cdot DF}{BC}$$

also

$$BL - GL = BG = \frac{BE \cdot BF - CE \cdot DF}{BC}$$

2. Zus. Bezeichnet man, auf eine allgemeinere Art, den Winkel ABC durch x; $CBD = y$; $AB = \varrho$ und den Sinus totus, wie bisher, $= r$, so ist

$$BC : CE = r : \sin x$$

und daher $CE = BC \cdot \frac{\sin x}{r} = \varrho \cdot \frac{\sin x}{r}$.

Eben so ist $BE = \varrho \cdot \frac{\cos x}{r}$;

$$DF = \varrho \cdot \frac{\sin y}{r}; \; BF = \varrho \frac{\cos y}{r}$$

Setzt man diese Ausdrücke in die vorigen Gleichungen für DG und BG, so erhält man

$$DG = \varrho \cdot \frac{\sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y}{r^2}$$

$$BG = \varrho \cdot \frac{\cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y}{r^2}$$

3. Zus. Verlangt man aber den Sinus und Cosinus der Summe zweyer Winkel, nicht in Beziehung auf einen gegebenen Halbmesser ϱ, sondern überhaupt in Beziehung auf den Sinus totus $= r$, so braucht man nur in den eben gefundenen Ausdrücken $\varrho = r$ zu setzen; alsdann ist

$$\sin (x + y) = \frac{\sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y}{r}$$

$$\cos (x + y) = \frac{\cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y}{r}$$

4. Zus. Aus $\sin (x + y)$ und $\cos (x + y)$ er-

gibt sich $r \cdot \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)}$, d. i. tang $(x+y)$ (321.). Es ist demnach

$$\text{tg}(x+y) = r \cdot \frac{\sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y}{\cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y}.$$

Dividirt man diese Gleichung im Zähler und Nenner durch $\cos x \cdot \cos y$, so erhält man

$$\text{tg}(x+y) = r \cdot \frac{\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin y}{\cos y}}{1 - \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{\sin y}{\cos y}}$$

$$= \frac{\text{tg}\, x + \text{tg}\, y}{1 - \frac{\text{tg}\, x \cdot \text{tg}\, y}{r^2}} = r^2 \cdot \frac{\text{tg}\, x + \text{tg}\, y}{r^2 - \text{tg}\, x \cdot \text{tg}\, y}$$

5. Zus. Setzt man $y = x$, so wird $\sin(x+y) =$

$$\sin 2x = \frac{\sin x \cdot \cos x + \cos x \cdot \sin x}{r}$$

$$= \frac{2 \sin x \cdot \cos x}{r}$$

$$\cos(x+y) = \cos 2x = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot \sin x}{r}$$

$$= \frac{\cos x^2 - \sin x^2}{r}$$

$$= \frac{2 \cos x^2 - r^2}{r} \quad (320.)$$

$$\text{tg}(x+y) = \text{tg}\, 2x = r^2 \frac{2 \text{tg}\, x}{r^2 - \text{tg}\, x^2}$$

6. Zus. Aus den Formeln für den Sinus und Cosinus des doppelten Winkels läßt sich auch der Sinus und Cosinus des halben Winkels finden, wenn man $\frac{1}{2}x$ statt x, und x statt $2x$ setzt. Es findet sich alsdann

$$\sin \tfrac{1}{2} x = \frac{r \cdot \text{Sin}\, x}{2} \sqrt{\frac{2}{r(r + \cos x)}}$$

$$= \sqrt{\frac{r \cdot (r - \cos x)}{2}}$$

$$\cos \tfrac{1}{2} x = \sqrt{\frac{r \cdot (r + \cos x)}{2}}$$

7. Zuſ. Hieraus ergibt ſich auch

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} x = r \frac{\operatorname{Sin} \frac{1}{2} x}{\operatorname{Cos} \frac{1}{2} x} = r \sqrt{\frac{r - \cos x}{r + \cos x}}$$

$$= r \frac{\operatorname{Sin} x}{r + \cos x}$$

Multiplizirt man den letzten Ausdruck im Zähler und Nenner mit $\frac{r}{\operatorname{Cos} x}$ ſo erhält man

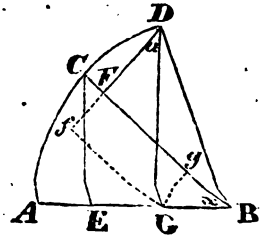
$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} x = r \frac{\operatorname{tg} x}{\frac{r^2}{\operatorname{Cos} x} + r}.$$ Es iſt aber, wie man leicht findet $\frac{r^2}{\operatorname{Cos} x} = \operatorname{Sec} x = \sqrt{(r^2 + \operatorname{tg} x^2)}$; alſo iſt

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} x = r \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{(r^2 + \operatorname{tg} x^2)} + r}$$

Entwickelt man aber den Ausdruck aus obiger Formel für tg 2x, ſo erhält man durch eine quadratiſche Gleichung

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} x = r \frac{\sqrt{(r^2 + \operatorname{tg} x^2)} - r}{\operatorname{tg} x},$$

342. Aufg. Aus den Sinuſſen und Coſinuſſen zweyer Winkel den Sinus der Differenz der Winkel zu finden.



Auflöſ. und Bew. Es ſey der eine Winkel ABD, und der andere ABC, ſo kommt es darauf an, aus DG, BG, CE, BE und dem Halbmeſſer AB, den Sinus DF des Winkels CBD zu finden. Man ziehe deßhalb aus G die Linie Gf ſenkrecht auf die verlängerte DF; und Gg ſenkrecht auf BC. Es iſt, wie in voriger Figur, $u = x$, und daher Dr. $GDf \sim BCE$; folglich

$$BC : BE = DG : Df$$

alſo

$$Df = \frac{BE \cdot DG}{BC}$$

Ferner iſt $BC : CE = BG : Gg$

alſo

$$Gg = Ff = \frac{CE \cdot BG}{BC}$$

Aus beyden folgt

$$Df - Ff \text{ d. i. } DF = \frac{BE \cdot DG - CE \cdot BG}{BC}$$

1. Zuſ. Auf ähnliche Weiſe kann der Coſinus BF des Winkels CBD gefunden werden. Denn es iſt

1) $BC : BE = BG : Bg$

folglich

$$Bg = \frac{BE \cdot BG}{BC}$$

2) $BC : CE = DG : Gf$

folglich

$$Gf = Fg = \frac{CE \cdot DG}{BC}$$

und daher

$$Bg + Fg \text{ d. i. } BF = \frac{BE \cdot BG + CE \cdot DG}{BC}$$

2. Zuſ. Setzt man den Winkel $ABD = z$, und, wie bey dem vorigen Satz (341, 2. Zuſ.), $ABC = x$; $AB = \varrho$, ſo kann man auf eine ähnliche Weiſe, wie

derſelben, wie die Tangente der halben Summe der gegenüberliegenden Winkel zur Tangente der halben Differenz derſelben.

Bew. Es ſey ABC ein Dreyeck von beliebiger Geſtalt; C bezeichne den Winkel ACB, und AB und BC ſeyen die Seiten, von denen der Satz bewieſen werden ſoll. Man verlängere AB ſo, daß AD = AB + BC werde; ingleichen ſchneide man BE = BC ab; alsdann iſt AE = AB — BC.

Darauf ziehe man CE und CD, ſo iſt der Winkel CBD = C + A. Es iſt aber auch Winkel CBD = o + u = 2u (weil o = u iſt (55, 2. Zuſ.)); folglich iſt C + A = 2u; und daher u = ½ (C + A).

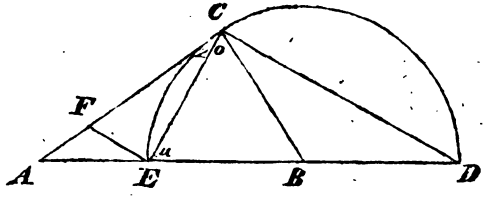
Ferner iſt u = A + x; folglich iſt x = u — A = ½ (C + A) — A = ½ (C — A).

Endlich ziehe man EF ſenkrecht auf CE; und da auch CD ſenkrecht auf CE iſt (146, 7. Zuſ.), ſo iſt

CE : CD = r : tang u
ingleichen CE : EF = r : tang x
folglich CD : EF = tg u : tg x

Es iſt aber CD : EF = AD : AE (88, 2. Zuſ.)
folglich AD : AE = tg u : tg x .

d. i. AB + BC : AB — BC = tg ½ (C + A) : tg ½ (C — A).



337. Mit Hülfe dieſer Sätze laſſen ſich die meiſten Aufgaben in Betreff ſchiefwinkliger Dreyecke auflöſen.

Denn in der Proportion (335.)

$$BC : AC = \sin A : \sin B$$

läßt sich jedes Glied aus den drey übrigen finden.

Es sey also in einem Dreyeck gegeben

1) eine Seite und zwey Winkel, so findet sich jede der beyden andern Seiten;

2) zwey Seiten und ein gegenüberstehender Winkel, so findet sich der andere gegenüberstehende Winkel.

Anmerk. Für die erste dieser beyden Aufgaben erfordert zwar die Proportion, daß der eine Winkel der gegebenen Seite gegenüber liege; da man aber aus zwey Winkeln eines Dreyecks jederzeit den dritten finden kann, so ist es gleichgültig, welche Winkel gegeben werden.

Bey der zweyten Aufgabe gibt die Proportion den Sinus des gesuchten Winkels; da aber Nebenwinkel einerley Sinus haben (314.), so bleibt es ungewiß, welcher von den beyden Nebenwinkeln dem gefundenen Sinus zugehöre. Hier müssen andere Umstände entscheiden. Vergl. oben 64, 2. Zus.

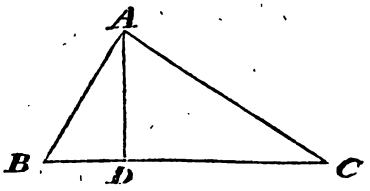
Wenn

3) zwey Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel gegeben sind, so kann die Summe der beyden andern Winkel als bekannt angesehen werden; folglich auch ihre Hälfte. Man findet daher vermittelst des vorgehenden Lehrsatzes (336.) die halbe Differenz derselben.

Addirt man aber die halbe Summe und halbe Differenz zusammen, so findet man den größern von beyden Winkeln; und zieht man diese von jener ab, so findet sich der kleinere Winkel. (Vergl. Ar. 180.)

Anmerk. Sind die Winkel gefunden, so läßt sich dann auch die dritte Seite finden.

338. Aus zwey Seiten und dem eingeschlossenen Winkel einen der beyden andern Winkel zu finden, hat man auch noch ein anderes Verfahren.



Es sey in dem Dreyeck ABC BC, AC und C gegeben; man setze BC = a und AC = b, und fälle das Perpendikel AD, so ist

$$b : AD = r : \sin C$$

$$\text{folglich } AD = \frac{b \cdot \sin C}{r}$$

$$\text{Ingleichen ist } CD = \frac{b \cdot \cos C}{r}$$

$$\text{Ferner ist } BD : AD = r : \operatorname{tg} B$$

$$\text{folglich } \operatorname{tg} B = r \frac{AD}{BD}.$$

Es ist aber BD = a — CD, und daher $\operatorname{tg} B = r \frac{AD}{a - CD}$. Hiernach kann man für AD und CD die eben gefundenen Werthe derselben gebrauchen, und dann wird

$$\operatorname{tg} B = r \frac{b \cdot \sin C}{r} : \left(a - \frac{b \cos C}{r}\right)$$

$$= b \cdot \sin C : \left(\frac{ar - b \cos C}{r}\right)$$

$$= \frac{rb \sin C}{ar - b \cos C}.$$

339. Aufg. Aus den drey Seiten eines Dreyecks die Winkel desselben zu finden.

Auflös. und Bew. Es sey in dem Dreyeck ABC (s. d. vorhergeh. Fig.) BC = a, AC = b, AB = c gegeben; man fälle das Perpendikel AD, so ist

in dem Dr. ADC, $AD^2 = b^2 - CD^2$
und — — ADB, $AD^2 = c^2 - BD^2$
folglich $b^2 - CD^2 = c^2 - BD^2$.

Nun ist $BD = a - CD$, und $BD^2 = a^2 - 2a\,CD + CD^2$; folglich

$$b^2 - CD^2 = c^2 - a^2 + 2a\,CD - CD^2$$

und $b^2 = c^2 - a^2 + 2a\,CD$

mithin $a^2 + b^2 - c^2 = 2a\,CD$

und daher $CD = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}$.

Endlich ist $b : CD = r : \cos C$; folglich $CD = \frac{b \cdot \cos C}{r}$. Setzt man diesen Werth für CD in die eben gefundene Gleichung, so ist

$$\frac{b \cdot \cos C}{r} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}$$

also

$$\cos C = r \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Hat man erst einen Winkel gefunden, so kann man nach einem der vorhergehenden Sätze auch leicht die übrigen finden.

Zus. Aus der letzten Gleichung folgt

$$c = \sqrt{(a^2 + b^2 - 2ab\,\frac{\cos C}{r})}$$

Dieß lehrt aus zwey Seiten und dem eingeschlossenen Winkel die dritte Seite finden.

340. Aufg. Aus den drey Seiten eines Dreyecks den Flächeninhalt desselben zu finden.

Auflös. und Bew. Es sey, wie vorhin, in dem Dreyeck ABC $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ gegeben; man fälle das Perpendikel AD, so ist

$$AD^2 = b^2 - CD^2$$

Es ist aber nach der Gleichung im vorigen Satze $CD = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}$, folglich

$$AD^2 = b^2 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}\right)^2$$

$$= \left(b + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}\right) \cdot \left(b - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}\right)$$

(s. S. 83. Anmerk.)

$$= \frac{a^2 + 2ab + b^2 - c^2}{2a} \cdot \frac{2ab - a^2 - b^2 + c^2}{2a}$$

$$= \frac{(a^2 + b)^2 - c^2}{2a} \cdot \frac{c^2 - (a - b)^2}{2a}$$

$$= \frac{(a+b+c) \cdot (a+b-c)}{2a} \cdot \frac{(c+a-b) \cdot (c-a+b)}{2a}$$

folglich AD

$$= \frac{\sqrt{(a+b+c) \cdot (a+b-c) \cdot (a+c-b) \cdot (b+c-a)}}{2a}$$

Nun ist Dr. $ABC = \frac{a \cdot AD}{2}$; also ist es =

$$\frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{(a+b+c) \cdot (a+b-c) \cdot (a+c-b) \cdot (b+c-a)}}{2a}$$

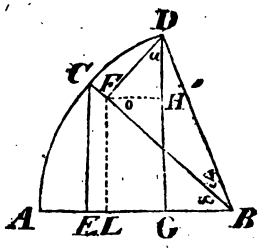
$$= \tfrac{1}{4} \sqrt{(a+b+c) \cdot (a+b-c) \cdot (a+c-b) \cdot (b+c-a)}.$$

Diese merkwürdige Formel gibt eine leicht in Worte abzufassende Regel zur Auflösung der Aufgabe.

Zus. Setzt man $\frac{1}{2}(a + b + c) = S$, so läßt sich diese Formel noch bequemer auf folgende Art ausdrücken

$$\text{Dr. } ABC = \sqrt{S \cdot (S-a) \cdot (S-b) \cdot (S-c)}.$$

341. Aufg. Aus den Sinussen und Cosinussen zweyer Winkel den Sinus der Summe der Winkel zu finden.



Auflöſ. und Bew. Es ſey der eine Winkel ABC, und der andere CBD, ſo kommt es darauf an, aus CE, BE, DF, BF und dem Halbmeſſer AB, den Sinus DG des Winkels ABD zu finden. Man ziehe deßhalb FL und FH ſenkrecht auf AB und DG. Alsdann iſt

1) BC : CE = BF : FL

folglich

$$FL = HG = \frac{CE \cdot BF}{BC}$$

Ferner iſt Dr. DFH ∼ BCE (weil, außer dem rechten Winkel, auch x = o, als Wechſelswinkel, und o = u (98.), folglich x = u iſt), und daher

2) BC : BE = DF : DH

folglich

$$DH = \frac{BE \cdot DF}{BC}$$

Nun iſt HG + DH = DG; folglich

$$DG = \frac{CE \cdot BF + BE \cdot DF}{BC}$$

1. Zuſ. Auf ähnliche Weiſe läßt ſich auch der Coſinus BG des Winkels ABD finden. Denn es iſt BC : BE = BF : BL

und daher

$$BL = \frac{BE \cdot BF}{BC}$$

Ferner ist $BC : CE = DF : FH$
folglich

$$FH = GL = \frac{CE \cdot DF}{BC}$$

also

$$BL - GL = BG = \frac{BE \cdot BF - CE \cdot DF}{BC}$$

2. Zus. Bezeichnet man, auf eine allgemeinere Art, den Winkel ABC durch x; $CBD = y$; $AB = \varrho$ und den Sinus totus, wie bisher, $= r$, so ist

$$BC : CE = r : \sin x$$

und daher $CE = BC \cdot \frac{\sin x}{r} = \varrho \cdot \frac{\sin x}{r}$.

Eben so ist $BE = \varrho \cdot \frac{\cos x}{r}$;

$$DF = \varrho \cdot \frac{\sin y}{r}; \; BF = \varrho \frac{\cos y}{r}$$

Setzt man diese Ausdrücke in die vorigen Gleichungen für DG und BG, so erhält man

$$DG = \varrho \cdot \frac{\sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y}{r^2}$$

$$BG = \varrho \cdot \frac{\cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y}{r^2}$$

3. Zus. Verlangt man aber den Sinus und Cosinus der Summe zweyer Winkel, nicht in Beziehung auf einen gegebenen Halbmesser ϱ, sondern überhaupt in Beziehung auf den Sinus totus $= r$, so braucht man nur in den eben gefundenen Ausdrücken $\varrho = r$ zu setzen; alsdann ist

$$\sin (x + y) = \frac{\sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y}{r}$$

$$\cos (x + y) = \frac{\cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y}{r}$$

4. Zus. Aus $\sin (x + y)$ und $\cos (x + y)$ er-

gibt sich $r \cdot \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)}$, d. i. tang $(x+y)$ (321.). Es ist demnach

$$\text{tg}(x+y) = r \cdot \frac{\sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y}{\cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y}.$$

Dividirt man diese Gleichung im Zähler und Nenner durch $\cos x \cdot \cos y$, so erhält man

$$\text{tg}(x+y) = r \cdot \frac{\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin y}{\cos y}}{1 - \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{\sin y}{\cos y}}$$

$$= \frac{\text{tg}\, x + \text{tg}\, y}{\frac{1 - \text{tg}\, x \cdot \text{tg}\, y}{r^2}} = r^2 \cdot \frac{\text{tg}\, x + \text{tg}\, y}{r^2 - \text{tg}\, x \cdot \text{tg}\, y}$$

5. Zus.) Setzt man $y = x$, so wird $\sin(x+y) =$

$$\sin 2x = \frac{\sin x \cdot \cos x + \cos x \cdot \sin x}{r}$$

$$= \frac{2 \sin x \cdot \cos x}{r}$$

$$\cos(x+y) = \cos 2x = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot \sin x}{r}$$

$$= \frac{\cos x^2 - \sin x^2}{r}$$

$$= \frac{2 \cos x^2 - r^2}{r} \quad (320.)$$

$$\text{tg}(x+y) = \text{tg}\, 2x = r^2 \frac{2 \text{tg}\, x}{r^2 - \text{tg}\, x^2}$$

6. Zus. Aus den Formeln für den Sinus und Cosinus des doppelten Winkels läßt sich auch der Sinus und Cosinus des halben Winkels finden, wenn man $\frac{1}{2}x$ statt x, und x statt $2x$ setzt. Es findet sich alsdann

$$\sin \tfrac{1}{2} x = \frac{r \cdot \text{Sin}\, x}{2} \sqrt{\frac{2}{r(r + \cos x)}}$$

$$= \sqrt{\frac{r \cdot (r - \cos x)}{2}}$$

$$\cos \tfrac{1}{2} x = \sqrt{\frac{r \cdot (r + \cos x)}{2}}$$

7. Zuſ. Hieraus ergibt ſich auch

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} x = r \frac{\operatorname{Sin} \frac{1}{2} x}{\operatorname{Cos} \frac{1}{2} x} = r \sqrt{\frac{r - \cos x}{r + \cos x}}$$

$$= r \frac{\operatorname{Sin} x}{r + \cos x}$$

Multiplizirt man den letzten Ausdruck im Zähler und Nenner mit $\frac{r}{\operatorname{Cos} x}$ ſo erhält man

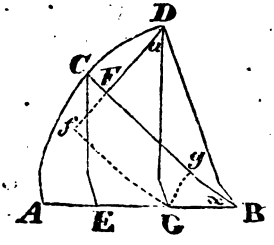
$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} x = r \frac{\operatorname{tg} x}{\frac{r^2}{\operatorname{Cos} x} + r}.$$ Es iſt aber, wie man leicht findet $\frac{r^2}{\operatorname{Cos} x} = \operatorname{Sec} x = \sqrt{(r^2 + \operatorname{tg} x^2)}$; alſo iſt

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} x = r \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{(r^2 + \operatorname{tg} x^2)} + r}$$

Entwickelt man aber den Ausdruck aus obiger Formel für tg 2x, ſo erhält man durch eine quadratiſche Gleichung

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} x = r \frac{\sqrt{(r^2 + \operatorname{tg} x^2)} - r}{\operatorname{tg} x}$$

342. Aufg. Aus den Sinuſſen und Coſinuſſen zweyer Winkel den Sinus der Differenz der Winkel zu finden.



Auflöſ. und Bew. Es ſey der eine Winkel ABD, und der andere ABC, ſo kommt es darauf an, aus DG, BG, CE, BE und dem Halbmeſſer AB, den Sinus DF des Winkels CBD zu finden. Man ziehe deßhalb aus G die Linie Gf ſenkrecht auf die verlängerte DF; und Gg ſenkrecht auf BC. Es iſt, wie in voriger Figur, $u = x$, und daher Dr. GDf $\sim$ BCE; folglich

$$BC : BE = DG : Df$$

alſo

$$Df = \frac{BE \cdot DG}{BC}$$

Ferner iſt $BC : CE = BG : Gg$

alſo

$$Gg = Ff = \frac{CE \cdot BG}{BC}$$

Aus beyden folgt

$$Df - Ff \text{ d. i. } DF = \frac{BE \cdot DG - CE \cdot BG}{BC}$$

1. Zuſ. Auf ähnliche Weiſe kann der Coſinus BF des Winkels CBD gefunden werden. Denn es iſt

1) $BC : BE = BG : Bg$

folglich

$$Bg = \frac{BE \cdot BG}{BC}$$

2) $BC : CE = DG : Gf$

folglich

$$Gf = Fg = \frac{CE \cdot DG}{BC}$$

und daher

$$Bg + Fg \text{ d. i. } BF = \frac{BE \cdot BG + CE \cdot DG}{BC}$$

2. Zuſ. Setzt man den Winkel $ABD = z$, und, wie bey dem vorigen Satz (341, 2. Zuſ.), $ABC = x$, $AB = \varrho$, ſo kann man auf eine ähnliche Weiſe, wie

dort, allgemeinere Ausdrücke für DF und BF erhalten. Es ist nehmlich

$$DF = \varrho \cdot \frac{\sin z \cdot \cos x - \cos z \cdot \sin x}{r^2}$$

$$BF = \varrho \cdot \frac{\cos z \cdot \cos x + \sin z \cdot \sin x}{r^2}.$$

und wird $\varrho = r$ gesetzt, so ist

$$\sin(z - x) = \frac{\sin z \cdot \cos x - \cos z \cdot \sin x}{r}$$

$$\cos(z - x) = \frac{\cos z \cdot \cos x + \sin z \cdot \sin x}{r}$$

3. Zus. Da $r \cdot \frac{\sin(z-x)}{\cos(z-x)} = \operatorname{tg}(z-x)$ ist, so ist

$$\operatorname{tg}(z-x) = r \cdot \frac{\sin z \cdot \cos x - \cos z \cdot \sin x}{\cos z \cdot \cos x + \sin z \cdot \sin x}$$

Dividirt man diesen Bruch im Zähler und Nenner durch $\cos z \cdot \cos x$, so erhält man

$$\operatorname{tg}(z-x) = r \cdot \frac{\frac{\sin z}{\cos z} - \frac{\sin x}{\cos x}}{1 + \frac{\sin z}{\cos z} \cdot \frac{\sin x}{\cos x}}$$

$$= \frac{\operatorname{tg} z - \operatorname{tg} x}{1 + \frac{\operatorname{tg} z \cdot \operatorname{tg} x}{r^2}}$$

$$= r^2 \cdot \frac{\operatorname{tg} z - \operatorname{tg} x}{r^2 + \operatorname{tg} z \cdot \operatorname{tg} x}$$

1. Anmerk. Gemeiniglich werden die allgemeinen Ausdrücke für den Sinus und Cosinus der Summe oder Differenz zweyer Winkel, so wie andere trigonometrische Formeln, so abgefaßt, daß der Sinus totus $= 1$ gesetzt wird. Wie dadurch die obigen Formeln sich abändern, ist leicht zu finden. Für den Anfänger aber ist es vortheilhaft, sie vollständig vor Augen zu haben, besonders

um in den Rechnungen mit den trigonometrischen Logarithmen, aus ihnen zu ersehen, wo der Logarithme des Sinus totus zu addiren oder zu subtrahiren ist.

2. Anmerk. Aus den obigen Formeln für den Sinus und die Tangente der Summe der Winkel und des doppelten Winkels ergibt sich leicht, daß diese trigonometrischen Linien nicht im Verhältniß der Winkel selbst zu- oder abnehmen. Indessen bey sehr kleinen Winkeln, die nicht über einige Minuten gehen, kann man ohne merklichen Fehler annehmen, daß sich die genannten Linien wie die Winkel selbst verhalten; so wie für solche Winkel die Sinus, die Tangenten und die ihnen zugehörigen Bogen einander beynahe gleich sind.

343. Einige Aufgaben zur Anwendung der vorhergehenden Sätze.

1. Es sey in einem Dreyeck eine Seite 350 Fuß lang, und der eine von den daran liegenden Winkeln 64° 38′, der andere 42° 25′, wie groß sind die ihnen gegenüberliegenden Seiten?

2. Wenn eine Seite eines Dreyecks 9′, die andere 7′, die dritte 5′ ist, wie groß ist das ganze Dreyeck? und wie groß ein jeder Winkel desselben?

3. Es sey die Seite eines regelmäßigen Fünfecks = 27″, wie groß ist eine Diagonale desselben?

4. Ueber einer gegebenen geraden Linie, AB, ein Dreyeck, ABC, zu construiren, in welchem der Winkel A noch einmal so groß als B ist, und die Seiten, AC und BC, ein gegebenes Verhältniß = m : n haben.

Es kann sich hierbey sehr wohl treffen, daß die Auflösung für ein angenommenes Verhältniß unmöglich wird. Ob dieß der Fall ist, gibt der Ausdruck für den Cosinus des einfachen Winkels zu erkennen.

5. Wenn ein Körper von zwey Kräften zugleich in Bewegung gesetzt wird, von welchen die eine allein ihm

eine Geschwindigkeit von 160′, die andere von 110′ in einer Sekunde ertheilen könnte, und die Richtungen der Kräfte einen Winkel von 25° einschließen, wie weit wird der Körper in einer Sekunde fliegen?

Vergl. mein Lehrbuch der Physik §. 49.

6. Wie weit erstreckt sich die Aussicht auf freyem Felde, wenn das Auge sich nur 6 Fuß über dem Boden befindet?

7. Wie groß ist die Höhe eines Berges über einer Ebene, in welcher eine Standlinie von 3680 Fuß abgemessen ist, wenn die scheinbare Höhe des Berges an dem einen Ende derselben 8° 18′, an dem andern 5° 42′ beträgt?

Hierbey ist nöthig, daß die Standlinie in die durch die Spitze des Berges gelegte Vertikal-Ebene fällt. Außerdem braucht man nur einen Höhenwinkel zu messen; muß aber noch die beyden Winkel kennen, welche die Standlinie mit den von ihren Endpunkten nach der Spitze des Berges gehenden Linien macht.

8. Die Entfernung zweyer Bergspitzen von einander, vermittelst einer Standlinie von bestimmter Länge, zu finden.

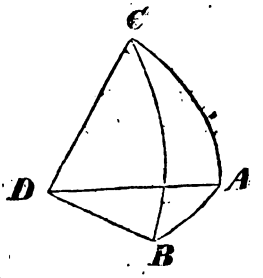
Hierbey müssen ebenfalls die Winkel bekannt seyn, welche die Standlinie mit den von ihren Endpunkten nach beyden Bergspitzen gehenden Linien macht.

Dritter Abschnitt.

Von der Ausmessung sphärischer Dreyecke.

344. Unter einem sphärischen Dreyeck wird, wie schon oben (290.) bemerkt ist, ein Dreyeck verstanden, dessen Seiten Bogen größter Kreise einer Kugel sind. Folglich treffen die Ebenen dieser Kreise im Mittelpunkt der Kugel zusammen (278, 2. Zus.).

345. Man nehme daher D als Mittelpunkt einer Kugel an, ziehe aus demselben drey Halbmesser DA, DB, DC, von welchen nur nur je zwey in derselben Ebene liegen, und beschreibe mit ihnen die Bogen, AB, BC und CA, so ist ABC ein sphärisches Dreyeck.



346. Die Seiten des sphärischen Dreyecks sind die Maaße der ihnen gegenüberliegenden ebenen Winkel am Mittelpunkt D. Sie werden daher auch nur nach der Größe dieser Winkel, nie nach ihrer absoluten Länge bestimmt.

347. In so fern die ebenen Winkel an D zusammen kleiner als 4 R. sind (232.), ist auch die Summe der Seiten des sphärischen Dreyecks kleiner als 4 R.

348. Die Summe der sphärischen Winkel ist nicht bey allen sphärischen Dreyecken einerley; sie ist gleich der Summe der Neigungswinkel der Seitenflächen ADB, ADC und BDC (281.), welche eine dreyseitige Pyramide bilden, in welcher nur die Grundfläche, statt eines ebenen Dreyecks, ein Stück der Kugelfläche ist; folglich ist sie größer als 2 R. (263.). Dagegen muß sie kleiner als 6 R. seyn, da der Neigungswinkel zweyer Ebenen kleiner als 2 R. angenommen wird.

349. Ist einer der sphärischen Winkel ein rechter, so heißt das Dreyeck selbst rechtwinklig; auch nennt

In den ebenen Dreyecken CDF und CDE ist

$$DF : DC = \cos CDF : r$$

und $DC : DE = r : \cos CDE$

folglich $DF : DE = \cos CDF : \cos CDE$

Nun ist $DF : DE = r : \cos EDF$

und daher $r : \cos EDF = \cos CDF : \cos CDE$

oder IV. $r : \cos AB = \cos AC : \cos BC$.

Setzt man in der Proportion Nr. I. sin C statt sin B, und sin AB statt sin AC, so ist

$$r : \sin CB = \sin C : \sin AB$$

Nun ist Nr. I. $r : \sin CB = \sin B : \sin AC$

folglich ist $\sin C : \sin AB = \sin B : \sin AC$. Hierzu setze man $\cos B : \sin AB = \sin B : \operatorname{tg} AC$ *)

so ist $\cos B : \sin C = \sin AC : \operatorname{tg} AC$;

und multiplizirt man hier das letzte Verhältniß mit $\frac{\cos AC}{\sin AC}$, so ergibt sich

$$\cos B : \sin C = \cos AC : r$$

oder umgekehrt V. $r : \cos AC = \sin C : \cos B$.

Verwechselt man endlich in der Proportion Nr. II. den Winkel B mit dem Winkel C, so erhält man

$$r : \sin AC = \operatorname{tg} C : \operatorname{tg} AB$$

Nun ist Nr. III. $r : \operatorname{tg} CB = \cos B : \operatorname{tg} AB$

Folglich ist $\operatorname{tg} CB : \sin AC = \operatorname{tg} C : \cos B$

Hierzu Nr. I. $r : \sin CB = \sin B : \sin AC$

gibt $r \cdot \operatorname{tg} CB : \sin CB = \sin B \cdot \operatorname{tg} C : \cos B$

und diese Proportion im ersten Verhältniß mit tg CB, und im zweyten mit $\frac{\sin B}{r}$ dividirt, gibt

$$r : \frac{\cos CB}{r} = r \cdot \operatorname{tg} C : \cot B$$

oder VI. $r : \cos CB = \operatorname{tg} C : \cot B$.

*) Diese Proportion erhält man aus Nr. II., wenn man das erste und dritte Glied mit $\frac{\cos B}{r}$ multiplizirt.

353. Um die Verhältnisse zwischen den Seiten und Winkeln des rechtwinklig-sphärischen Dreyecks, die in diesen 6 Proportionen ausgedrückt sind, besser zu übersehen, bezeichne man die Seiten mit denselben Buchstaben des kleinen Alphabets, mit welchen die ihnen gegenüberliegenden Winkel aus dem großen Alphabet bezeichnet sind. Dadurch erhält man

1) r : sin a = sin B : sin b
2) r : sin c = tg B : tg b
3) r : tg a = cos B : tg c
4) r : cos c = cos b : cos a
5) r : cos b = sin C : cos B
6) r : cos a = tg C : cot B

Diese Proportionen sind zur Auflösung aller bey rechtwinklig-sphärischen Dreyecken vorkommenden Fälle hinreichend. Welche von ihnen in irgend einem besondern Falle wirklich anzuwenden sey, muß durch weitere Ueberlegung bestimmt werden.

354. Einige Aufgaben, als Beyspiele zur Auflösung rechtwinklig-sphärischer Dreyecke.*)

1) Aus der Länge der Sonne (a) und Schiefe der Ecliptik (B) die Declination der Sonne (b) zu finden.

2) Aus der geraden Aufsteigung eines Gestirns in der Ecliptik (c) und aus der Schiefe der Ecliptik (B) die Declination desselben (b) zu finden.

3) Aus dem Ergänzungswinkel der Polhöhe (B) und aus der Morgenweite eines Gestirns (a) den Unterschied der geraden und schiefen Aufsteigung desselben (differentia ascensionalis) (c) zu finden.

4) Aus dem Halbkreise weniger der Polhöhe (c), und aus dem Viertelskreise — oder + der Declination eines Gestirns (a) den Winkel (B) zu finden, dessen

*) Ueber mehrere in diesen Aufgaben vorkommende Ausdrücke und Gegenstände vergleiche mein Lehrb. der Physik.

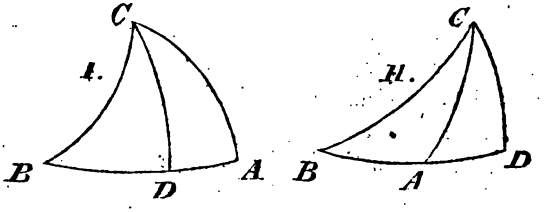
Maaß der halbe Tagebogen des Gestirns ist. (Vergl. meine mathemat. Geogr. §. 72.)

5) Aus der geraden Aufsteigung (c) und aus der Declination (b) der Sonne ihre Länge (a) zu finden.

II. Von der Ausmessung schiefwinkliger sphärischer Dreyecke.

355. Die Ausmessung schiefwinkliger sphärischer Dreyecke wird auf die Ausmessung rechtwinkliger zurückgeführt. Man zieht nehmlich aus der Spitze eines schiefen Winkels einen senkrechten Bogen auf die gegenüberstehende Seite oder ihre Verlängerung; dadurch entstehen zwey rechtwinklige sphärische Dreyecke, aus denen die Verhältnisse zwischen den Seiten und Winkeln des schiefwinkligen Dreyecks hergeleitet werden.

356. Ob das Perpendikel zwischen die Seiten des schiefwinkligen Dreyecks, oder außerhalb derselben fällt, hängt davon ab, ob die Winkel an der Grundlinie gleichartig (d. h. beyde kleiner oder größer als 1 R.), oder ungleichartig (d. h. der eine kleiner, der andere größer als 1 R.) sind.



357. Es sey also ABC ein schiefwinklig-sphärisches Dreyeck, und CD ein senkrechter Bogen, der in Nr. I. zwischen die Seiten, und in Nr. II. außerhalb derselben falle, so ist

I.

in d. Dr. BDC r : sin BC = sin B : sin CD
u. — — ADC r : sin AC = sin A : sin CD } (353, 1.)

flgl. 1) sin BC : sin AC = sin A : sin B.

II.

in d. Dr. BDC r : sin BD = tg B : tg CD
u. — — ADC r : sin AD = tg A : tg CD } (353, 2.)

folgl. 2) sin BD : sin AD = tg A : tg B.

III.

in d. Dr. BDC r : tg BC = cos BCD : tg CD
u. — — ADC r : tg AC = cos ACD : tg CD } (353, 3.)

folgl. 3) tg BC : tg AC = cos ACD : cos BCD.

IV.

in d. Dr. BDC r : cos BD = cos CD : cos BC
u. — — ADC r : cos AD = cos CD : cos AC } (353, 4.)

folgl. 4) cos BD : cos AD = cos BC : cos AC.

V.

in d. Dr. BDC r : cos CD = sin BCD : cos B
u. — — ADC r : cos CD = sin ACD : cos A } (353, 5.)

flgl. 5) sin BCD : sin ACD = cos B : cos A.

358. Von diesen 5 Proportionen stellt nur die erste Verhältnisse zwischen den Seiten und Winkeln der gegebenen Dreyecke selbst dar; in den übrigen kommen Seiten oder Winkel vor, die nicht mit den Dreyecken selbst unmittelbar gegeben sind. Man muß also im vorkommenden Fall das schiefwinklige Dreyeck, wovon drey Stücke gegeben sind, und ein viertes gesucht werden soll, ebenfalls auf eine schickliche Weise in zwey rechtwinklige verwandeln, und durch Anwendung mehrerer Proportionen auf das gesuchte Stück zu kommen suchen.

Z. B. es sind AB, BC und B gegeben, und es soll A gesucht werden, so findet man 1) BD aus Nr. 3. in 353; und dann findet sich 2) A aus Nr. 2. in 357.

359. Man kann aber auch aus den gefundenen

Proportionen allgemeine Formeln herleiten, aus denen sich die gesuchten Stücke in den meisten Fällen unmittelbar bestimmen lassen. Zu dem Ende bezeichne man wieder die Seiten des Dreyecks mit denselben Buchstaben des kleinen Alphabets, mit welchen die ihnen gegenüberliegenden Winkel aus dem großen Alphabet bezeichnet sind, so erhält man aus der ersten der eben gefundenen Proportionen, folgende allgemeine Ausdrücke.

$$1)\ \sin A = \frac{\sin a \,.\, \sin B}{\sin b}$$

$$2)\ \sin a = \frac{\sin A \,.\, \sin b}{\sin B}$$

360. Setzt man ferner $AD = c - BD$ (nach Fig. I.), so wird aus Nr. 2.

$$\sin BD : \sin (c - BD) = \text{tg } A : \text{tg } B$$

oder

$$\text{Sin } BD : \frac{\text{Sin } c \,.\, \cos BD - \cos c \sin BD}{r}$$

(342, 2. Zus.) $= \text{tg } A : \text{tg } B$

Das erste Verhältniß mit $\frac{r}{\text{Cos } BD}$ multiplizirt, gibt

$$\text{tg } BD : \frac{r \,.\, \text{Sin } c - \cos c \,.\, \text{tg } BD}{r} = \text{tg } A : \text{tg } B$$

und hieraus folgt

$$\text{tg } BD = \frac{r \,.\, \text{Sin } c \,.\, \text{tg } A}{r \,.\, \text{tg } B + \text{tg } A \,.\, \cos c}$$

im Zähler und Nenner mit $\frac{r}{\text{tg } A}$ multiplizirt, ist

$$\text{tg } BD = \frac{r^2 \text{ Sin } c}{\text{tg } B \,.\, \text{cot } A + r \cos c}.$$

Nun ist in dem Dreyeck BDC

$$r : \text{tg } a = \cos B : \text{tg } BD \text{ (353, 3.)}$$

folglich

$$\text{tg } BD = \frac{\text{tg } a \,.\, \cos B}{r}.$$

Es ist also

$$\frac{\text{tg a . cos B}}{r} = \frac{r^2 \text{ Sin c}}{\text{tg B . cot A} + r \text{ cos c}}$$

und daher

$$3)\ \text{tg a} = \frac{r \,.\, r^2 \text{ Sin c}}{\text{cos B . tg B . cot A} + r \,.\, \text{cos c . cos B}} = \frac{r^2 \text{ Sin c}}{\text{Sin B . cot A} + \text{cos c . cos B}}$$

Hieraus läßt sich wiederum herleiten

$$4)\ \text{tg A} = \frac{r^2 \text{ Sin B}}{\text{sin c . cot a} - \text{cos c . cos B.}}$$

Anmerk. In dem Dreyecke ABC Nr. II. ist AD = BD = c. Setzt man dieses in die Proportion Nr. 2., so erhält man durch eine ähnliche Rechnung

$$\text{tg a} = \frac{r^2 \text{ sin c}}{\text{cos c . cos B} - \text{sin B . cot A.}}$$

und

$$\text{tg A} = \frac{r^2 \text{ sin B}}{\text{cos B . cos c} - \text{sin c . cot a.}}$$

361. Auf ähnliche Weise setze man ferner $BD = c \mp AD$, so wird aus Nr. 4.

$$\text{cos } (c \mp AD) : \text{cos AD} = \text{cos a} : \text{cos b}$$

oder

$$\frac{\text{cos c . cos AD} \mp \text{sin c . sin AD}}{r} : \text{cos AD} = \text{cos a} : \text{cos b.}$$

Das erste Verhältniß mit $\frac{r}{\text{Cos AD}}$ multiplizirt, gibt

$$\frac{r \,.\, \text{cos c} \mp \text{sin c . tg AD}}{r} : r = \text{cos a} : \text{cos b}$$

und hieraus folgt

$$\text{tg AD} = \frac{\mp r^2 \text{ cos a} \mp r \text{ cos b . cos c}}{\text{cos b . sin c}}$$

Nun ist in dem Dreyeck ADC in Nr. I.

$$r : \text{tg b} = \text{cos A} : \text{tg AD} \quad (353, 3.)$$

folglich $\text{tg AD} = \frac{\text{tg b . cos A}}{r}$

1) Aus der Declination, dem Azimuth und der Höhe eines Sterns seinen Abstand vom Mittagskreise oder den Stundenwinkel zu finden.

2) Aus der Polhöhe eines Orts, und aus der Höhe und dem Azimuth eines Gestirns, die Declination desselben zu finden.

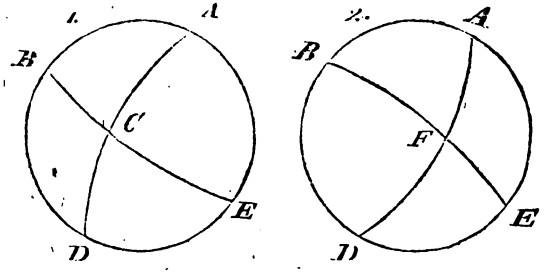
3) Aus der Höhe und Declination der Sonne und aus der Polhöhe eines Ortes die wahre Zeit zu finden.

4) Aus den geographischen Breiten zweyer Oerter und ihrem Längen-Unterschiede ihren wahren Abstand auf der Erdkugel zu finden.

5) Aus der Declination und geraden Aufsteigung eines Gestirns die Länge sowohl, als die Breite desselben zu finden. (S. meine math. Geogr. §. 120.)

---

365. Aufg. Den Flächeninhalt eines sphärischen Dreyecks zu finden.



Auflös. und Bew. Es sey ABC das sphärische Dreyeck; man denke sich die Kreise, welchen die Bogen AB, AC und BC zugehören, um die ganze Kugel gezogen, so entstehen in jeder Halbkugel vier Dreyecke. — Nr. 1. stelle hier die eine, und Nr. 2. die andere Halbkugel mit ihren Dreyecken vor.

Da nun größte Kreiſe einer Kugel einander halbiren (278, 4. Zuſ.), ſo iſt

$$\begin{array}{lll} AB + BD = BD + DE; & \text{folgl. } AB = DE \\ \text{ingl. } AC + CD = CD + DF; & - \quad AC = DF \\ \text{und } BC + CE = CE + EF; & - \quad BC = EF \\ \text{und daher} & \text{Dr. } ABC = DEF \end{array}$$

Eben ſo läßt ſich erweiſen, daß das Dr. DCE = ABF iſt; überhaupt, daß die Dreyecke der einen Halbkugel den Dreyecken der andern gleich ſind.

Bezeichnet man nun die Oberfläche der ganzen Kugel durch P und die ſphäriſchen Winkel des Dreyecks ABC mit den ihnen beygeſetzten großen Buchſtaben, ſo iſt

$$\text{Dr. } ABC + BCD = \frac{A}{360} P \text{ (284, 5. Zuſ.)}$$

$$\text{Dr. } ABC + ABF = \frac{C}{360} P$$

$$\text{alſo } 2\,ABC = \frac{A + C}{360} P - (BCD + ABF)$$

und da $ABF = DCE$; und $BCD + DCE = \frac{180 - B}{360} P$ iſt, ſo iſt

$$2\,ABC = \frac{A + C - (180 - B)}{360} P$$

$$= \frac{A + C - 180 + B}{360} P$$

folglich

$$ABC = \frac{A + B + C - 180}{720} P.$$

Der Inhalt eines ſphäriſchen Dreyecks macht alſo einen eben ſo großen Theil der ganzen Kugelfläche aus, als der Ueberſchuß ſeiner drey Winkel über 2 R. von 720° ausmacht.

Setzt man statt P seinen Werth $4r^2\pi$ (284.), so wird der Inhalt des Dreyecks

$$ABC = \frac{A + B + C - 180}{180} r^2 \pi.$$

1. Zuſ. Auch hieraus folgt, daß die Summe der Winkel eines ſphäriſchen Dreyecks größer als 2 R. ſeyn muß (348.).

2. Zuſ. Wäre die Summe der Winkel des Dreyecks $= 6$ R., ſo wäre der Flächeninhalt deſſelben der halben Kugel gleich. Wenn alſo die Summe der Winkel kleiner als 6 R. iſt (348.), ſo muß das Dreyeck kleiner als die halbe Kugel ſeyn.

Von den Kegelschnitten.

366. *Erklär. Wenn ein Kegel durch eine Ebene durchschnitten wird, so gibt es gewisse Lagen der Ebene, in welchen die Durchschnitte krumme Linien bilden, die vorzugsweise Kegelschnitte (sectiones conicae) heißen. Es gibt drey verschiedene Arten derselben, die durch die Namen, Parabel, Ellipse und Hyperbel bezeichnet werden.

Anmerk. Diese Benennungen gründen sich, wie sich nachher zeigen wird, auf die Beschaffenheit der Gleichungen, wodurch man die Natur dieser Linien ausdrückt.

367. Erklär. Um die Natur einer Linie durch eine Gleichung auszudrücken, denkt man sich eine gerade Linie von andern geraden und unter sich parallelen Linien durchschnitten, durch deren Endpunkte die zu bestimmende Linie hindurchgeht. Die erstere Linie heißt die Abscissenlinie, und jeder Theil derselben, von einem bestimmten, aber willkührlichen, Punkt an gerechnet bis zu dem Punkt, da eine der parallelen Linien sie trifft, eine Abscisse. Die parallelen Linien heißen Ordinaten oder Applicaten. Eine Abscisse und die ihr zugehörige Ordinate heißen zusammen Coordinaten.

und der Winkel, unter dem sie einander schneiden, heißt der Coordinaten-Winkel, der gewöhnlich ein rechter ist. Von dem Verhältniß der Coordinaten hängt die Beschaffenheit der zu bestimmenden Linie ab; indem also dieses durch eine Gleichung auf eine allgemeine Art ausgedrückt wird, wird die Beschaffenheit der Linie selbst dadurch bezeichnet.

1. Zus. Man unterscheidet daher die Linien selbst in Linien von der ersten, zweyten, dritten u. s. w. Ordnung, nach dem Grade der Gleichung, durch welche die Linie bezeichnet wird.

2. Zus. In der Gleichung für eine Linie werden die Ordinaten gemeiniglich durch y, und die Abscissen durch x bezeichnet. Diese Buchstaben drücken hier also nicht sowohl unbekannte, als veränderliche Größen aus, so wie die andern mit ihnen verbundenen Buchstaben die beständigen Größen bezeichnen.

Als Beyspiel zur Erläuterung diene die Gleichung für die gerade Linie, und die Gleichung für den Kreis.

a) Es sey nehmlich AZ eine Abscissenlinie, AP, AQ, AR mögen Abscissen und PM, QN, RO Ordinaten seyn; ferner sey das Verhältniß der Coordinaten wie m : n, so ist

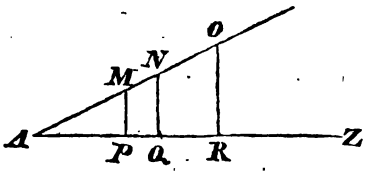
$$\begin{aligned} m : n &= AP : PM \\ &= AQ : QN \\ &= AR : RO \end{aligned}$$

folglich auch $AP : PM = AQ : QN$
und $AP : PM = AR : RO$

folglich ist ARO ein Dreyeck, und die Linie AO aus A durch die Endpunkte der Ordinaten eine gerade Linie. Setzt man also irgend eine Abscisse, wie AP oder AQ, = x, und die ihr zugehörige Ordinate = y, so ist $m : n = x : y$, und daher

$$y = \frac{n x}{m}$$

welches die Gleichung für die gerade Linie heißt.



b) Die Gleichung für den Kreis ergibt sich aus obigem Satze (155, 4. Zus.), da eine jede Linie, wie dort ED, die von irgend einem Punkte der Peripherie senkrecht auf den Durchmesser gezogen wird, die mittlere Proportionallinie zwischen den beyden Theilen des Durchmessers ist. Nimmt man also den Durchmesser zur Abscissenlinie, und setzt ihn $= a$, den einen Theil desselben $= x$, und das Perpendikel $= y$, so ist $x : y = y : (a - x)$ und daher

$$y^2 = ax - x^2$$

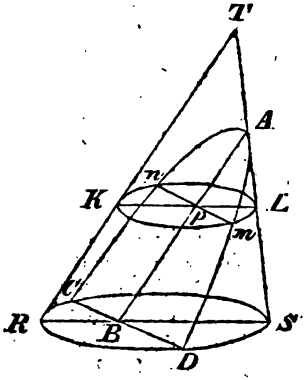
welches die Gleichung für den Kreis ist.

Die gerade Linie ist von der ersten, der Kreis von der zweyten Ordnung. Zu den Linien der letztern Art gehören auch die Kegelschnitte.

Erster Abschnitt.

Von der Parabel.

368. Erklär. Es sey RTS ein Durchschnitt eines Kegels durch seine Achse, auf welchem die Grundfläche senkrecht steht; in der Seite des Kegels nehme man einen beliebigen Punkt A, denke sich durch denselben in der Ebene RTS eine Parallele AB mit der gegenüberstehenden Seite des Kegels RT gezogen, und durch AB eine Ebene senkrecht auf die Ebene RTS gelegt, so ist der Durchschnitt derselben mit der Oberfläche des Kegels, *CAD, eine Parabel.*



1. Zus. Die Linie AB heißt die Achse der Parabel. Sie ist zugleich ihre Abscissenlinie; und der Anfangspunkt der Abscissen liegt in A, welches der Scheitel der Parabel heißt. AD und AC aber heißen die Schenkel der Parabel.

2. Zus. Eine gerade Linie, die von irgend einem Punkt der Parabel senkrecht auf die Achse geht, ist eine Ordinate, und der Theil der Achse, der zwischen A und dem Punkte liegt, in welchem die Ordinate die Achse trifft, macht die ihr zugehörige Abscisse aus.

369. Lehrs. Die Parabel wird durch die Achse in zwey gleiche und ähnliche Theile getheilt.

Bew. Da sowohl die Grundfläche des Kegels, als die Ebene durch CAD senkrecht auf der Ebene durch RTS steht, so ist auch CD auf RTS senkrecht (213.), also auch senkrecht auf RS und AB (209.), und daher eine Ordinate der Parabel. Nun ist CD auch eine Sehne des Kreises RCSD, und RS ein Durchmesser desselben; die Sehne wird daher von ihm halbirt; folglich liegt der Punkt D der Parabel so weit von der Achse als der Punkt C.

Dasselbe gilt von jeden zwey andern senkrecht von demselben Punkt der Achse liegenden Punkten der Parabel, wie m und n; folglich haben alle Punkte des einen Schenkels der Parabel dieselbe Lage gegen die Achse, wie die des andern; folglich sind beyde Schenkel einander gleich und ähnlich.

370. Lehrs. Die Abscissen der Parabel verhalten sich wie die Quadrate der ihnen zugehörigen Ordinaten.

Bew. Es seyen AB und Ap (s. die vorhergehende Figur) zwey Abscissen, und BD und pm die ihnen zugehörigen Ordinaten; man durchschneide den Kegel durch pm parallel mit der Grundfläche, so ist der Durchschnitt ein Kreis, und pm senkrecht auf dem Durchmesser desselben KL (227. u. 216.). Folglich ist

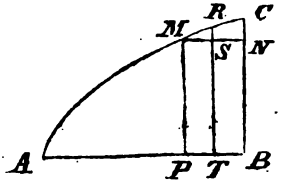
$$\left.\begin{aligned} pm^2 &= Kp \cdot pL \\ \text{und } BD^2 &= RB \cdot BS \end{aligned}\right\} \text{(155, 4. Zus.)}$$

Nun ist AB : Ap = BS : pL; und da RB = Kp ist, als Parallelen zwischen Parallelen, so ist auch

$$AB : Ap = RB \cdot BS : Kp \cdot pL \text{ (Ar. 348, 2.)}$$
$$= BD^2 : pm^2.$$

Auf gleiche Art läßt sich der Beweis für jede zwey andere Abscissen und ihre Ordinaten führen; folglich gilt der Satz allgemein.

371. Lehrs. Die Parabel ist eine krumme Linie.



Bew. Es sey AB die Achse einer Parabel, und AC der eine Schenkel derselben; man nehme einen beliebigen Punkt M in der Parabel, und ziehe die Ordinate PM, so ist $AP : AB = PM^2 : BC^2$ (370.). Wäre aber AC eine gerade Linie, so müßte $AP : AB = PM : BC$ seyn. Also ist AC keine gerade Linie.

Zus. Auch kein Stück der Parabel, wie MC, kann eine gerade Linie seyn.

Denn man ziehe MN || AB und von irgend einem Punkt R der Linie MC die Ordinate RT, so ist

1) $AT : AP = TR^2 : PM^2$

also auch $(AT - AP) : (TR^2 - PM^2) = AP : PM^2$ (Nr. 342, 5.)

d. i. $PT : (TR + PM) . (TR - PM) = AP : PM^2$

oder $MS : (TR + TS) . RS = AP : PM^2$

2) $AB : AP = BC^2 : PM^2$

also auch $(AB - AP) : (BC^2 - PM^2) = AP : PM^2$

d. i. $PB : (BC + PM) . (BC - PM) = AP : PM^2$

oder $MN : (BC + BN) . CN = AP : PM^2$

Dieß mit der letzten Proportion unter Nr. 1. verglichen gibt

$MS : MN = (TR + TS) . RS : (BC + BN) . CN$.

Wäre aber MC eine gerade Linie, so wäre

$$MS : MN = RS : CN$$

also verschieden von der vorhergehenden Proportion; folglich kann MC keine gerade Linie seyn.

372. Lehrs. Die Parabel ist eine krumme Linie, die sich nie schließt, sondern deren Schenkel je länger je weiter sich von der Achse entfernen.

Bew. Da die Quadrate der Ordinaten in dem Verhältniß wachsen, in welchem die Abscissen zunehmen, so müssen auch die Ordinaten selbst mit den Ab-

sciſſen immer größer werden; folglich können die Schenkel der Parabel sich nicht der Achse nähern, sondern müssen sich immer weiter von ihr entfernen.

Anmerk. Dieß läßt sich auch aus dem Durchschnitte des Kegels, durch den die Parabel entsteht, abnehmen: denn dieser trifft immer die Grundfläche des Kegels, welche desto größer wird, je weiter sie sich von der Spitze entfernt.

373. Lehrs. Die dritte Proportionallinie zu jeder Abscisse derselben Parabel und ihrer zugehörigen Ordinate ist eine beständige Größe.

Es seyen z. B. x und y, ingleichen u und z zusammengehörige Coordinaten derselben Parabel, und $x : y = y : p$; ingleichen $u : z = z : \pi$, so ist $p = \pi$.

Bew. Es ist $p = \frac{y^2}{x}$

und $\pi = \frac{z^2}{u}$

also $p : \pi = \frac{y^2}{x} : \frac{z^2}{u}$

Nun ist $y^2 : z^2 = x : u$ (370.)

folglich $p : \pi = \frac{x}{x} : \frac{u}{u} = 1 : 1$

also ist $p = \pi$.

374. Erklär. Die dritte Proportionallinie zu irgend einer Abscisse einer Parabel und ihrer zugehörigen Ordinate heißt der Parameter derselben.

1. Zus. Es seyen x und y zwey Coordinaten und der Parameter sey p, also $x : y = y : p$, so ist

$$y^2 = px$$

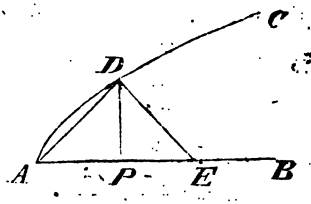
Dieß macht die Gleichung der Parabel aus.

2. Zus. Setzt man in der Gleichung für die Parabel $x = 0$, so wird auch $y^2 = 0$, folglich auch $y = 0$; und ist $x = \infty$, so wird auch $y^2 = \infty$, also auch

$y = \infty$, weil das Quadrat einer endlichen Größe nicht unendlich groß werden kann; indessen da $p : y = y : x$ ist, und eine endliche Größe gegen eine unendliche verschwindet, so muß auch y, obgleich unendlich, gegen die unendliche Größe von x als verschwindend betrachtet werden.

3. Zus. Man findet den Parameter einer gegebenen Parabel, wenn man zu einer beliebigen Abscisse derselben und ihrer Ordinate die dritte Proportionallinie sucht.

375. Aufg. Noch ein anderes Verfahren den Parameter zu finden.

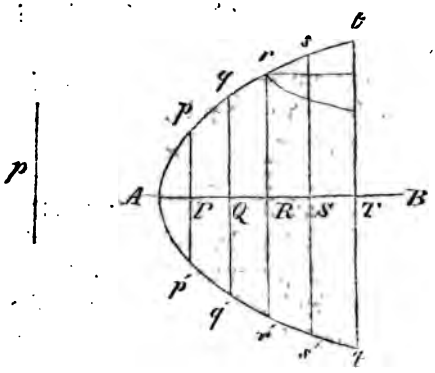


Auflös. Es sey AB die Achse und AC ein Schenkel einer Parabel; man ziehe aus dem Scheitel A eine beliebige Sehne AD, errichte aus D ein Perpendikel DE auf AD und ziehe DP senkrecht auf AB, so ist PE der Parameter.

Bew. Da der Winkel ADE = 1 R. ist, so ist D ein Punkt in der Peripherie des Halbkreises über AE; folglich $AP \cdot PE = DP^2$ (155, 4. Zus.). Es ist aber auch $DP^2 = p \cdot AP$ (374, 1. Zus.): also $AP \cdot PE = p \cdot AP$; und daher PE = p.

Zus. Ist der Winkel DAP = DEP = ½ R., so ist AP = PE = DP; folglich der Parameter der Abscisse und der Ordinate gleich.

376. Aufg. Eine Parabel zu construiren.



Auflös. Man ziehe eine beliebige gerade Linie AB, welches die Achse der Parabel seyn soll, nehme eine andere beliebige gerade Linie p zum Parameter an, schneide darauf auf AB eine willkührliche Anzahl von Abscissen AP, AQ, AR ꝛc. ab, suche zwischen jeder Abscisse und dem angenommenen Parameter p eine mittlere Proportionallinie und errichte diese im Endpunkte der Abscisse zu beyden Seiten von AB senkrecht auf AB, endlich ziehe man aus A durch die Endpunkte aller Perpendikel eine Linie, so ist dieß die verlangte Parabel.

Bew. Bezeichnet man irgend eines dieser Perpendikel durch y und die zugehörige Abscisse durch x, so wird nach der Construction $x : y = y : p$, also $y^2 = p\,x$, welches die Gleichung für die Parabel ist (374, 1. Zus.).

Anmerk. Je näher man die Punkte P, Q, R bey einander nimmt, desto genauer wird die durch die Endpunkte der Perpendikel gezogene Parabel.

377. Lehrs. Die Unterschiede der Ordinaten werden, bey gleichen Unterschieden der Abscissen, immer kleiner, je größer die Abscissen sind.

Bew. Es sey eine Abscisse $= x$ und die ihr zugehörige Ordinate $= y$; eine andere Abscisse sey $= u$, und die ihr zugehörige Ordinate $= z$; ferner sey $u - x$

$= d$; alsdann ist $y^2 = px$ und $z^2 = pu$ (374, 1. Zus.) folglich ist

$$z^2 - y^2 = pu - px = p\,(u - x)$$

oder $(z + y) \cdot (z - y) = pd$

folglich $z - y = \frac{pd}{z + y}$.

In diesem Ausdruck ist der Zähler (pd) als unveränderlich zu betrachten, der Nenner wird aber desto größer, je größer die Abscissen u und x sind (372.), folglich wird der Bruch selbst desto kleiner; also wird auch $z - y$ d. i. der Unterschied der Ordinaten desto kleiner, je größer die Abscissen sind.

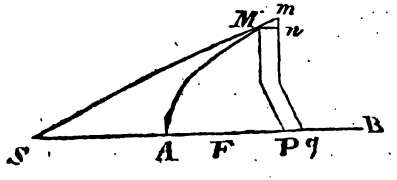
Zus. Die Schenkel einer Parabel nähern sich, je weiter sie fortgehen, immer mehr einer der Achse parallelen Richtung.

378. Erklär. Derjenige Punkt der Achse, in welchem die Ordinate dem halben Parameter gleich ist, heißt der Brennpunkt (focus) der Parabel.

Zus. Wenn man $y = \frac{1}{2}p$ in die Gleichung $y^2 = px$ setzt, so ergibt sich $x = \frac{1}{4}p$; folglich ist der Abstand des Brennpunkts vom Scheitel dem vierten Theil des Parameters gleich.

379. Erklär. Wenn MS eine Tangente an die Parabel in dem Punkt M ist, und MP eine Ordinate, so heißt PS die Subtangente der Parabel für den Punkt M.

Auch bey den andern Kegelschnitten heißt derjenige Theil der Achse, welcher zwischen die beyden Punkte fällt, in welchen Tangente und Ordinate dieselbe treffen, die Subtangente.



380. Lehrs. Die Subtangente PS ist noch einmal so groß als die Abscisse AP.

Bew. Es sey PS = s, AP = x, PM = y; man denke sich die Ordinate qm unendlich nahe bey PM gezogen, und ziehe Mn ∥ Pq: so kann man den unendlich kleinen Bogen der Parabel Mm als eine gerade Linie betrachten; und dann ist das Dreyeck Mnm ∼ SPM.

Man bezeichne Pq = Mn durch d; und mn durch δ, so ist

$$s : y = d : \delta$$

Ferner ist Aq : AP = qm² : PM²

oder $(x + d) : x = (y + \delta)^2 : y^2$

folglich auch

$$(x + d - x) : [(y + \delta)^2 - y^2] = x : y^2$$

$$\text{d. i. } d : 2y\delta + \delta^2 = x : y^2$$

wofür man, da δ^2 gegen $2y\delta$ als verschwindend anzusehen ist, ohne Nachtheil setzen kann

$$d : 2y\delta = x : y^2$$

Verbindet man diese mit der ersten Proportion, indem man jene umkehrt, so hat man

$$d : 2y\delta = x : y^2$$

$$\text{und } \delta : d = y : s$$

$$\text{also } 1 : 2y = x : sy$$

$$\text{folglich } sy = 2xy$$

$$\text{und daher } s = 2x$$

Zus. Da PS = 2x ist, so ist AS = x, und wenn der Brennpunkt in F liegt, so ist FS = $x + \frac{1}{4}p$ (378, Zus.).

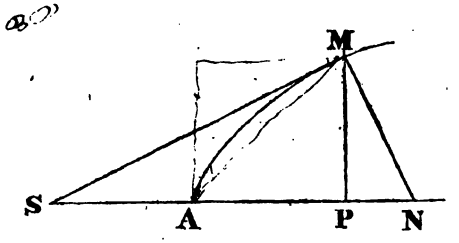
381. Aufg. An einen Punkt M der Parabel eine Tangente zu ziehen.

Auflös. Man fälle von M (s. die vorhergeh. Fig.) das Perpendikel PM auf die Achse AB, verlängre die Achse über den Scheitelpunkt hinaus, und mache

ODM = OFM; folglich W. o = u. Die Linie OM halbirt also den Winkel DMF; folglich ist sie eine Tangente an M. (383, Zus.).

Auf ähnliche Weise läßt sich zeigen, daß auch Om eine Tangente an m ist.

385. **Erklärung:** Das Perpendikel MN auf die Tangente SM in M heißt die **Normale** oder **Normallinie**, und derjenige Theil der Achse, welcher zwischen den Punkten P und N liegt, in welchen die Ordinate und die Normale die Achse treffen, PN, die **Subnormallinie**. Dergleichen Linien finden auch bey den andern Kegelschnitten statt.



386. **Aufg. Eine Gleichung für die Tangente, die Subnormale und Normale der Parabel zu finden.**

Auflös. und Bew. I. Es ist SM^2 (s. die vorhergeh. Fig.) $= SP^2 + PM^2 = 4x^2 + y^2 = 4x^2 + px$ (374, 1. Zus.) $= x(4x + p)$; und daher $SM = \sqrt{x(4x + p)}$.

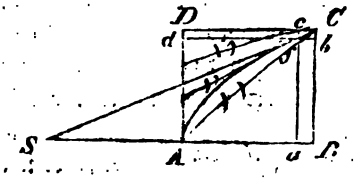
II. Es ist SP : PM = PM : PN (98, 1. Zus.) d. i. 2x : y = y : PN; folglich $PN = \frac{y^2}{2x} = \frac{px}{2x} = \frac{1}{2}p$. Folglich ist die Subnormale einer Parabel eine beständige Größe.

III. Es ist $MN^2 = PM^2 + PN^2 = y^2 + \frac{1}{4}p^2 = px + \frac{1}{4}p^2 = \frac{1}{4}p(4x + p)$; $MN = \frac{1}{2}\sqrt{p(4x + p)}$

d. i. die Hälfte der mittlern Proportionallinie zwischen p und $4x + p$.

Zus. Aus den Gleichungen für SM^2 und MN^2 folgt $SM^2 : MN^2 = x : \frac{1}{4}p = 2x : \frac{1}{2}p = SP : PN$. (Vergl. 98, 4. Zus.).

387. Lehrs. Der Flächenraum ACB, der zwischen dem einen Schenkel der Parabel AC, und den Coordinaten AB und BC enthalten ist, ist $\frac{2}{3}$ so groß als das Parallelogramm ABCD.



Bew. Es sey CS eine Tangente der Parabel an C, und Cbfa ein Parallelogramm, das so klein ist, daß der Theil der Tangente Cf, der seine Diagonale ausmacht, von dem Bogen der Parabel nicht verschieden ist; man verlängre darauf cf bis a und bf bis d, so ist

$$Cb : bf = CB : BS$$

oder

$$Cb : Ba = CB : 2AB$$

folglich

$$Ba \cdot CB = 2 \cdot AB \cdot Cb$$
$$= 2 \cdot CD \cdot Cb.$$

Das Parallelogramm CBac, das fast ganz innerhalb der Parabel liegt, ist also noch einmal so groß, als das Parallelogramm CDdb, das fast ganz außerhalb derselben fällt.

Man muß aber sich das Parallelogramm Cbfc um-

endlich klein vorstellen, wenn seine Diagonale mit der Tangente und dem Bogen der Parabel zusammenfallen soll; folglich kann man bey Vergleichung der Parallelogramme CBac und CDdb die unendlich kleinen Theile Ccf und Cbf vernachlässigen.

Man kann ferner an den Punkt f eine Tangente ziehen, und über fa auf ähnliche Art Parallelogramme construiren, wie über CB und Cb; und auf diese Art kann man so lange fortfahren, bis der ganze Flächenraum ABCD in lauter kleine Parallelogramme zertheilt ist. Immer wird sich finden, daß das Parallelogramm, welches innerhalb der Parabel fällt, noch einmal so groß als dasjenige ist, welches außerhalb derselben fällt.

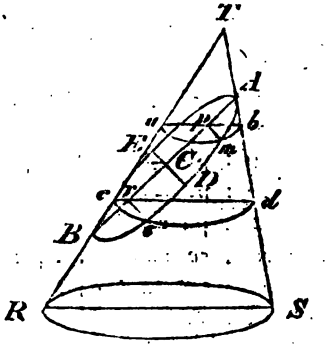
Folglich muß auch die Summe aller Parallelogramme innerhalb der Parabel, d. i. der Flächenraum ACB noch einmal so groß seyn als die Summe aller Parallelogramme außerhalb derselben, d. i. als der Flächenraum ADC.

Denkt man sich also das Parallelogramm ABCD in 3 gleiche Theile getheilt, so kommen zwey derselben auf den Flächenraum ACB, und einer auf den Flächenraum ADC; folglich ist ACB $= \frac{2}{3}$ ABCD.

Zweyter Abschnitt.

Von der Ellipse.

388. Erklär. Wenn ein Kegel schief gegen die Grundfläche durchschnitten wird, so daß der Schnitt durch beyde Seiten des Kegels geht: so ist der Durchschnitt eine Ellipse.



Es sey wieder RTS ein Durchschnitt eines Kegels durch seine Achse, auf welchem die Grundfläche senkrecht steht; in der Ebene RTS denke man sich die gerade Linie AB gezogen, die beyde Seiten des Kegels trifft, und durch AB eine Ebene senkrecht auf RTS gelegt, so ist der Durchschnitt des Kegels durch diese Ebene die Ellipse.

Anmerk. Der Winkel ABT darf nicht dem Winkel RST gleich seyn, wovon der Grund aus §. 391. erhellet.

1. Zus. Die Linie AB heißt die große Achse; ein Perpendikel DE durch die Mitte derselben, die kleine Achse; und der Durchschnittspunkt beyder, C, der Mittelpunkt der Ellipse.

2. Zus. Wenn man AB als Abscissenlinie annimmt, so werden die Perpendikel darauf die Ordinaten.

389. Lehrs. Es verhalten sich die Quadrate der Ordinaten, wie die Produkte der zugehörigen Abschnitte der großen Achse.

Es seyen pm und rs zwey Ordinaten, so soll $pm^2 : rs^2 = Ap \cdot Bp : Ar \cdot Br$ seyn.

Bew. Da die Ebene der Ellipse senkrecht auf der Ebene RTS ist und die Ordinaten pm und rs senkrecht auf AB, so sind sie auf der ganzen Ebene RTS senkrecht (212, 1. Zus.). Durchschneidet man also den Kegel durch

pm und rs parallel mit der Grundfläche, so stehen diese Ordinaten auch auf den Durchmessern der Kreise ab und cd senkrecht. Es ist daher

$$\left.\begin{array}{r} pm^2 = pa \cdot pb \\ \text{und } rs^2 = rc \cdot rd \end{array}\right\} \text{(155, 4. Zus.)}$$

Ferner ist $Ap : pb = Ar : rd$

Ingleichen $Bp : pa = Br : rc$

folgl. $Ap \cdot Bp : pb \cdot pa = Ar \cdot Br : rd \cdot rc$

oder $pb \cdot pa : rd \cdot rc = Ap \cdot Bp : Ar \cdot Br$

oder $pm^2 : rs^2 = Ap \cdot Bp : Ar \cdot Br$.

Anmerk. Bey dem Kreise verhalten sich die Quadrate der Ordinaten auch wie die Produkte aus den zugehörigen Abschnitten des Durchmessers; es kommt aber noch hinzu, daß die Quadrate diesen Produkten gleich sind, welches bey der Ellipse nicht statt findet.

1. Zus. Wenn man statt rs die halbe kleine Achse CD nimmt, so ist $pm^2 : CD^2 = Ap \cdot Bp : AC \cdot BC$ oder $pm^2 : Ap \cdot Bp = CD^2 : AC^2$.

2. Zus. Es sey die große Achse $= a$, die kleine $= b$, $Ap = x$, $pm = y$, so ist

$$y^2 : x(a - x) = \tfrac{1}{4} b^2 : \tfrac{1}{4} a^2$$
$$= b^2 : a^2.$$

3. Zus. Ist die kleine Achse der großen gleich, so wird $b^2 = a^2$, also auch $y^2 = x(a - x)$, folglich die Figur ein Kreis (367, Anmerk. b.).

390. Erklär. Wird ein schiefer Kegel so durchschnitten, daß der Winkel $ABT = RST$, also auch $BAT = SRT$ ist, so heißt der Schnitt ein Wechselschnitt (sectio subcontraria).

391. Lehrs. Wenn der Durchschnitt eines schiefen Kegels ein Wechselschnitt ist, so bildet derselbe keine Ellipse, sondern einen Kreis.

Bew. Es sey der Winkel $ABT = RST$; man halbire AB in c, und durchschneide den Kegel durch c parallel mit

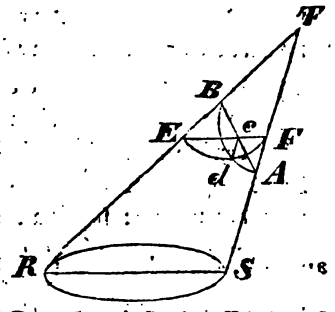
der Grundfläche; alsdann ist Dr. AcF ∽ BcE; folglich

$$Ec : Bc = Ac : Fc$$

oder, da $Bc = Ac$ ist, $Ec : Ac = Ac : Fc$

Es ist aber auch $Ec : cd = cd : Fc$, weil d. Durchschnitt EdF ein Kreis ist (268.) folgl. ist $Ac^2 = Ec \cdot Fc = cd^2$

Also auch $Ac = cd$ d. i. die halbe große Achse = der halben kleinen Achse, und daher auch die ganze große der ganzen kleinen Achse gleich; folglich ist der Durchschnitt AdB ein Kreis (389, 3. Zus.).



Zus. Da cd der Halbmesser des schiefen Durchschnittes ist, in dem parallelen Durchschnitte aber nur die Hälfte einer Sehne ausmacht, so gibt der parallele Durchschnitt durch die Mitte des schiefen einen größern Kreis, als dieser ist.

392. Erklär. Die dritte Proportionallinie zur großen und kleinen Achse heißt der Parameter der großen Achse der Ellipse.

1. Zus. Man bezeichne den Parameter wieder durch p, so ist $a : b = b : p$; und daher $b^2 = ap$.

2. Zus. Wenn man in die Proportion (389, 2. Zus.) ap statt b^2 setzt, so erhält man

$$y^2 : x(a - x) = ap : a^2$$
$$= p : a$$

und daher

$$y^2 = \frac{apx - px^2}{a}$$

$$= px - \frac{px^2}{a}$$

welches die Gleichung für die Ellipse vom Anfange der großen Achse ist.

Anmerk. Aus dieser Gleichung lassen sich verschiedene Eigenschaften der Ellipse entwickeln, wenn man $x = 0$, oder $= \frac{1}{2}a$, oder $= a$, oder $> a$ setzt.

393. Aufg. Die Gleichung für die Ellipse zu finden, wenn der Anfang der Abscissen in den Mittelpunkt der Ellipse gesetzt wird.

Auflös. und Bew. Man nenne die Abscisse aus dem Mittelpunkt u; heißt nun die Abscisse vom Anfange der großen Achse für denselben Punkt x, so ist $x = \frac{1}{2}a - u$. Man setze also diesen Werth für x in die eben gefundene Gleichung der Ellipse: so erhält man

$$y^2 = \frac{1}{4}ap - \frac{pu^2}{a} = \frac{1}{4}b^2 - \left(\frac{bu}{a}\right)^2$$

welches die Gleichung für die Ellipse aus dem Mittelpunkt ist.

1. Zus. $\frac{1}{4}ap$ ist eine beständige Größe; je größer also u wird, desto kleiner wird y^2, folglich auch y selbst. Hieraus folgt, daß unter allen Ordinaten auf die große Achse die halbe kleine Achse die größte ist, und daß die Ordinaten immer kleiner werden, je weiter sie vom Mittelpunkt abliegen.

2. Zus. Da u^2 einerley Werth hat, es mag u positiv oder negativ seyn, d. h. man mag die Abscissen aus dem Mittelpunkt nach der einen oder nach der andern Seite hin auf der großen Achse nehmen, so folgt, daß beyde Theile der Ellipse zu beyden Seiten der kleinen Achse einander gleich und ähnlich sind.

Ueberdieß hat jedes y zwey gleiche, aber entgegengeſetzte Werthe — weil die Quadratwurzel aus einer Größe ſowohl poſitiv als negativ iſt — woraus folgt, daß auch die beyden Theile der Ellipſe über und unter der großen Achſe einander gleich und ähnlich ſind.

394. Aufg. **Die Gleichung für die Ellipſe zu finden, wenn die Abſciſſen aus dem Mittelpunkt auf der kleinen Achſe genommen werden.**

Auflöſ. und Bew. In dieſem Fall werden die Ordinaten den Abſciſſen, und die Abſciſſen den Ordinaten auf der großen Achſe gleich. Setzt man alſo die Abſciſſe auf der kleinen Achſe $= v$, und die zugehörige Ordinate $= z$, ſo iſt $v = y$; $z = u$; und daher nach der vorigen Gleichung $v^2 = \frac{1}{4} b^2 - \left(\frac{bz}{a}\right)^2$, woraus man leicht die geſuchte Gleichung findet, nehmlich

$$z^2 = \frac{1}{4} a^2 - \left(\frac{av}{b}\right)^2.$$

1. Zuſ. Es ſey $b : a = a : q$, und q heiße der **Parameter der kleinen Achſe**, ſo iſt

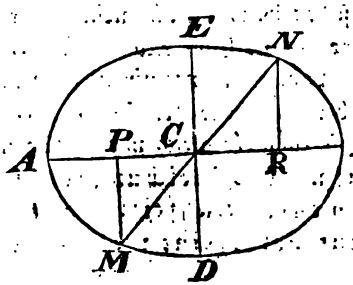
$$z^2 = \frac{1}{4} bq - \frac{qv^2}{b}.$$

2. Zuſ. Setzt man den Anfang der Abſciſſen in den Endpunkt der kleinen Achſe, und nennt die Abſciſſe s für denſelben Punkt der Ellipſe, für welchen die Ordinate z gilt, ſo iſt $s = \frac{1}{2} b - v$; folglich $v = \frac{1}{2} b - s$; und dieſer Werth in die vorige Gleichung (1. Zuſ.) geſetzt, gibt

$$z^2 = qs - \frac{qs^2}{b}.$$

Anmerk. Es erhellet, daß die Gleichungen der Ellipſe für die kleine Achſe denen für die große völlig ähnlich ſind.

395. **Erklär.** Eine gerade Linie, die, wie MN, durch den Mittelpunkt der Ellipſe geht, heißt ein **Durchmeſſer.**



396. Lehrs. Durch einen Durchmesser, MN, wird die Ellipse in zwey gleiche und ähnliche Theile getheilt.

Bew. Durch die beyden Achsen, AB und DE, wird die Ellipse in vier gleiche und ähnliche Theile getheilt (393, 2. Zus.); zieht man nun die Ordinaten MP und NR, und läßt es sich erweisen, daß die Abscissen CP und CR einander gleich sind, so ist auch CPMD $\cong$ CRNE, ingleichen Dr. CPM $\cong$ CRN; woraus sich dann von selbst ergibt, daß MAEN $\cong$ NBDM ist.

Es ist aber CP : MP = CR : NR.

folglich $MP = \frac{CP \cdot NR}{CR}$

und $MP^2 = \frac{CP^2 \cdot NR^2}{CR^2}$

ingl. ist $MP^2 = \frac{1}{4} b^2 - \frac{b^2 \cdot CP^2}{a^2}$ (393.)

folglich ist $\frac{CP^2 \cdot NR^2}{CR^2} = \frac{1}{4} b^2 - \frac{b^2 \cdot CP^2}{a^2}$

und daher $NR^2 = \frac{1}{4} b^2 \frac{CR^2}{CP^2} - \frac{b^2 \cdot CR^2}{a^2}$.

Nun ist auch $NR^2 = \frac{1}{4} b^2 - \frac{b^2 \cdot CR^2}{a^2}$ (393.)

also $\frac{CR^2}{CP^2} = 1$

folglich $CR^2 = CP^2$ und $CR = CP$.

Es sind also die Abscissen CP und CR einander gleich, ithin, dem obigen zufolge, auch MAEN ≅ NBDM.

1. Zus. Die Ordinaten MP und NR von den ndpunkten eines Durchmessers auf die große Achse sind nander gleich.

2. Zus. Auch die Ordinaten von den Endpunkten s Durchmessers auf die kleine Achse sind einander gleich, nn sie sind den Abscissen CP und CR gleich.

397. Erklär. Auch bey der Ellipse heißt derjenige Punkt der großen Achse, in welchem die Ordinate m halben Parameter gleich ist, der Brennpunkt.

398. Aufg. Den Abstand des Brennpunkts om Mittelpunkt oder die Excentrizität der llipse zu finden.

Auflös. und Bew. Man setze in die Gleichung r Ellipse aus dem Mittelpunkt (393.) $\frac{1}{4}p^2$ anstatt y^2. ieß gibt

$$\frac{1}{4}p^2 = \frac{1}{4}ap - \frac{pu^2}{a}$$

glich

$$\frac{1}{4}ap = \frac{1}{4}a^2 - u^2$$

nd

$$u^2 = \frac{1}{4}(a^2 - ap)$$

so

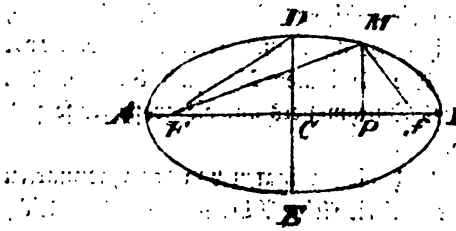
$$u = \pm\frac{1}{2}\sqrt{(a^2 - ap)}.$$

Zus. Da u sowohl positiv als negativ ist, so lgt, daß die Ellipse zwey Brennpunkte hat, und der von diesen gleichweit vom Mittelpunkt, der eine nach r einen, der andere nach der andern Seite hin, liegt.

Anmerk. Man bezeichne die Excentrizität der Ellipse rch e, und setze also

$$e = \pm\frac{1}{2}\sqrt{(a^2 - ap)}.$$

399. Aufg. Den Abstand der Brennpunkte om Endpunkt der kleinen Achse zu finden.



Auflös. und Bew. Es sey ADBE eine Ellipse, AB die große, DE die kleine Achse derselben, und die Brennpunkte liegen in F und f; man ziehe DF, so ist

$$DF^2 = CF^2 + CD^2$$
$$= e^2 + \tfrac{1}{4} b^2$$
$$= \tfrac{1}{4} a^2 - \tfrac{1}{4} ap + \tfrac{1}{4} b^2$$
$$= \tfrac{1}{4} a^2 - \tfrac{1}{4} ap + \tfrac{1}{4} ap \text{ (392, 1. Zus.)}$$
$$= \tfrac{1}{4} a^2$$

folglich $DF = \tfrac{1}{2} a$.

Zus. Hieraus ergibt sich ein leichtes Mittel, die Brennpunkte einer Ellipse zu finden.

400. Lehrs. Die Summe zweyer geraden Linien, $MF + Mf$, aus den Brennpunkten nach irgend einem Punkt M des Umfangs der Ellipse ist der großen Achse AB gleich.

Bew. Man ziehe die Ordinate $PM = y$, so ist $PF = CF + CP = e + u$; und $Pf = CF - CP = e - u$. Folglich ist

$$MF^2 = y^2 + (e + u)^2$$
$$= \tfrac{1}{4} ap - \frac{pu^2}{a} + \tfrac{1}{4} a^2 - \tfrac{1}{4} ap + u \sqrt{(a^2 - ap)} + u^2$$
$$= \tfrac{1}{4} a^2 + u \sqrt{(a^2 - ap)} + u^2 - \frac{pu^2}{a}$$
$$= \tfrac{1}{4} a^2 + u \sqrt{(a^2 - ap)} + \frac{a - p}{a} u^2$$
$$= \tfrac{1}{4} a^2 + u \sqrt{(a^2 - ap)} + \frac{a^2 - ap}{a^2} u^2$$

und daher

$$MF = \tfrac{1}{2}a + u\frac{\sqrt{(a^2 - ap)}}{a}.$$

Durch eine ganz ähnliche Rechnung findet sich

$$Mf = \tfrac{1}{2}a - u\frac{\sqrt{(a^2 - ap)}}{a}.$$

Folglich ist $MF + Mf = \tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}a = a$.

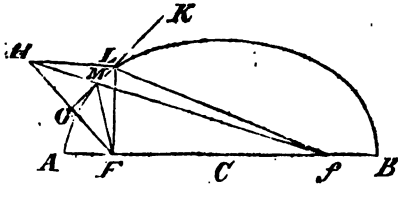
Zus. Man kann daher eine Ellipse verzeichnen, wenn man in einer geraden Linie AB zwey Punkte F und f als Brennpunkte in gleicher Entfernung von den Endpunkten der Linie willkührlich bestimmt, und über Ff als Grundlinie lauter Dreyecke beschreibt, deren Seitenlinien gleiche Summen und zwar = AB ausmachen.

Anmerk. Mechanisch pflegt man wohl eine Ellipse auf die Art zu beschreiben, daß man in den Brennpunkten ein Paar Stifte befestigt, an diese einen lockern Faden bindet, der so lang seyn muß als die große Achse, und dann den Faden mit einem Bleystift oder Griffel anspannt, und diesen so herumführt, daß der Faden immer gespannt bleibt.

Werkzeuge, Ellipsen durch eine stete Bewegung mechanisch zu beschreiben, heißen Ellipsographen. Man hat deren verschiedene Arten.

Wohl zu merken, vermittelst des Zirkels kann man keine wahren Ellipsen beschreiben.

401. Aufg. Eine Tangente an irgend einen Punkt M der Ellipse zu ziehen.



Auflös. Man ziehe aus dem einen Brennpunkt f eine gerade Linie fM, und verlängere sie so viel, als die gerade Linie von M nach dem andern Brennpunkt, F, beträgt, d. h. man mache $fH = Mf + MF$; ziehe da-

rauf HF, und durch die Mitte dieser Linie, G, und durch M die Linie GK, so ist dieses die verlangte Tangente.

Bew. Das Dreyeck HMF ist gleichschenklig, und die Linie GK steht senkrecht auf der Grundlinie (69, 2. Zus.). Zieht man daher aus irgend einem Punkt der Linie GK, z. B. aus L, ein Paar gerade Linien nach H und F, so ist LH = LF.

Gesetzt nun GK wäre keine Tangente, sondern schnitte die Ellipse in M und in L, so ziehe man fL. Alsdann wäre

fL + LF = Mf + MF (400.).

Nun ist fL + LF = fL + LH, und Mf + MF = fH; folglich wäre fL + LH = fH, welches unmöglich ist (61.). Also kann GK die Ellipse in keinem Punkt, außer M, treffen, folglich ist es eine Tangente.

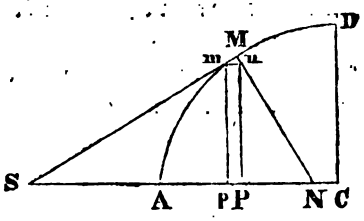
1. Zus. Die Linie GK halbirt den Winkel HMF. Nun ist der Winkel HMG = KMf. Folglich ist auch GMF = KMf, d. h. die Winkel, welche die Linien aus den Brennpunkten nach dem Berührungspunkt einer Tangente gezogen, mit der Tangente machen, sind einander gleich.

Anmerk. In einem elliptischen Gebäude werden die Schallstrahlen, die aus dem einen Brennpunkt auf die Wände gehen, von diesen nach dem andern Brennpunkt hin geworfen.

2. Zus. Ein Perpendikel aus M auf die Tangente errichtet muß den Winkel FMf halbiren. Denn man ziehe von den rechten Winkeln die gleichen Winkel GMF und KMf ab, so bleiben gleiche übrig.

3. Zus. Man kann daher auch eine Tangente an einen Punkt M der Ellipse ziehen, wenn man den Winkel, FMf, den ein Paar Linien aus den Brennpunkten nach M gezogen einschließen, halbirt, und auf die Theilungslinie in M ein Perpendikel errichtet.

402. Aufg. Die Gleichung für die Subtangente einer Ellipse zu finden.



Auflös. und Bew. Es sey CAMD ein Quadrant einer Ellipse, SM eine Tangente an M, und PM die dazu gehörige Ordinate; man denke sich alsdann pm unendlich nahe an PM, und ziehe mn || SP, so ist

SP : PM = mn : Mn d. i. s : y = d : δ

(wenn s die Subtangente, und d und δ die unendlich kleinen Größen pP und Mn bezeichnen).

Ferner ist $PM^2 : pm^2 = a^2 - 4u^2 : a^2 - 4(u+d)^2$ *)

d. i. $y^2 : (y-\delta)^2 = a^2 - 4u^2 : a^2 - 4(u+d)^2$

folglich $y^2 - (y-\delta)^2 : (a^2 - 4u^2) - (a^2 - 4(u+d)^2) = y^2 : a^2 - 4u^2$

d. i. $2y\delta - \delta^2 : 8ud + 4d^2 = y^2 : a^2 - 4u^2$

oder mit Vernachlässigung der unendlich kleinen Größen δ^2 und $4d^2$.

$$y\delta : 4ud = y^2 : a^2 - 4u^2$$

hierzu $d : \delta = s : y$ (nach obiger Proport.)

$$y : 4u = sy : a^2 - 4u^2$$

und hieraus $s = \frac{a^2 - 4u^2}{4u} = \frac{a^2}{4u} - u$

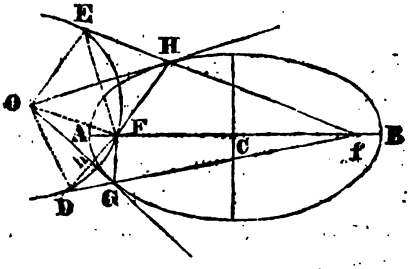
1. Zus. Zieht man die Normale MN, so ist SP : PM = PM : PN; folglich die Subnormale $PN = \frac{y^2}{s} = p : \frac{a^2 - 4u^2}{4u} : \frac{a^2 - 4u^2}{4u} = \frac{pu}{a} = \frac{b^2}{a^2} u.$

2. Zus. Da CP = u, und $PN = \frac{b^2}{a^2} u$ ist, so

*) Wie sich leicht aus 393. ableiten läßt.

ist CP : PN = $a^2 : b^2$ d. i. die Abscisse aus dem Mittelpunkt erhält sich zur Subnormale, wie das Quadrat der großen Achse zum Quadrat der kleinen.

403. Aufg. Von einem Punkt außerhalb der Ellipse die Tangenten an dieselbe zu ziehen.

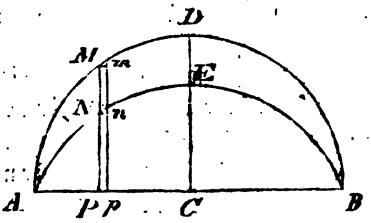


Auflös. Es sey O dieser Punkt und F und f die Brennpunkte der Ellipse; man beschreibe aus O, mit OF, einen Kreis, und mache in demselben aus f mit einer Eröffnung des Zirkels = der großen Achse, AB, die Durchschnitte D und E; darauf ziehe man Df und Ef, und nach den Durchschnittspunkten G und H die Linien OG und OH, so sind dieses die Tangenten.

Bew. Man ziehe OF, OD und GF, so ist Dr. GOF = GOD (57.), folglich Winkel DOG = FOG. Zieht man alsdann noch DF, so ist Dr. DOh = FOh (55.), folglich Dh = Fh, und die Winkel bey h rechte; folglich ist OG eine Tangente (401.).

Auf ähnliche Art erweist sich auch, daß OH eine Tangente in H ist, wenn man die Linien OE, FH und FE zieht.

404. Lehrs. Die Ellipse verhält sich zu dem Kreise um die große Achse, wie die kleine Achse zur großen.



Bew. Es sey ADB ein Halbkreis, und AEB die Hälfte einer Ellipse; man ziehe aus irgend einem Punkt P der großen Achse eine Ordinate sowohl an die Ellipse als an den Kreis, so ist

$PM^2 : CD^2 = AP . PB : AC^2$

und $PN^2 : CE^2 = AP . PB : AC^2$ (389, 1. Zus.)

Folgl. $PM^2 : PN^2 = CD^2 : CE^2$

also auch $PM : PN = CD : CE$

Man denke sich nun AB in eine unendliche Menge gleicher Theile getheilt, und über jedem derselben ein Rechteck beschrieben, das bis an die Peripherie des Kreises geht, vergleichen PpmM vergrößert vorstellt: so wird der ganze Flächenraum sowohl des Kreises als der Ellipse in lauter Rechtecke von gleichen Grundlinien zertheilt — bey der unendlichen Kleinheit der Grundlinien ist der kleine Raum, der in der Ellipse über der Linie Nn, und im Kreise über Mm liegt, für nichts zu achten. Nun ist $PpmM : PpnN = PM : PN = CD : CE$; und eben so verhalten sich jede zwey andere über derselben Grundlinie liegenden Rechtecke des Kreises und der Ellipse $= CD : CE$. Folglich verhält sich auch die Summe aller Rechtecke des Halbkreises zur Summe aller Rechtecke der halben Ellipse, d. i. die Fläche des Halbkreises zur Fläche der halben Ellipse $= CD : CE$; also auch die Fläche des ganzen Kreises zur Fläche der ganzen Ellipse, wie $CD : CE$, d. i. wie die halbe große zur halben kleinen

Achse, folglich auch wie die ganze große zur ganzen kleinen Achse.

1. Zus. Daher ist der Flächeninhalt der Ellipse dem Flächeninhalt eines Kreises gleich, dessen Durchmesser die mittlere Proportionallinie zwischen der großen und kleinen Achse der Ellipse ist.

Denn es sey der Kreis um die große Achse = C, die Ellipse = E und der Kreis, dessen Durchmesser die mittlere Proportionallinie zwischen a und b ist, = C', so ist

$$C : E = a : b$$

und $C : C' = a^2 : ab = a : b$ (181. 3. Zus.)

folglich $C : E = C : C'$.

Da nun $C = C$ ist, so ist auch $E = C'$.

2. Zus. Da $C = \frac{1}{4} a^2 \pi$ ist, so ist $E = \frac{1}{4} a^2 \pi \frac{b}{a}$ $= \frac{1}{4} ab\pi$ d. h. der Flächeninhalt der Ellipse ist dem Produkt ihrer beyden halben Achsen mit der ludolphischen Zahl gleich.

405. Lehrs. Zwey Ellipsen verhalten sich, ihrem Flächeninhalte nach, wie die Produkte ihrer beyden Achsen.

Bew. Es sey die eine Ellipse E, ihre beyden Achsen a und b; die andere Ellipse sey = e, ihre beyden Achsen a' und b', so ist, nach 404, 2. Zus.

$$E = \frac{1}{4} ab\pi,$$

$$e = \frac{1}{4} a'b'\pi$$

folglich $E : e = \frac{1}{4} ab\pi : \frac{1}{4} a'b'\pi$

$$= ab : a'b'.$$

1. Zus. Die Flächenräume zweyer Ellipsen, deren große Achsen gleich sind, verhalten sich, wie die kleinen Achsen; und sind die kleinen Achsen gleich, so verhalten sich die Flächenräume, wie die großen Achsen.

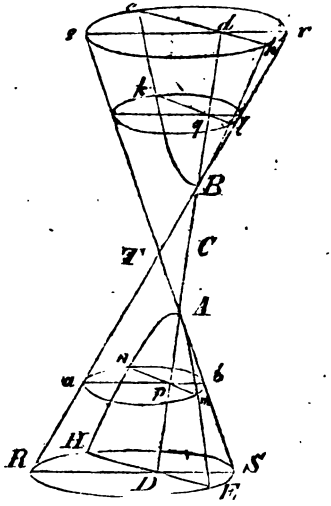
2. Zus. Ellipsen sind, dem Flächeninhalte nach,

einander gleich, wenn die Produkte ihrer Achsen einander gleich sind, d. i. wenn ihre großen Achsen sich **umgekehrt** verhalten, wie die kleinen Achsen.

Dritter Abschnitt.

Von der Hyperbel.

406. **Erklär.** Wenn man die Seiten des Kegels RTS über die Spitze, T, hinaus verlängert, so bildet sich ein zweyter umgekehrter, aber dem erstern völlig gleicher Kegel. Durchschneidet man diese beyden Kegel mit einer Ebene zugleich, ohne daß der Schnitt durch ihre Spitzen in T geht, so gibt der Durchschnitt eine **Hyperbel**.



Es sey also wieder die Ebene durch die Achsen der Kegel auf den Grundflächen beyder senkrecht; in ihr sey *die Linie Dd*, die beyde Kegel trifft, und durch sie werde

eine zweyte Ebene senkrecht auf die erstere gelegt, so sind die Durchschnitte HAE und hBe in beyden Kegeln Hyperbeln; und zwar heißen sie zusammengehörige und entgegengesetzte Hyperbeln.

Die Linie AB zwischen beyden Hyperbeln wird die erste Achse oder Hauptachse, von manchen auch die Zwerchachse genannt; die Mitte derselben C ist der Mittelpunkt, und A und B sind Scheitel der Hyperbeln.

Die verlängerte Achse ist zugleich die Abscissenlinie, und der Anfang derselben wird in A oder B oder C gesetzt.

407. Lehrs. Die Quadrate der Ordinaten verhalten sich wie die Produkte der ihnen zugehörigen Abscissen und der um diese Abstissen verlängerten ersten Achse.

Es seyen DE und pm Ordinaten der Hyperbel HAE, und der Anfang der Abscissen in A, so ist

$$DE^2 : pm^2 = AD \cdot (AB + AD) : Ap \cdot (AB + Ap)$$
$$= AD \cdot BD : Ap \cdot Bp.$$

Bew. Man durchschneide den Kegel RTS durch pm parallel mit der Grundfläche, so ist aus eben dem Grunde wie in 389.

$$pm^2 = pa \cdot pb,$$

ingleichen $DE^2 = DR \cdot DS.$

Ferner ist

$$BD : DR = Bp : pa$$

und $AD : DS = Ap : pb$

folglich $BD \cdot AD : DR \cdot DS = Bp \cdot Ap : pa \cdot pb$

oder $BD \cdot AD : DE^2 = Bp \cdot Ap : pm^2.$

Also auch

$$DE^2 : mp^2 = BD \cdot AD : Bp \cdot Ap.$$

Zus. Dasselbe gilt auch von der Hyperbel hBe, wenn man den Anfang der Abscissen in B setzt.

408. Lehrs. Entgegengesetzte Hyperbeln sind gleich und ähnlich.

Bew. Es sey Bq = Ap, Bd = AD, so ergibt sich vermittelst des vorhergehenden Satzes

$$DE^2 : pm^2 = dh^2 : ql^2$$

also auch $DE : pm = dh : ql$.

Nun ist $BD : DR = Bd : dr$

und $AD : DS = Ad : ds$

Also $BD \cdot AD : DR \cdot DS = Bd \cdot Ad : dr \cdot ds$;

und da $BD \cdot AD = Ad \cdot Bd$ ist, so ist auch

$DR \cdot DS = dr \cdot ds$

folglich $DE^2 = dh^2$

und $DE = dh$

also ist auch $pm = ql$,

d. h. die Ordinaten gleicher Abscissen sind gleich; folglich sind die Hyperbeln gleich und ähnlich.

409. Erklär. Eine Linie, deren Quadrat sich zu dem Quadrat der ersten Achse so verhält, wie das Quadrat der Ordinate zu dem Produkt der zugehörigen Abscisse und der um diese Abscisse vergrößerten ersten Achse, heißt die zweyte Achse oder Nebenachse — und beyde Achsen zusammen heißen conjugirte Achsen.

1. Zus. Es sey eine Abscisse = x, die ihr zugehörige Ordinate = y, die erste Achse = a, die zweyte = b, so ist

$$x \cdot (a + x) : y^2 = a^2 : b^2.$$

2. Zus. Es sey eine andere Abscisse u, die ihr zugehörige Ordinate z, und

$$u \cdot (a + u) : z^2 = a^2 : \beta^2$$

so ist

$$y^2 : z^2 = x\,(a + x) : u\,(a + u)$$ (407.)

oder

$$x\,(a + x) : y^2 = u\,(a + u) : z^2$$

folglich

$$a^2 : b^2 = a^2 : \beta^2$$

also $b^2 = \beta^2$

und daher auch $b = \beta$.

Die zweyte Achse ist also eben sowohl als die erste eine beständige Größe bey irgend einer bestimmten Hyperbel.

410. Erklär. Die dritte Proportionallinie zur ersten und zweyten Achse heißt der Parameter der Hyperbel.

Zus. Es sey der Parameter $= p$, so ist $a : b = b : p$ und daher $ap = b^2$.

411. Aufg. Die Gleichung für die Hyperbel zu finden.

Auflös. und Bew. Aus der Proportion (409, 1. Zus.) ergibt sich

$$y^2 = \frac{x\,(a+x)\,.\,b^2}{a^2}.$$

Man setze ap statt b^2 (410, Zus.), so ist

$$y^2 = \frac{x\,(a+x)\,ap}{a^2}$$

$$= \frac{x\,(a+x)\,p}{a}$$

$$= px + \frac{px^2}{a}$$

welches die Gleichung der Hyperbel ist.

Anmerk. Vergleicht man die Gleichungen der drey Kegelschnitte mit einander, so zeigt sich, daß das Quadrat der Ordinate bey der Parabel so groß, bey der Ellipse um eine gewisse Größe kleiner, und bey der Hyperbel um ein gewisses größer als das Rechteck px ist. Diese Art von Gleichheit, Mangel und Ueberschuß soll durch die Benennungen der Kegelschnitte bezeichnet werden.

1. Zus. Aus dieser Gleichung lassen sich verschiedene Eigenschaften der Hyperbel entwickeln, je nachdem

an x positiv oder negativ nimmt, und — x = a oder
: a oder > a setzt.

Auch zeigt sich, daß je größer x, desto größer y ist, lglich daß die Hyperbel sich so wenig als die Parabel ließt.

Zu jedem y gehören zwey gleiche, aber entgegengesetzte Werthe; folglich wird die Hyperbel durch die rlängerte Achse in zwey gleiche und ähnliche Theile geeilt.

2. Zus. Wird b = a angenommen, so wird auch = a und die Gleichung verwandelt sich in folgende

$$y^2 = ax + x^2 = (a + x)\,x.$$

ieses nennt man die gleichseitige Hyperbel.

3. Zus. Wird in dem letztern Fall x unendlich oß, so verschwindet a dagegen, und es ist $y^2 = x^2$; lglich y = x.

412. Erklär. Auch die Hyperbel hat ihre Brennunkte, und zwar sind es ebenfalls diejenigen Punkte der verlängerten Achse, in welchen die Ordinaten dem lben Parameter gleich sind.

413. Aufg. Den Abstand des Brennunkts vom Scheitel zu bestimmen.

Auflös. und Bew. Es sey der Abstand = e, setze man in die Gleichung der Hyperbel e statt x, nd ½ p statt y. Dieß gibt

$$\tfrac{1}{4}p^2 = pe + \frac{pe^2}{a}$$

lglich

$$\tfrac{1}{4}ap = ae + e^2.$$

ieß ist eine unvollständige quadratische Gleichung, urch deren Auflösung man

$$e = \frac{\pm\sqrt{(ap + a^2)}}{2} - \tfrac{1}{2}a$$

ndet.

Anmerk. Das doppelte Zeichen vor √ deutet auf die beyden nach entgegengesetzten Seiten liegenden Brennpunkte. Das positive Zeichen gilt für den Brennpunkt derjenigen Hyperbel, von deren Scheitel man ausgeht; das negative für den Brennpunkt der entgegengesetzten.

1. Zus. Setzt man den Abstand der Brennpunkte vom Mittelpunkt = r, so ist

$$r = e + \tfrac{1}{2}a = \frac{\pm\sqrt{(ap + a^2)}}{2}$$

2. Zus. Errichtet man die halbe kleine Achse im Scheitel der Hyperbel senkrecht auf die große Achse und zieht vom Endpunkt derselben die Hypotenuse nach dem Mittelpunkt, so ist diese dem Abstand der Brennpunkte vom Mittelpunkt gleich.

Denn es sey die Hypotenuse = h, so ist

$$h^2 = \tfrac{1}{4}(b^2 + a^2) = \tfrac{1}{4}(ap + a^2)$$

$$\text{folglich } h = \frac{\pm\sqrt{(ap + a^2)}}{2}$$

3. Zus. Hieraus ergibt sich ein leichtes Mittel, die Brennpunkte der Hyperbel zu finden.

414. Aufg. Die Gleichung der Hyperbel aus dem Mittelpunkt zu bestimmen.

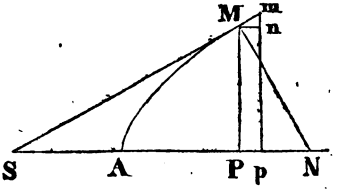
Auflös. und Bew. Man nenne die Abscisse aus dem Mittelpunkt u, so ist $u = \frac{1}{2}a + x$; folglich $x = u - \frac{1}{2}a$. Dieser Werth für x in die obige Gleichung der Hyperbel (411.) gesetzt, gibt

$$y^2 = \frac{pu^2}{a} - \tfrac{1}{4}ap.$$

Zus. Für eine andere Ordinate z und die ihr zugehörige Abscisse aus dem Mittelpunkt v, wird $z^2 = \frac{pv^2}{a} - \frac{1}{4}ap$ und daher

$$y^2 : z^2 = 4u^2 - a^2 : 4v^2 - a^2$$

415. Aufg. Die Gleichung für die Subtangente einer Hyperbel zu finden.



Auflös. und Bew. Es sey SM eine Tangente an den Punkt M, PM die dazu gehörige Ordinate, und SP die Subtangente; man nehme wieder an, es sey pm unendlich nahe an PM, Pp = d, mn = δ, und Mn ‖ Pp, so ist

$$SP : PM = Mn : mn \text{ d. i. } s : y = d : \delta$$

Ferner ist $pm^2 : PM^2 = 4(u+d)^2 - a^2 : 4u^2 - a^2$ (414, Zus.)

d. i. $(y+\delta)^2 : y^2 = 4(u+d)^2 - a^2 : 4u^2 - a^2$

Hieraus ergibt sich

$$2y\delta : 8ud = y^2 : 4u^2 - a^2$$

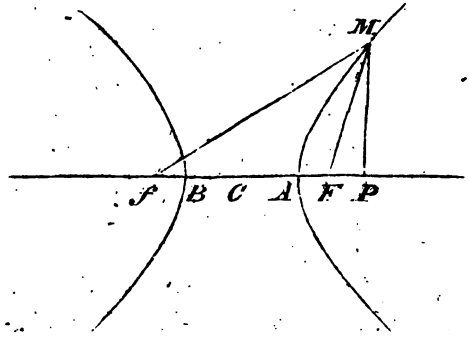
hierzu $d : \delta = s : y$ (nach obiger Proport.)

$$y : 4u = sy : 4u^2 - a^2$$

folglich $s = \frac{4u^2 - a^2}{4u} = u - \frac{a^2}{4u}$

Zus. Die Subnormale PN ist $= \frac{pu}{a}$, wie man leicht aus der Proportion SP : PM = PM : PN findet.

416. Lehrs. Die Differenz zweyer geraden Linien, Mf — MF, die von irgend einem Punkt, M, der Hyperbel nach den Brennpunkten, f und F, gehen, ist jederzeit der ersten Achse AB gleich.



Bew. Man ziehe die Ordinate MP, so ist Pf = CP + Cf = u + r, und PF = CP − CF = u − r. Nun ist

$$Mf^2 = MP^2 + Pf^2$$
$$= y^2 + (u + r)^2$$
$$= \frac{pu^2}{a} - \tfrac{1}{4}ap + u^2 + u\sqrt{(ap + a^2)} + \tfrac{1}{4}ap + \tfrac{1}{4}a^2$$
$$= u^2 + \frac{pu^2}{a} + u\sqrt{(ap + a^2)} + \tfrac{1}{4}a^2$$
$$= \frac{a+p}{a}u^2 + u\sqrt{(ap + a^2)} + \tfrac{1}{4}a^2$$
$$= \frac{ap + a^2}{a^2}u^2 + u\sqrt{(ap + a^2)} + \tfrac{1}{4}a^2$$

folglich

$$Mf = u\frac{\sqrt{(ap + a^2)}}{a} + \tfrac{1}{2}a.$$

Durch eine ganz ähnliche Rechnung findet sich

$$MF = u\frac{\sqrt{(ap + a^2)}}{a} - \tfrac{1}{2}a$$

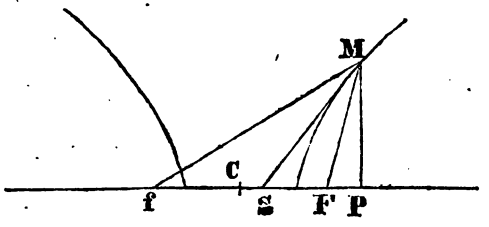
und daher

$$Mf - MF = a.$$

Zus. Hieraus ergibt sich ein Verfahren, eine Hyperbel zu verzeichnen, indem man über Ff als Grundlinie lauter Dreyecke beschreibt, deren Seitenlinien einerley Differenz = AB haben.

Anmerk. Man vergleiche diese Rechnung und Construction mit den ähnlichen bey der Ellipse (400.).

417. Lehrs. Der Winkel FMf, welchen zwey Linien, von irgend einem Punkt der Hyperbel nach den Brennpunkten gezogen, einschließen, wird durch die Tangente, SM, halbirt.

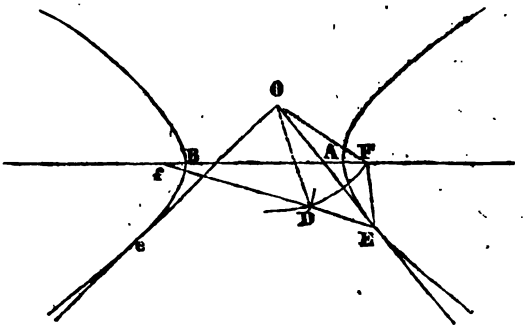


Bew. Es ist $SF = r - CS$; und $Sf = r + CS$; CS aber $= u - s = u - (u - \frac{a^2}{4u}) = \frac{a^2}{4u}$ (415.). Folglich ist $SF = \frac{\sqrt{(ap + a^2)}}{2} - \frac{a^2}{4u}$ (413, 1. Zus.) $= \frac{2u\sqrt{(ap+a^2)} - a^2}{4u}$; und $Sf = \frac{2u\sqrt{(ap+a^2)} + a^2}{4u}$. Folglich ist $SF : Sf = 2u\sqrt{(ap + a^2)} - a^2 : 2u\sqrt{(ap+a^2)} + a^2$. Es ist aber auch $MF : Mf = 2u\sqrt{(ap+a^2)} - a^2 : 2u\sqrt{(ap+a^2)} + a^2$ (416.). Folglich ist $SF : Sf = MF : Mf$, also der Winkel FMf halbirt (100.).

Zus. Hieraus ein leichtes Verfahren eine Tangente an einen gegebenen Punkt der Hyperbel zu ziehen.

418. Aufg. Von einem Punkt O, außer-

halb der Hyperbel, eine Tangente an dieselbe zu ziehen.



Auflös. Man beschreibe aus O mit OF einen Kreis, und mache aus f mit AB den Durchschnitt D; ziehe darauf durch f und D die Linie DE, und aus O die Linie OE, so ist dieses eine Tangente.

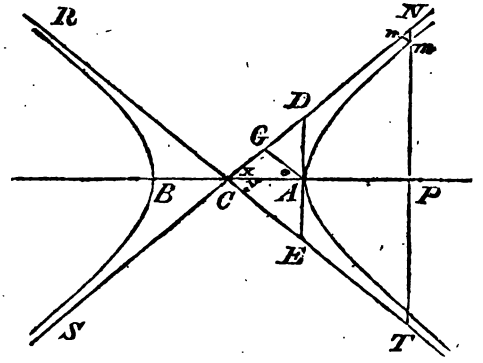
Bew. Man ziehe OD, OF und EF, so ist Dr. OFE = ODE. Denn es ist OE = OE; OD = OF; und fE — FE = AB (416.), ingleichen fE — ED = fD = AB; und daher FE = ED. Folglich ist W. DEO = FEO, und daher OE eine Tangente (417.).

1. Zus. Beschreibt man aus O mit Of einen Kreis und durchschneidet diesen aus F mit AB, so gibt der Durchschnittspunkt nebst dem Brennpunkt F die Richtungslinie für den Punkt e, nach welchem die zweyte Tangente von O geht.

2. Zus. Liegt der Punkt O innerhalb der Asymptoten (419.), so gehen beyde Tangenten an dieselbe Hyperbel.

419. Erklär. Unter einer Asymptote versteht man eine gerade Linie, die sich einer krummen beständig nähert, aber nicht eher als im Unendlichen mit ihr zusam. trifft.

420. Lehrs. Errichtet man in dem Scheitel der Hyperbel ein Perpendikel AD auf AB, so groß als die halbe kleine Achse, und zieht durch den Mittelpunkt der Hyperbel und den Endpunkt des Perpendikels eine gerade Linie CN, so ist dieses eine Asymptote der Hyperbel.



Bew. Man fälle aus N ein Perpendikel PN auf AP, so ist

$$CA : AD = CP : PN$$

$$\text{d. i. } \tfrac{1}{2}a : \tfrac{1}{2}b = u : PN$$

$$\text{Folglich } PN = \frac{bu}{a}$$

$$\text{und } PN^2 = \frac{b^2 u^2}{a^2} = \frac{pu^2}{a}$$

Es ist aber

$$Pm^2 = y^2 = \frac{pu^2}{a} - \tfrac{1}{4}ap.$$

Also ist $PN^2 > Pm^2$, und daher auch $PN > Pm$. Folglich liegt jeder Punkt der Asymptote außerhalb der Hyperbel.

Ferner ist $PN^2 - Pm^2 = \frac{1}{4}ap$

$$\text{d. i. } (PN + Pm) \cdot (PN - Pm) = \tfrac{1}{4}\cdot$$

also

$$PN - Pm = \frac{\frac{1}{4}\,ap}{PN + Pm}$$

$$\text{d. i. } Nm = \frac{\frac{1}{4}\,ap}{PN + Pm}.$$

Nun ist $\frac{1}{4}$ ap eine beständige Größe, PN und Pm aber wachsen immer mehr, je größer x wird, folglich wird der Bruch $\frac{\frac{1}{4}\,ap}{PN + Pm}$, also auch Nm, d. i. der Abstand der Asymptote von der Hyperbel immer kleiner, je größer x wird.

Wenn x unendlich groß wird, so werden auch PN und Pm unendlich groß, und daher der Werth des Bruchs, also auch $Nm = 0$, d. i. die Asymptote und Hyperbel fallen alsdann zusammen.

1. Zus. Verlängert man CN nach S hin, so ist es die Asymptote der entgegengesetzten Hyperbel; und macht man $AE = AD$, und zieht durch C und E eine gerade Linie RT, so ist dieses die zweyte Asymptote beyder entgegengesetzten Hyperbeln.

2. Zus. Der Asymptotenwinkel DCE wird durch die erste Achse AB halbirt.

3. Zus. Zieht man aus A eine Parallele AG mit CE, so ist $AG = CG = \frac{1}{2}$ CD. Denn es ist

$$AD : DE = AG : CE.$$

Da nun $AD = \frac{1}{2}$ DE ist, so ist auch $AG = \frac{1}{2}$ CE $= \frac{1}{2}$ CD. Ferner ist $x = y = o$, also Dr. CAG gleichschenklig.

4. Zus. Es ist $AG^2 = (\frac{1}{4}\,a)^2 + (\frac{1}{4}\,b)^2 = \frac{a^2 + b^2}{16}$.

Anmerk. Das Quadrat der Linie AG wird die Potenz der Hyperbel genannt.

421. Lehrs. Das Produkt der Abscisse

Cn, auf der Asymptote CN genommen, und der ihr zugehörigen Ordinate nm — die der andern Asymptote CT parallel geht — ist der Potenz der Hyperbel gleich.

Bew. Wegen der Aehnlichkeit der Dreyecke Nmn und CDE ist

$$\begin{aligned} Nm : mn &= DE : CE \\ &= b : h \text{ (413, 2. Zus.)} \\ \text{folglich } mn &= \frac{Nm \cdot h}{b}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ferner ist } Cn : Tm &= Nn : Nm \\ &= CD : DE \\ &= h : b \\ \text{und daher } Cn &= \frac{h}{b} \cdot Tm \end{aligned}$$

$$\text{Folglich } Cn \cdot mn = \frac{h^2}{b^2} \cdot Nm \cdot Tm$$

$$\text{Nun ist } Nm = \frac{\frac{1}{4} ap}{PN + Pm} = \frac{\frac{1}{4} b^2}{PN + Pm}$$

(420.) und

$Tm = PN + Pm$. Also ist

$$\begin{aligned} Cn \cdot nm &= \frac{h^2}{b^2} \cdot \frac{\frac{1}{4} b^2}{PN + Pm} \cdot (PN + Pm) \\ &= \tfrac{1}{4} h^2 \\ &= \tfrac{1}{16} (a^2 + b^2) \text{ (413, 2. Zus.).} \end{aligned}$$

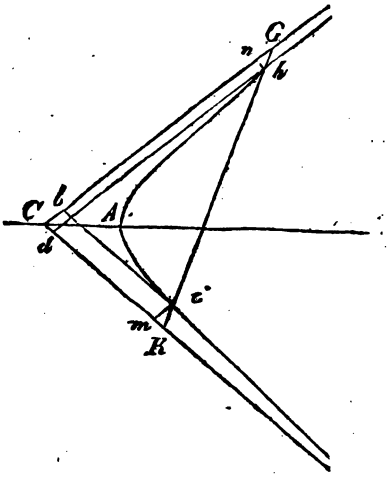
Es war aber die Potenz der Hyperbel $= \frac{a^2 + b^2}{16}$ (420, 4. Zus.), folglich ist $Cn \cdot nm$ dieser Potenz gleich.

1. Zus. Alle Produkte der Abscissen auf den Asymptoten mit den ihnen zugehörigen Ordinaten sind einander gleich; da sie alle der Potenz der Hyperbel gleich sind. **Folglich verhalten sich die Abscissen auf den Asymptoten umgekehrt wie ihre Ordinaten** *(Nr. 330.)*.

2. Zus. Es sey Cn = v; nm = z; so ist $z = \frac{a^2 + b^2}{v}$, welches die Gleichung der Hyperbel in Beziehung auf die Asymptoten ist.

3. Zus. Da in dieser Gleichung der Zähler $(a^2 + b^2)$ eine beständige Größe ist, so muß z desto kleiner werden, je größer v wird.

422. Lehrs. Durchschneidet man die Hyperbel hAi irgendwo mit einer geraden Linie GK, so sind die Theile derselben, die zwischen die Asymptoten, CG und CK, und die Hyperbel fallen, einander gleich, Gh = Ki.



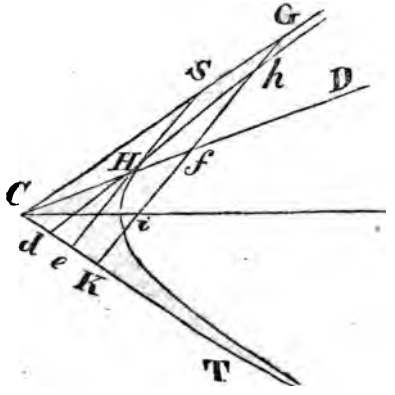
Bew. Man ziehe bi und hn || CK; ingleichen dh und mi || CG, so ist bi = Cm, dh = Cn, und daher

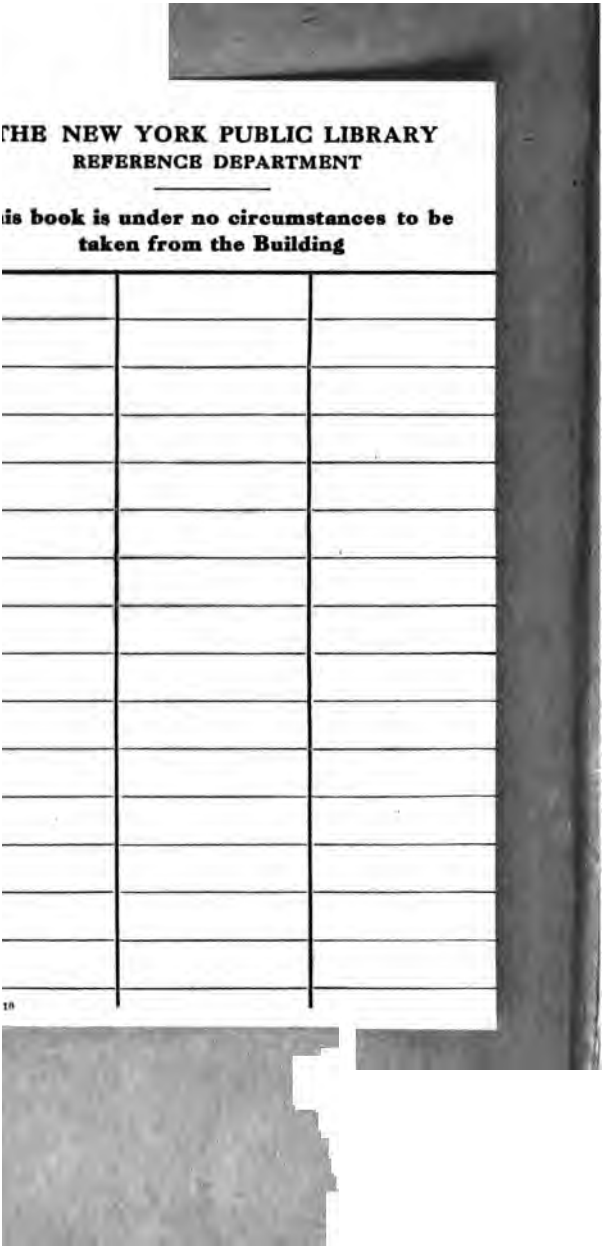
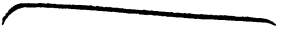
bi . mi = dh . hn (421, 1. Zus.)
folglich bi : hn = dh : mi
Es ist aber auch bi : hn = Gi : Gh
folglich dh : mi = Gi : Gh
Ferner ist dh : mi = Kh : Ki
also Gi : Gh = Kh : Ki
und daher Gi — Gh : Kh — Ki = Gh : Ki (Ar. 342, 5.)
d. i. hi : hi = Gh : Ki
Folglich ist Gh = Ki.

Zus. Man denke sich, die Linie GK rücke weiter nach dem Scheitel der Hyperbel hin, oder werde auch um den Punkt h gedreht, so fallen die Durchschnittspunkte i und h immer näher zusammen, und immer bleibt Gh = Ki; fallen endlich i und h in einen Punkt zusammen, so wird GK eine Tangente, und dann ist sowohl Gh als Ki = ½ GK.

423. Aufg. An einen Punkt H der Hyperbel eine Tangente zu ziehen.

Auflös. Man ziehe aus H nach einer der beyden Asymptoten eine Parallele mit der andern Asymptote, z. B. Hd || CS; ferner mache man de = Cd: so ist die gerade Linie durch e und H die gesuchte Tangente.



THE NEW YORK PUBLIC LIBRARY
REFERENCE DEPARTMENT

This book is under no circumstances to be taken from the Building